On démontrera l'existence de la solution unique $\varphi(x)$ holomorphe dans D' si le module du paramètre λ est suffisamment petit. Cette fonction sera aussi la solution unique de l'équation proposée (24).

Articles cités

[1] W. Pogorzelski, *Sur l'équation intégro-différentielle non linéaire à singularité polaire*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951), p. 75-87.

[2] J. Wolska, *Sur les équations intégrales et intégro-différentielles à singularité polaire*, Prace Mat. Fiz. 48 (1952), p. 27-44.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre, et leurs applications

par J. Szarski (Kraków)

Le but de cette note est de généraliser, pour les systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} < f^\mu_\nu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m,\quad \nu=1,2,\ldots,k),$$

certains théorèmes que nous avons obtenus antérieurement [1] pour le cas particulier $k=1$.

Au § 1 nous rappelons ces théorèmes ainsi que certaines conséquences qui en résultent. Le § 2 comprend des théorèmes sur les inégalités de la forme (1.1) et le § 3 les applications de ces théorèmes au problème d'unicité et à celui d'évaluation de la différence entre deux solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Au § 4 nous démontrons un théorème sur la monotonie, par rapport aux valeurs initiales, de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le théorème 2.1 et le théorème 4.1 ont été communiqués, sous une forme moins générale, au Congrès des Mathématiciens Polonais en 1948 [3].

§ 1. Nous commençons par rappeler, sous une forme un peu modifiée, un théorème démontré dans le travail cité plus haut[1]).

Théorème 1.1. *Supposons que les fonctions*

$$f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,q_1,\ldots,q_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

soient définies respectivement dans des domaines Δ_μ de l'espace à $2n+m+1$ dimensions, dont les projections sur le plan $x,y_1,\ldots,y_n$ recouvrent l'ensemble

$$(1.2)\qquad \mathring{x}\leqslant x<\mathring{x}+a,\quad a_i+N(x-\mathring{x})\leqslant y_i\leqslant b_i-N(x-\mathring{x})\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

où $N>0$, $a_i<b_i$, $0<a<(b_i-a_i)/2N$.

[1]) Cf. [1], théorème 3 bis, p. 25.

Supposons que la fonction f^μ satisfasse dans Δ_μ à la condition de Lipschitz

$$|f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,q_1,\ldots,q_n)-f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n)| \tag{1.3}$$
$$\leqslant N\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar{q}_i|,$$

et à la suivante condition (W) *de monotonie:*

(W) *Lorsque* $u_1\geqslant\bar{u}_1,\ \ldots,\ u_{\mu-1}\geqslant\bar{u}_{\mu-1},\ u_\mu=\bar{u}_\mu,\ u_{\mu+1}\geqslant\bar{u}_{\mu+1},\ \ldots,\ u_m\geqslant\bar{u}_m$, *alors*

$$f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,q_1,\ldots,q_n)\geqslant f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m,q_1,\ldots,q_n).$$

Soient $u_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)$, $v_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ $2m$ *fonctions définies dans l'ensemble* (1.2) *et ayant les propriétés suivantes:*

1° *Pour* $\mu=1,2,\ldots,m$

$$u_\mu(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n)>v_\mu(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n); \tag{1.4}$$

2° *Pour tout point* $P(x,y_1,\ldots,y_n)$ *appartenant à* (1.2) *en lequel pour un* μ *fixe*

$$u_\mu(P)=v_\mu(P),$$

les fonctions u_μ *et* v_μ *ont la différentielle totale et satisfont aux inégalités différentielles*

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x}\right)_P\geqslant f^\mu\left(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)_P, \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x}\right)_P< f^\mu\left(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}\right)_P. \tag{1.6}$$

Dans ces hypothèses, les inégalités

$$u_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)>v_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m) \tag{1.7}$$

sont satisfaites dans l'ensemble (1.2) *tout entier.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème cité en [1]).

Voici un théorème d'existence que nous avons démontré [2], et dont nous ferons usage dans la suite.

THÉORÈME 1.2. *Supposons que les fonctions*

$$f^\mu(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,q_1,\ldots,q_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m)$$

soient de classe C^3 *dans l'ensemble*

$$\mathring{x}\leqslant x<\mathring{x}+a,\quad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant a,\quad |u_\mu-\mathring{u}_\mu|\leqslant a,\quad |q_i-\mathring{q}_i|\leqslant a \tag{1.8}$$
$$(i=1,2,\ldots,n,\ \mu=1,2,\ldots,m),$$

leurs dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre étant absolument inférieures à un nombre positif M. *Soient* $\omega_\mu(y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ *des fonctions ayant dans le cube*

$$|y_i-\mathring{y}_i|\leqslant a\qquad(i=1,2,\ldots,n),$$

les dérivées partielles jusqu'au troisième ordre continues et inférieures au nombre M. *Supposons ensuite qu'on ait les inégalités*

$$|\mathring{q}_i|<M,\quad |\omega_\mu(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n)-\mathring{u}_\mu|<\frac{a}{4},\quad \left|\frac{\partial\omega_\mu(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n)}{\partial y_i}-\mathring{q}_i\right|<\frac{a}{4}, \tag{1.9}$$
$$(i=1,2,\ldots,n,\ \mu=1,2,\ldots,m),$$

et posons

$$c=[8M(m+n)]^{-1}[1+2M(m+n)]^{-2},$$
$$r=2M+[2(m+n)]^{-1},\qquad N=M(1+3mr+m^2r^2), \tag{1.10}$$
$$b=a^2[(n+1)(N+a+1)]^{-5},\qquad \delta=\min(c,b).$$

Alors le système d'équations

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x}\doteq f^\mu\left(x,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m) \tag{1.11}$$

a une unique solution $u_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ *de classe* C^1 *dans l'ensemble*

$$\mathring{x}\leqslant x<\mathring{x}+\delta,\quad |y_i-\mathring{y}_i|\leqslant a[4n(N+1)]^{-1}-N(x-\mathring{x})\quad(i=1,2,\ldots,n), \tag{1.12}$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$u_\mu(\mathring{x},y_1,\ldots,y_n)=\omega_\mu(y_1,\ldots,y_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m).$$

Voici maintenant une application du théorème 1.1 dans la théorie des systèmes d'équations de la forme (1.11).

THÉORÈME 1.3. *Supposons que les fonctions* f^μ *satisfassent à toutes les hypothèses du théorème 1.2 et à la condition de monotonie* (W) (*cf.* *théorème* 1.1) *dans le cube* (1.8). *Soient* $\omega_\mu(y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ $2m$ *fonc-*

tions qui remplissent toutes les hypothèses faites sur ω_μ dans le théorème 1.2, et qui vérifient les inégalités

$$\omega_\mu(y_1,\dots,y_n) \geqslant \vartheta_\mu(y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m). \tag{1.13}$$

Désignons enfin par $u_\mu(x,y_1,\dots,y_n)$, $v_\mu(x,y_1,\dots,y_n)$ $(\mu=1,2,\dots,m)$ deux solutions de classe C^1 du système (1.11) *dans l'ensemble* (1.12), *satisfaisant aux conditions initiales*

$$u_\mu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n)=\omega_\mu(y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m), \tag{1.14}$$

$$v_\mu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n)=\vartheta_\mu(y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m). \tag{1.15}$$

Dans ces hypothèses, les inégalités

$$u_\mu(x,y_1,\dots,y_n) \geqslant v_\mu(x,y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m), \tag{1.16}$$

sont vérifiées dans l'ensemble (1.12) *tout entier.*

Démonstration. Posons, pour $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned} f^\mu(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n,\varepsilon) \\ = f^\mu(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n)+\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\omega_\mu(y_1,\dots,y_n,\varepsilon)=\omega_\mu(y_1,\dots,y_n)+\varepsilon. \tag{1.18}$$

Pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit, les fonctions (1.17) et (1.18) satisfont à toutes les hypothèses du théorème 1.2. Désignons par $u_\mu(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)$ l'unique solution du système

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x}=f^\mu\left(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n},\varepsilon\right) \qquad (\mu=1,2,\dots,m), \tag{1.19}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$u_\mu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n,\varepsilon)=\omega_\mu(y_1,\dots,y_n,\varepsilon) \tag{1.20}$$

et définie dans l'ensemble (1.12). L'existence de cette solution est garantie par le théorème 1.2.

D'après (1.13), (1.15), (1.18) et (1.20), on a

$$u_\mu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n,\varepsilon)>v_\mu(\mathring{x},y_1,\dots,y_n). \tag{1.21}$$

D'autre part d'après (1.17)

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial x}<f^\mu\left(x,y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_m,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_n},\varepsilon\right) \qquad (\mu=1,2,\dots,m) \tag{1.22}$$

et, en vertu de (1.19),

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x}\geqslant f^\mu\left(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n},\varepsilon\right) \qquad (\mu=1,2,\dots,m). \tag{1.23}$$

Les fonctions f^μ remplissant, par hypothèse, la condition de Lipschitz avec la constante N par rapport aux variables $q_1,\dots,q_n$, il résulte de (1.21), (1.22) et (1.23), en vertu du Théorème 1.1, que

$$u_\mu(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)>v_\mu(x,y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m), \tag{1.24}$$

dans l'ensemble (1.12). D'autre part, puisque

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f^\mu(x,y_1,\dots,y_1,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n,\varepsilon)=f^\mu(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_\mu(y_1,\dots,y_1,\varepsilon)=\omega_\mu(y_1,\dots,y_n),$$

et ceci uniformément, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\mu(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)=u_\mu(x,y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m)\text{[2]}. \tag{1.25}$$

Les relations (1.24) et (1.25) donnent les inégalités (1.16) dans l'ensemble (1.12).

§ 2. Nous examinerons maintenant les systèmes d'inégalités différentielles de la forme (1.1).

THÉORÈME 2.1. *Supposons que les fonctions*

$$f_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m,\ \nu=1,2,\dots,k),$$

soient définies respectivement dans des domaines D_μ de l'espace à $2n+m+k$ dimensions, dont les projections sur le plan $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n$ recouvrent l'ensemble

$$\underset{(\nu=1,2,\dots,k)}{\mathring{x}_\nu\leqslant x_\nu<\mathring{x}_\nu+a}, \qquad a_i+N\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu-\mathring{x}_\nu)\underset{(i=1,2,\dots,n)}{\leqslant y_i\leqslant} b_i-N\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu-\mathring{x}_\nu) \tag{2.1}$$

où $N>0$, $a_i<b_i$, $0<a<(b_i-a_i)/2N$. Supposons que la fonction f_ν^μ satisfasse dans D_μ à la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} &|f_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n) \\ &\quad -f_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_n)|\leqslant N\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar{q}_i| \end{aligned} \tag{2.2}$$

et à la suivante condition (V) *de monotonie:*

---

[2]) Ceci résulte du corollaire 3 qui sera démontré au § 3.

(V) *Lorsque* $u_1 \geqslant \bar{u}_1, \ldots, u_{\mu-1} \geqslant \bar{u}_{\mu-1}, u_\mu = \bar{u}_\mu, u_{\mu+1} \geqslant \bar{u}_{\mu+1}, \ldots, u_m \geqslant \bar{u}_m$, *alors*

$$f_\nu^\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n) \geqslant f_\nu^\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, q_1, \ldots, q_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

Soient $u_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ $2m$ *fonctions définies dans l'ensemble* (2.1) *et ayant les propriétés suivantes:*

1⁰ *Pour* $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$u_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) > v_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n); \tag{2.3}$$

2⁰ *Pour tout point* $P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ *appartenant à* (2.1), *en lequel pour un* μ *fixe*

$$u_\mu(P) = v_\mu(P),$$

les fonctions u_μ *et* v_μ *ont la différentielle totale et satisfont pour* $\nu = 1, 2, \ldots, k$ *aux inégalités différentielles*

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P \geqslant f_\nu^\mu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)_P, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P < f_\nu^\mu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_m, \frac{\partial v_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}\right)_P. \tag{2.5}$$

Dans ces hypothèses, les inégalités

$$u_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) > v_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.6}$$

sont vérifiées dans l'ensemble (2.1) *tout entier.*

Démonstration. Soit $\overset{*}{P}(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \neq \mathring{P}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n)$ un point quelconque de l'ensemble (2.1) et posons

$$\lambda_\nu = \overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{2.7}$$

On a

$$a > \lambda_\nu \geqslant 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \quad \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu > 0. \tag{2.8}$$

Introduisons la transformation de A. Mayer

$$x_\nu = \mathring{x}_\nu + \lambda_\nu x \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.9}$$

et désignons

$$\begin{aligned} U_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) &= u_\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k x, y_1, \ldots, y_n), \\ V_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) &= v_\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les fonctions u_μ et v_μ étant définies dans l'ensemble (2.1) les fonctions U_μ et V_μ le sont dans l'ensemble

$$0 \leqslant x < \delta_1, \quad a_i + \left(N \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu\right) x \leqslant y_i \leqslant b_i - \left(N \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu\right) x, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.11}$$

où $\delta_1 = a/\max \lambda_\nu$ et par conséquent $\delta_1 > 1$.

D'après (2.3) et (2.10), on a

$$U_\mu(0, y_1, \ldots, y_n) > V_\mu(0, y_1, \ldots, y_n) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.12}$$

Posons

$$F^\mu(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu f_\nu^\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_n x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n).$$

En vertu de (2.2), la fonction F^μ remplit la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} &|F^\mu(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n) \\ &- F^\mu(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)| \leqslant \left(N \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu\right) \sum_{i=1}^{n} |q_i - \bar{q}_i|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

D'autre part, les fonctions f_ν^μ satisfaisant à la condition (V), les fonctions F^μ satisfont à la condition (W) (cf. § 1).

Si, pour un point $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ appartenant à (2.11), on a

$$U_\mu(P) = V_\mu(P),$$

alors, d'après 2⁰, les fonctions U_μ et V_μ ont la différentielle totale en P et satisfont aux inégalités différentielles

$$\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x}\right)_P \geqslant F^\mu\left(x, y_1, \ldots, y_n, U_1, \ldots, U_m, \frac{\partial U_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial U_\mu}{\partial y_n}\right)_P, \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial x}\right)_P < F^\mu\left(x, y_1, \ldots, y_n, V_1, \ldots, V_m, \frac{\partial V_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V_\mu}{\partial y_n}\right)_P. \tag{2.15}$$

Les inégalités (2.14) et (2.15) résultent des inégalités (2.4), (2.5), (2.8) et des relations évidentes

$$\frac{\partial U_\mu}{\partial x}=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu},\qquad \frac{\partial V_\mu}{\partial x}=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu},\qquad \frac{\partial U_\mu}{\partial y_i}=\frac{\partial u_\mu}{\partial y_i},\qquad \frac{\partial V_\mu}{\partial y_i}=\frac{\partial v_\mu}{\partial y_i}.$$

On voit donc que les fonctions F^μ, U_μ, V_μ satisfont à toutes les hypothèses du théorème 1.1 dans l'ensemble (2.11), et, par conséquant,

$$U_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)>V_\mu(x,y_1,\ldots,y_n)$$

dans l'ensemble (2.11), d'où, en particulier,

$$U_\mu(1,y_1,\ldots,y_n)>V_\mu(1,y_1,\ldots,y_n)$$

ou, ce qui revient au même, d'après (2.7) et (2.10),

$$u_\mu(\overset{*}{x}_1,\ldots,\overset{*}{x}_k,y_1,\ldots,y_n)>v_\mu(\overset{*}{x}_1,\ldots,\overset{*}{x}_k,y_1,\ldots,y_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m).$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 2.1.

Théorème 2.2. *Supposons que les fonctions f^μ_ν satisfassent à toutes les hypothèses du théorème 2.1. Soient $u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ et $v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ $2m$ fonctions définies dans l'ensemble (2.1) et ayant les propriétés suivantes:*

1⁰ *Pour $\mu=1,2,\ldots,m$*

$$u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)>0 \tag{2.16}$$

$$u_\mu(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)>|v_\mu(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)| \tag{2.17}$$

2⁰ *Pour tout point $P(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ appartenant à (2.1), en lequel pour un μ fixe*

$$u_\mu(P)=|v_\mu(P)|,$$

les fonctions u_μ et v_μ ont la différentielle totale et satisfont pour $\nu=1,2,\ldots,k$ aux inégalités différentielles

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P\geqslant f^\mu_\nu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\left|\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right|\right)_P, \tag{2.18}$$

$$\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right|_P<f^\mu_\nu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,|v_1|,\ldots,|v_m|,\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial y_1}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}\right|\right)_P. \tag{2.19}$$

Dans ces hypothèses, les inégalités

$$u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)>|v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)|\qquad(\mu=1,2,\ldots,m) \tag{2.20}$$

sont vérifiées dans l'ensemble (2.1) *tout entier.*

Démonstration. Posons

$$\bar v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)=|v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)|,$$

$$\bar f^\mu_\nu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,q_1,\ldots,q_n)$$

$$=f^\mu_\nu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,|q_1|,\ldots,|q_n|).$$

Les fonctions $\bar f^\mu_\nu$ ainsi définies satisfont à toutes les hypothèses du théorème 2.1. D'après (2.17), on a

$$u_\mu(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)>\bar v_\mu(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m).$$

D'autre part, si, pour un point $P(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$,

$$u_\mu(P)=\bar v_\mu(P),$$

alors $u_\mu(P)=|v_\mu(P)|$ et, en vertu de 2⁰, les fonctions u_μ et v_μ ont la différentielle totale. Il en résulte, comme $v_\mu(P)\neq 0$ d'après (2.16), que la fonction $\bar v_\mu$ a la différentielle totale au point P et que

$$\left(\frac{\partial \bar v_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P\leqslant\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right|_P,\qquad \left|\frac{\partial \bar v_\mu}{\partial y_i}\right|_P=\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial y_i}\right|_P.$$

Les dernières relations, rapprochées des inégalités (2.19) donnent

$$\left(\frac{\partial \bar v_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P<\bar f^\mu_\nu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,\bar v_1,\ldots,\bar v_m,\frac{\partial \bar v_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial \bar v_\mu}{\partial y_n}\right)_P\qquad(\nu=1,2,\ldots,k).$$

D'autre part, d'après (2.18), on a

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right)_P\geqslant\bar f^\mu_\nu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)_P\qquad(\nu=1,2,\ldots,k).$$

On voit donc que les fonctions $\bar f^\mu_\nu, u_\mu$ et $\bar v_\mu$ satisfont aux hypothèses du théorème 2,1 et, par conséquent,

$$u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)>\bar v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)=|v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)|$$

dans l'ensemble (2.1), ce qui termine la démonstration.

§ 3. Passons à présent aux applications des théorèmes précédents dans la théorie des systèmes d'équations de la forme

$$(3.1)\qquad \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu}=g_\nu^\mu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,\frac{\partial z_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_\mu}{\partial y_n}\right)$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots,k).$$

Voici d'abord un théorème sur l'évaluation de la différence entre une solution du système (3.1) et une solution du système (3.1) perturbé.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que les fonctions*

$$g_\nu^\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,q_1,\ldots,q_n)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots,k)$$

soient définies respectivement dans des domaines D_μ dont les projections sur le plan $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n$ recouvrent l'ensemble

$$(3.2)\qquad |x_\nu-\mathring{x}_\nu|<a,\qquad a_i+N\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu-\mathring{x}_\nu|\leqslant y_i\leqslant b_i-N\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu-\mathring{x}_\nu|$$

$$(\nu=1,2,\ldots,k,\ i=1,2,\ldots,n).$$

Supposons qu'on ait dans D_μ

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}&|g_\nu^\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,q_1,\ldots,q_n)\\ &\qquad -g_\nu^\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,\bar z_1,\ldots,\bar z_m,\bar q_1,\ldots,\bar q_n)|\\ &\leqslant f_\nu^\mu(|x_1-\mathring{x}_1|,\ldots,|x_k-\mathring{x}_k|,y_1,\ldots,y_n,\\ &\qquad |z_1-\bar z_1|,\ldots,|z_m-\bar z_m|,|q_1-\bar q_1|,\ldots,|q_n-\bar q_n|\,),\end{aligned}$$

où les fonctions $f_\nu^\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,q_1,\ldots,q_n)$ sont définies et non-négatives dans l'ensemble

$$(\mathrm{D})\qquad 0\leqslant x_\nu<a,\qquad a_i+N\sum_{\nu=1}^{k}x_\nu\leqslant y_i\leqslant b_i-N\sum_{\nu=1}^{k}x_\nu,\qquad u_\mu\geqslant 0,\qquad q_i\geqslant 0,$$

$$(\nu=1,2,\ldots,k;\ i=1,2,\ldots,n,\ \mu=1,2,\ldots,m)$$

et ont les propriétés suivantes:

(a) *les fonctions f_ν^μ satisfont aux hypothèses* (2.2) *et* (V) *du théorème* 2.1 *dans D,*

(b) *Pour chaque suite de nombres $c_\mu\geqslant 0$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$, et $\varepsilon_\nu^{(\mu)}\geqslant 0$ $(\mu=1,2,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots,k)$, le système d'équations*

$$(3.4)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}=f_\nu^\mu\left(x_1,\ldots,x_\mu,y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)+\varepsilon_\nu^{(\mu)}$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots,k)$$

admet une solution unique, non-négative avec ses dérivées du premier ordre,

$$u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n;c_1,\ldots,c_m,\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\varepsilon_k^{(m)})\qquad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

qui est définie et a la différentielle totale (par rapport aux variables $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n$) en tout point de la projection de l'ensemble D sur le plan $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n$, qui satisfait à la condition initiale

$$(3.5)\qquad u_\mu(0,\ldots,0,y_1,\ldots,y_n;c_1,\ldots,c_m,\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\varepsilon_k^{(m)})=c_\mu\qquad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

et est continue par rapport à $c_1,\ldots,c_m,\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\varepsilon_k^{(m)}$.

Soit $z_\mu^{(1)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$, une solution du système (3.1), *définie et ayant la différentielle totale dans l'ensemble* (3.2), *et soit $z_\mu^{(2)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ une solution analogue du système perturbé*

$$(3.6)\qquad \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu}=g_\nu^\mu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,\frac{\partial z_\mu}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_\mu}{\partial y_n}\right)+\eta_\nu^\mu$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots,k),$$

où

$$\eta_\nu^\mu=\eta_\nu^\mu\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,\frac{\partial z_1}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_1}{\partial y_n},\ldots,\frac{\partial z_m}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_m}{\partial y_n}\right).$$

Supposons enfin qu'on ait les inégalités

$$(3.7)\qquad |\eta_\nu^\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m,q_1^{(1)},\ldots,q_n^{(1)},\ldots,q_1^{(m)},\ldots,q_n^{(m)}|\leqslant\varepsilon_\nu^{(\mu)},$$

$$(3.8)\qquad |z_\mu^{(1)}(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)-z_\mu^{(2)}(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n)|\leqslant c_\mu\quad(\mu=1,2,\ldots,m).$$

Dans ces hypothèses, les inégalités

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}&|z_\mu^{(1)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)-z_\mu^{(2)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)|\\ &\leqslant u_\mu(|x_1-\mathring{x}_1|,\ldots,|x_k-\mathring{x}_k|,y_1,\ldots,y_n;c_1,\ldots,c_m,\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\varepsilon_k^{(m)})\end{aligned}$$

sont vérifiées dans l'ensemble (3.2) *tout entier.*

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que les inégalités (3.9) sont satisfaites dans l'ensemble (3.2) pour $x_\nu\geqslant\mathring{x}_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,k)$.

Soient $\bar\varepsilon_\nu^{(\mu)}$ et $\bar c_\mu$ des nombres arbitraires tels que

$$(3.10)\qquad \bar\varepsilon_\nu^{(\mu)}>\varepsilon_\nu^{(\mu)},\qquad \bar c_\mu>c_\mu,$$

et posons

$$\begin{aligned}&\bar u_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n;\bar c_1,\ldots,\bar c\ \ ,\bar\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\bar\varepsilon_k^{(m)})\\ &\qquad=u_\mu(x_1-\mathring{x}_1,\ldots,x_k-\mathring{x}_k,y_1,\ldots,y_n;\bar c_1,\ldots,\bar c_m,\bar\varepsilon_1^{(1)},\ldots,\bar\varepsilon_k^{(m)});\end{aligned}$$

$$v_\mu(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)=z_\mu^{(1)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n)-z_\mu^{(2)}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n).$$

D'après (3.5), 3.8), (3.10), on a

$$(3.11)\qquad |v_\mu(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)|<\bar{c}_\mu = \bar{u}_\mu(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n;\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_m,\bar{\varepsilon}_1^{(1)},\dots,\bar{\varepsilon}_k^{(m)}).$$

D'autre part, les fonctions $z_\mu^{(1)}$ et $z_\mu^{(2)}$ vérifiant respectivement les systèmes (3.1) et (3.6), on a, en vertu de (3.3) et (3.7), les inégalités différentielles

$$(3.12)\qquad \left|\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right| < f_\nu^\mu\left(x_1-\mathring{x}_1,\dots,x_k-\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n, |v_1|,\dots,|v_m|,\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial y_1}\right|,\dots,\left|\frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}\right|\right)+\bar{\varepsilon}_\nu^{(\mu)}$$

dans l'ensemble (3.2) pour $x_\nu \geqslant \mathring{x}_\nu$ $(\nu=1,2,\dots,k)$. Les fonctions $\bar{u}_\mu$ satisfaisant au système d'équations

$$(3.13)\qquad \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial x_\nu} = f_\nu^\mu\left(x_1-\mathring{x}_1,\dots,x_k-\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n, \bar{u}_1,\dots,\bar{u}_m,\left|\frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial y_1}\right|,\dots,\left|\frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial y_n}\right|\right)+\bar{\varepsilon}_\nu^{(\mu)}$$

et aux conditions initiales

$$\bar{u}_\mu(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n;\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_m,\bar{\varepsilon}_1^{(1)},\dots,\bar{\varepsilon}_k^{(m)})=\bar{c}_\mu>0,$$

il en résulte, les fonctions f_ν^μ étant non-négatives, que

$$(3.14)\qquad \bar{u}_\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n;\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_m,\bar{\varepsilon}_1^{(1)},\dots,\bar{\varepsilon}_k^{(m)})>0 \qquad (\mu=1,2,\dots,m)$$

dans l'ensemble (3.2) pour $x_\nu \geqslant \mathring{x}_\nu$ $(\nu=1,2,\dots,k)$.

D'après (a), (3.11), (3.12), (3.13), et (3.14) et en vertu du théorème 2.2, on a donc

$$(3.15)\qquad |v_\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots y_n)| < \bar{u}_\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n;\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_m,\bar{\varepsilon}_1^{(1)},\dots,\bar{\varepsilon}_k^{(m)})$$

dans l'ensemble (3.2) pour $x_\nu \geqslant \mathring{x}_\nu$. Les inégalités (3.15) étant vérifiées pour $\bar{c}_\mu$ et $\bar{\varepsilon}_\nu^{(\mu)}$ arbitraires satisfaisant à (3.10), on obtient de (3.15), en vertu de la continuité de u_μ par rapport aux variables c_μ et $\varepsilon_\nu^{(\mu)}$, les inégalités (3.9) dans l'ensemble (3.2) pour $x_\nu \geqslant \mathring{x}_\nu$. Le cas, où

$$x_\nu \leqslant \mathring{x}_\nu \quad \text{pour} \quad \nu=a_1,\dots,a_l, \qquad x_\nu \geqslant \mathring{x}_\nu \quad \text{pour} \quad \nu\neq a_1,\dots,a_l$$

se réduit au cas précédent par la transformation

$$X_\nu=-x_\nu \quad (\nu=a_1,\dots,a_l), \qquad X_\nu=x_\nu \quad (\nu\neq a_1,\dots,a_l).$$

Le théorème qui suit, donne une condition suffisante pour l'unicité de la solution du problème de Cauchy relatif au système (3.1).

THÉORÈME 3.2. *Si, dans les hypothèses du théorème 3.1, on suppose en plus que*

$$(3.16)\qquad u_\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n;0,\dots,0,0,\dots,0)\equiv 0 \qquad (\mu=1,2,\dots,m),$$

le système (3.1) admet au plus une solution du problème de Cauchy

$$z_\mu(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)=\varphi_\mu(y_1,\dots,y_n) \qquad (\mu=1,2,\dots,m)$$

ayant la différentielle totale dans l'ensemble (3.2).

Ce théorème est une conséquence immédiate des relations (3.9) et (3.16) pour $c_\mu=0$, $\varepsilon_\nu^{(\mu)}=0$.

COROLLAIRE 1. *Supposons que les fonctions g_ν^μ satisfassent à la condition de Lipschitz par rapport aux variables $z_1,\dots,z_m,q_1,\dots,q_n$ dans les domaines D_μ (cf. théorème 3.1)*

$$(3.17)\qquad |g_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m,q_1,\dots,q_n) - g_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m,\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_n)| \leqslant L\sum_{\mu=1}^{m}|z_\mu-\bar{z}_\mu|+N\sum_{i=1}^{n}|q_i-\bar{q}_i|$$

et que les perturbations η_ν^μ du système (3.8) vérifient les inégalités

$$|\eta_\nu^\mu|\leqslant\varepsilon.$$

Alors deux solutions $z_\mu^{(1)}$ et $z_\mu^{(2)}$ du système (3.1) et du système perturbé (3.6), satisfaisant à la condition initiale

$$|z_\mu^{(1)}(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)-z_\mu^{(2)}(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_k,y_1,\dots,y_n)|\leqslant c,$$

vérifient les inégalités

$$(3.18)\qquad |z_\mu^{(1)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)-z_\mu^{(2)}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)| \leqslant c\exp\left(mL\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu-\mathring{x}_\nu|\right)+\frac{\varepsilon}{mL}\left[\exp\left(mL\sum_{\nu=1}^{k}|x_\nu-\mathring{x}_\nu|\right)-1\right]$$

dans l'ensemble (3.2).

Ce corollaire résulte du théorème 3.1 lorsqu'on y pose

$$f_\nu^\mu(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m,q_1,\dots,q_n)=L\sum_{\mu=1}^{m}z_\mu+N\sum_{i=1}^{m}q_i.$$

On vérifie alors immédiatement que la solution du système (3.4) pour $c_\mu = c$, et $\varepsilon_\nu^{(\mu)} = \varepsilon$, a la forme

$$u_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n; c, \ldots, c, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$$

$$= c \exp\left(mL \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) + \frac{\varepsilon}{mL}\left[\exp\left(mL \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) - 1\right].$$

Corollaire 2. *La condition* (3.17) *étant remplie, le système* (3.1) *admet au plus une solution du problème de Cauchy dans l'ensemble* (3.2).

Ceci est une conséquence immédiate de l'inégalité (3.18) pour $c = \varepsilon = 0$.

Corollaire 3. *Supposons que la condition* (3.17) *soit remplie et qu'on ait uniformément*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_\nu^\mu(\varepsilon) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n; \varepsilon) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n),$$

où

$$\eta_\nu^\mu(\varepsilon) = \eta_\nu^\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m, q_1^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)}, \ldots, q_1^{(m)}, \ldots, q_n^{(m)}; \varepsilon).$$

Soit $z_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *la solution du système* (3.1), *satisfaisant à la condition initiale*

$$z_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y),$$

et soit $z_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *la solution du système*

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu} = g_\nu^\mu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n}\right) + \eta_\nu^\mu(\varepsilon),$$

satisfaisant à la condition initiale

$$z_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n; \varepsilon).$$

Dans ces hypothèses, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon) = z_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$$

uniformément dans l'ensemble (3.2).

Ceci est une conséquence immédiate du corollaire 1.

Remarque 1. Les fonctions f_ν^μ (cf. théorème 3.1) ont la propriété (b) lorsqu'elles sont de classe C^3 et telles que le système (3.4) soit complètement intégrable. Cette remarque résulte d'un théorème démontré antérieurement [2] et du corollaire 3.

§ 4. Nous passons au théorème sur la monotonie de la solution du système (3.1) par rapport aux valeurs initiales.

Théorème 4.1. *Supposons que les fonctions*

$$g_\nu^\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m, q_1, \ldots, q_n) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m, \ \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

soient de classe C^3 *dans l'ensemble*

$$(4.1) \qquad 0 \leqslant x_\nu - \mathring{x}_\nu < a, \quad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a, \quad |z_\mu - \mathring{z}_\mu| \leqslant a, \quad |q_i - \mathring{q}_i| \leqslant a$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, k, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \mu = 1, 2, \ldots, m),$$

leurs dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre étant absolument inférieures à un nombre positif M, *et qu'elles satisfassent à la condition de monotonie* (V) (*cf. théorème* 2.1). *Soient* $\omega_\mu(y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *des fonctions de classe* C^3 *telles que*

$$(4.2) \qquad \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \vartheta_\mu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Supposons qu'on ait les inégalités (1.9) (*cf. théorème* 1.2). *Les constantes* N *et* δ *étant définies par les formules* (1.10) (*cf. théorème* 1.2), *désignons par* $u_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *deux solutions du système* (3.1) *de classe* C^1 *dans l'ensemble*

$$(4.3) \qquad \mathring{x}_\nu \leqslant x_\nu < \frac{\delta}{k}, \qquad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a[4n(N+1)]^{-1} - N\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu - \mathring{x}_\nu),$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, k, \ i = 1, 2, \ldots, n),$$

et satisfaisant pour $\mu = 1, 2, \ldots, m$ *aux conditions initiales*

$$(4.4) \qquad u_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n)$$

$$(4.5) \qquad v_\mu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n) = \vartheta_\mu(y_1, \ldots, y_n).$$

Ceci supposé, les inégalités

$$(4.6) \qquad u_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v_\mu(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

sont vérifiées dans l'ensemble (4.3) *tout entier.*

Démonstration. Soit $\overset{*}{P}(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \neq \mathring{P}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k, y_1, \ldots, y_n)$ un point quelconque de l'ensemble (4.3), et posons

$$(4.7) \qquad \lambda_\nu = \frac{\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{k}(\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

On a

$$(4.8) \qquad 0 \leqslant \lambda_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu = 1.$$

Introduisons la transformation de A. Mayer

$$x_\nu = \mathring{x}_\nu + \lambda_\nu x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{4.9}$$

et désignons

$$\begin{aligned} U_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) &= u_\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k x, y_1, \ldots, y_n), \\ V_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) &= v_\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Les fonctions u_μ et v_μ étant définies dans l'ensemble (4.3), les fonctions U_μ et V_μ le sont dans l'ensemble

$$0 \leqslant x \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} (\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu), \qquad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a[4n(N+1)]^{-1} - \Big(N \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu\Big) x \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.11}$$

qui est contenu, d'après (4.8) dans l'ensemble

$$0 \leqslant x < \delta, \qquad |y_i - \mathring{y}_i| \leqslant a[4n(N+1)]^{-1} - Nx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.12}$$

En vertu de (4.4), (4.5) et (4.10)

$$U_\mu(0, y_1, \ldots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n), \qquad V_\mu(0, y_1, \ldots, y_n) = \vartheta_\mu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.13}$$

Posons

$$G^\mu(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu g_\nu^\mu(\mathring{x}_1 + \lambda_1 x, \ldots, \mathring{x}_k + \lambda_k x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots, q_n).$$

Les fonctions u_μ et v_μ satisfaisant au système (3.1), on voit aisément que les fonctions U_μ et V_μ satisfont au système d'équations

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x} = G^\mu\left(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right).$$

Il est clair, en vertu des hypothèses sur g_ν^μ et d'après (4.8), que les dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre des fonctions G^μ sont absolument inférieures au nombre $\boldsymbol{M}$ et que les fonctions G^μ satisfont à la condition de monotonie (W) (cf. théorème 1.1).

On voit donc que toutes les hypothèses du théorème 1.3 sont vérifiées par les fonctions G^μ, U_μ, V_μ dans l'ensemble (1.8), avec $\mathring{x} = 0$, et, par conséquent,

$$U_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant V_\mu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

en tout point appartenant à (4.12). En particulier, pour $x = \sum_{\nu=1}^{k} (\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu)$,

$$U_\mu\Big(\sum_{\nu=1}^{k} (\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu), y_1, \ldots, y_n\Big) \geqslant V_\mu\Big(\sum_{\nu=1}^{k} (\overset{*}{x}_\nu - \mathring{x}_\nu), y_1, \ldots, y_n\Big),$$

d'où, d'après (4.7) et (4.10),

$$u_\mu(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v_\mu(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_k, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 2. Le fait essentiel de tous les théorèmes de cette note consiste en ce que les ensembles, dans lesquels les inégalités respectives subsistent, sont indépendants de la forme particulière des seconds membres des inégalités respectivement des équations différentielles, et ne dépendent que de certaines constantes.

Articles cités

[1] J. Szarski, *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 1-25.

[2] — *Sur un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, complètement intégrable*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24 (1951-2), p. 9-16.

[3] *VI Zjazd Matematyków Polskich*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 22 (1949), p. 50-51.