Contribution à la formule simpsonienne de quadrature approchée

par S. Gołąb (Kraków)

Comme on le sait la formule de quadrature approchée due à Simpson, consiste en ce qu'on approche l'intégrale

$$P(h) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx \tag{1}$$

par l'expression

$$\bar{P}(h) = h\left\{\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f(a+h)\right\} \tag{2}$$

qui représente l'intégrale d'un polynôme de deuxième degré ayant avec la fonction $f(x)$ les valeurs communes $f(a)$, $f(a+h/2)$, $f(a+h)$.

On sait que la différence

$$R(h) = P(h) - \bar{P}(h) \tag{3}$$

est en général un infiniment petit de *cinquième* ordre par rapport à la variable h. „En général" veut dire ici que cette circonstance, à l'exception de cas particuliers, subsiste pour toutes les fonctions $f(x)$ suffisamment régulières ainsi que pour tous les points a. Dans des cas particuliers, cet ordre peut être supérieur au cinquième.

On a le problème suivant:

Soit une fonction régulière $f(x)$ définie dans un voisinage du point $x=a$

$$f(a+h) = f(a) + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots \tag{4}$$

Posons

$$\bar{P}(h;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \overset{\mathrm{df}}{=} h\left\{\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f(a+h)\right\}. \tag{5}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de sorte que la différence

$$R(h) = P(h) - \bar{P}(h;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \tag{6}$$

soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé par rapport à h.

Pour répondre à cette question, posons

$$f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + g(h), \tag{7}$$

où p, q, r désignent les numéros des trois premiers termes différents de zéro du développement (4). Cela veut dire que

$$a_p \neq 0, \qquad a_q \neq 0, \qquad a_r \neq 0, \tag{8}$$

$$1 \leqslant p < q < r, \tag{9}$$

et la fonction $g(h)$ est un infiniment petit d'ordre plus grand que r ($r \geqslant 3$). En désignant par

$$R^{(n)}(h) \tag{10}$$

la dérivée d'ordre n de la fonction $R(h)$, rappelons que des égalités

$$R^{(i)}(0) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,s), \tag{11}$$

résulte que $R(h)$ est un infiniment petit d'ordre au moins égal à $s+1$.

On a

$$P^{(n)}(h) = f^{(n-1)}(a+h) \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{12}$$

Au moyen de l'induction mathématique, on démontre ensuite facilement que

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(n)}(h) = {} & n\left\{\frac{\lambda_1}{2^{n-1}} f^{(n-1)}\left(a+\frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f^{(n-1)}(a+h)\right\} \\ & + h\left\{\frac{\lambda_1}{2^n} f^{(n)}\left(a+\frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f^{(n)}(a+h)\right\} \qquad (n=2,3,\ldots), \end{aligned} \tag{13}$$

alors que pour $n=1$ la formule

$$\bar{P}'(h) = \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f(a+h) + h\left\{\frac{\lambda_1}{2} f'\left(a+\frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f'(a+h)\right\} \tag{14}$$

subsiste.

Il s'ensuit de là que l'on a les égalités suivantes

$$R^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(a)\left\{1 - \frac{\lambda_1 n}{2^{n-1}} - \lambda_2 n\right\} \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{15}$$

$$R'(0) = f(a)\,[1 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)]. \tag{16}$$

Si $f(a)=0$, on a automatiquement $R'(0)=0$. Si, par contre,

$$f(a)\neq 0, \tag{17}$$

la condition nécessaire pour que

$$R'(0)=0 \tag{18}$$

est que la relation

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1 \tag{19}$$

soit satisfaite.

Des relations (15) et du développement (7) découlent les formules

$$\begin{aligned}
&R^{(i)}(0)=0 \quad \text{pour} \quad i=2,3,\ldots,p,\\
&R^{(p+1)}(0)=f^{(p)}(a)\left\{1-\frac{(p+1)\lambda_1}{2^p}-(p+1)\lambda_2\right\}, \qquad f^{(p)}(a)\neq 0,\\
&R^{(i)}(0)=0 \quad \text{pour} \quad i=p+2,p+3,\ldots,q,\\
&R^{(q+1)}(0)=f^{(q)}(a)\left\{1-\frac{(q+1)}{2^q}\lambda_1-(q+1)\lambda_2\right\}, \qquad f^{(q)}(a)\neq 0,\\
&R^{(i)}(0)=0 \quad \text{pour} \quad i=q+2,q+3,\ldots,r,\\
&R^{(r+1)}(0)=f^{(r)}(a)\left\{1-\frac{(r+1)\lambda_1}{2^r}-(r+1)\lambda_2\right\}, \qquad f^{(r)}(a)\neq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Si donc $R(h)$ doit être un infiniment petit du plus grand ordre possible, les relations suivantes doivent être satisfaites:

$$\frac{p+1}{2^p}\lambda_1+(p+1)\lambda_2=1, \qquad \frac{q+1}{2^q}\lambda_1+(q+1)\lambda_2=1. \tag{21}$$

Les équations précédentes permettent de déterminer d'une manière univoque les coefficients λ_1 et λ_2. En effet, on a

$$\begin{aligned}
W=&\begin{vmatrix} \frac{p+1}{2^p} & p+1 \\ \frac{q+1}{2^q} & q+1 \end{vmatrix} = (p+1)(q+1)\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^q}\right)\\
&=\frac{(p+1)(q+1)(2^{q-p}-1)}{2^q}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Puisque $p<q$, $q-p\geqslant 1$, on a $2^{q-p}-1\geqslant 1$ et, par conséquent,

$$W>0. \tag{23}$$

Le système (21) a alors une et une seule solution qui dépend uniquement des nombres p,q et ne dépend pas des valeurs a_p et a_q.

Si les λ_1 et λ_2 sont déterminés par les équations (21) (et λ_0, dans le cas (17), par la condition (19), car dans le cas $f(a)=0$ la valeur de λ_0 n'a aucune influence sur $R(h)$), on aura

$$R^{(i)}(0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,q+1), \tag{24}$$

ce qui veut dire que $R(h)$ est un infiniment petit d'ordre $r+1$ au moins.

Démandons quand $R(h)$ sera-t'il un infiniment petit d'ordre $r+2$ au moins. Cela aura lieu si les valeurs λ_1, λ_2, déterminées par le système (21), vérifient en outre l'équation

$$\frac{r+1}{2^r}\lambda_1+(r+1)\lambda_2=1. \tag{25}$$

Les équations (21) et (25) conduisent à la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{p+1}{2^p} & p+1 & 1 \\ \frac{q+1}{2^q} & q+1 & 1 \\ \frac{r+1}{2^r} & r+1 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{26}$$

ou à l'équation

$$\frac{(p+1)(q+1)}{2^p}+\frac{(p+1)(r+1)}{2^r}+\frac{(q+1)(r+1)}{2^q} -\frac{(q+1)(r+1)}{2^r}-\frac{(p+1)(r+1)}{2^p}-\frac{(p+1)(q+1)}{2^q}=0.$$

Cette dernière prend après réduction la forme

$$\begin{aligned}
&(p+1)(q+1)\frac{2^{q-p}-1}{2^q}-(p+1)(r+1)\frac{2^{r-p}-1}{2^r}\\
&+(q+1)(r+1)\frac{2^{r-q}-1}{2^r}=0.
\end{aligned} \tag{27}$$

En posant

(28) $$\alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} p+1, \qquad \beta \stackrel{\mathrm{df}}{=} q-p, \qquad \gamma \stackrel{\mathrm{df}}{=} r-q,$$

on transforme l'équation (27) en la suivante:

$$\alpha(\alpha+\beta)\frac{2^{\beta}-1}{2^{\alpha+\beta-1}} - \alpha(\alpha+\beta+\gamma)\frac{2^{\beta+\gamma}-1}{2^{\alpha+\beta+\gamma-1}} + (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)\frac{2^{\gamma}-1}{2^{\alpha+\beta+\gamma-1}} = 0$$

ou en l'équation équivalente

(29) $$\alpha\gamma 2^{\beta+\gamma} - (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)2^{\gamma} + \beta(\alpha+\beta+\gamma) = 0.$$

C'est une équation diophantienne qui doit être résolue par rapport aux inconnues α, β, γ. En tenant compte des inégalités (9), de ce que p, q, r sont des nombres naturels et des dénominations (28), les inégalités

(30) $$\alpha \geqslant 2, \qquad \beta \geqslant 1, \qquad \gamma \geqslant 1.$$

subsistent.

Nous démontrerons dans la suite que l'équation (29) a la seule et unique solution suivante, satisfaisant aux conditions (30),

(31) $$\alpha=2, \qquad \beta=1, \qquad \gamma=1.$$

Ecrivons dans ce but l'équation (29) sous la forme

(32) $$2^{\gamma} = \frac{\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta^2+[\beta-\alpha(2^{\beta}-1)]\gamma}$$

et remarquons que l'équation (32) est équivalente à l'équation (29), car la disparition du dénominateur du deuxième membre de (32) entraînerait l'égalité $\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma=0$, ce qui est impossible à cause de (30).

Nous considérons l'équation (32) comme équation à une inconnue γ en envisageant les variables α, β comme paramètres.

Supposons tout d'abord que $\beta=1$. L'équation (32) prend alors la forme

(33) $$2^{\gamma} = \frac{\alpha+1+\gamma}{\alpha+1+(1-\alpha)\gamma}.$$

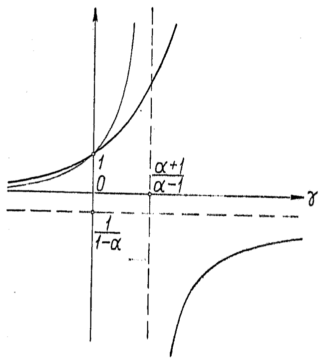

Fig. 1

Traçons deux courbes dans le même système cartesien, dont l'axe de la variable indépendente est γ. Une de ces courbes est exponentielle et représente la variation de la fonction 2^{γ}, la seconde — la fonction homographique $\dfrac{\alpha+1+\gamma}{\alpha+1+(1-\alpha)\gamma}$.

Comme on le voit sur la figure ci-dessus, les deux courbes ne peuvent avoir de point d'intersection que pour les valeurs $\gamma < \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et puisqu'on n'envisage que les valeurs entières et positives de γ, il faut voir combien il y a de valeurs entières positives de γ qui satisfont à l'inégalité précédente. L'inégalité $\alpha \geqslant 2$ entraine l'inégalité

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \leqslant 3$$

et, par conséquent, il existe deux valeurs entières de γ satisfaisant à l'inégalité $\gamma < \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$, notamment

$$\gamma=1, \qquad \gamma=2.$$

Il suffit, pour cette raison, de résoudre successivement les équations

(34) $$2^1 = \frac{\alpha+2}{2}, \qquad 2^2 = \frac{\alpha+3}{3-\alpha}.$$

La première a pour solution $\alpha=2$, la deuxième $\alpha=9/5$ qui est fractionnaire et doit être rejetée. Ainsi, l'équation (33) a l'unique solution admissible (31).

Supposons maintenant

(35) $$\beta \geqslant 2.$$

Nous prouverons d'abord que, dans ce cas, a lieu l'inégalité

(36) $$\alpha[2^{\beta}-1]-\beta > 0.$$

En effet, on a

$$2^{\beta} \geqslant 1+\beta,$$

et, par conséquent,

$$\alpha[2^{\beta}-1]-\beta \geqslant \alpha\beta-\beta = \beta(\alpha-1) > 0$$

vu que $\alpha \geqslant 2$, $\beta \geqslant 1$.

Nous affirmons qu'a lieu l'inégalité

(37) $$\frac{\alpha\beta+\beta^2}{\alpha[2^{\beta}-1]-\beta} < 2.$$

Pour la démonstration remarquons que, d'après (36), l'inégalité (37) équivaut à la suivante

$$\alpha\beta+\beta^2 < 2\alpha 2^{\beta} - 2\alpha - 2\beta$$

ou à l'inégalité

(38) $$2\alpha 2^{\beta} > \alpha\beta+\beta^2+2\alpha+2\beta.$$

En effet, l'inégalité $\beta \geqslant 1$ entraine

$$2^{\beta} \geqslant 1+\beta+\frac{\beta(\beta-1)}{2}$$

et, par conséquent,

$$2a2^{\beta} \geqslant 2a+2a\beta+a\beta(\beta-1)=2a+a\beta+a\beta^2$$

ce qui donne

$$2a2^{\beta} \geqslant 2a+a\beta+2\beta^2>2a+a\beta+\beta^2+2\beta.$$

L'inégalité (38) et, par cela même, l'inégalité (37) sont ainsi démontrées.

Désignons pour abréger

(39) $$A \overset{\mathrm{df}}{=} a\beta+\beta^2, \qquad B \overset{\mathrm{df}}{=} a[2^{\beta}-1]-\beta.$$

L'équation (32) prendra, alors, la forme

(40) $$2^{\gamma}=\frac{A+\beta\gamma}{A-B\gamma}.$$

En traçant de nouveau le dessin de la fonction exponentielle 2^{γ} et de la fonction homographique $\dfrac{A+\beta\gamma}{A-B\gamma}$ (regardant γ comme variable indépendente) dans le même système des coordonnées, on a la figure comme tout près. On constate sans difficulté que les points d'intersection des deux courbes ont les abscisses moindres que A/B, donc (d'après (37)) moindres que 2. On en conclue que la racine positive entière de l'équation (40), ne peut être que $\gamma=1$. Vérifions si cette circonstance a lieu en réalité. Dans ce cas nous aurions

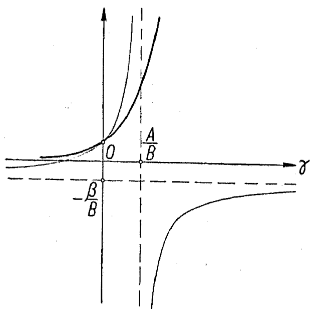

Fig. 2

$$2=\frac{A+\beta}{A-B}$$

ou bien

$$A-2B-\beta=0$$

ce qui, écrit in extenso, donne

$$a\beta+\beta^2-2a2^{\beta}+2a+\beta=0.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$2^{\beta}=\frac{\beta^2}{2a}+\frac{\beta}{2a}+\frac{\beta}{2}+1$$

et profitons de l'inégalité

$$2^{\beta} \geqslant 1+\beta+\frac{\beta(\beta-1)}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{\beta^2}{2a}+\frac{\beta}{2a}+\frac{\beta}{2}+1 \geqslant 1+\beta+\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta}{2}=1+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{2}$$

ou, après réduction,

$$\frac{\beta^2}{2a}+\frac{\beta}{2a} \geqslant \frac{\beta^2}{2}.$$

Cette inégalité conduit successivement aux suivantes:

$$\begin{aligned} \beta^2+\beta &\geqslant a\beta^2 && \text{puisque } a>0,\\ \beta+1 &\geqslant a\beta && \text{puisque } \beta>0,\\ a\beta &\geqslant 2\beta && \text{puisque } a\geqslant 2,\\ \beta+1 &\geqslant 2\beta,\\ 1 &\geqslant \beta, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (35).

Il a été ainsi démontré que (31) est l'unique solution de l'équation (29) qui satisfait aux conditions (30). Les valeurs de p, q, r correspondant à cette solution sont respectivement

(41) $$p=1, \qquad q=2, \qquad r=3$$

et les valeurs de λ_1, λ_2 correspondant aux valeurs (41) s'obtiennent du système (21):

(42) $$\lambda_1+2\lambda_2=1, \qquad \frac{3}{4}\lambda_1+3\lambda_2=1.$$

Il en résulte que

(43) $$\lambda_1=\frac{2}{3}, \qquad \lambda_2=\frac{1}{6}$$

et, par conséquent, en vertu de (19):

(44) $$\lambda_0=\frac{1}{6},$$

ce qui donne pour (5) les valeurs simpsoniennes (2). Dans ce cas, la différence (6) est un infiniment petit de cinquième ordre au moins $(r+2\geqslant 5)$.

Si p,q,r n'ont pas leurs valeurs déterminées par (41), la fonction $R(h)$ est un infiniment petit dont l'ordre est égal exactement à $r+1$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$f(a+h)=f(a)+a_p h^p+a_q h^q+a_r h^r+a_s h^s+g(h), \tag{45}$$

où p,q,r,s sont les numéros des quatre premiers coefficients, différents de zéro, du développement

$$a_p a_q a_r a_s \neq 0, \tag{46}$$

$$1\leqslant p<q<r<s, \tag{47}$$

$g(h)$ désigne un infiniment petit d'ordre plus grand que s $(s\geqslant 4)$.

Du résultat obtenu plus haut découle que λ_1 et λ_2 ne peuvent pas satisfaire à l'équation

$$\frac{s+1}{2^s}\lambda_1+(s+1)\lambda_2=1 \tag{48}$$

et, par conséquent, si $p=1, q=2, r=3, R(h)$ est un infiniment petit d'ordre $s+1$.

Demandons maintenant quand les coefficients λ_i, déterminés en supposant que $R(h)$ soit un infiniment petit d'ordre maximum, auront-ils les valeurs simpsoniennes, ou bien, pour quelles valeurs positives et entières de p,q $(p<q)$ sera satisfait le système d'équations

$$\frac{p+1}{2^p}\cdot\frac{2}{3}+(p+1)\frac{1}{6}=1, \qquad \frac{q+1}{2^q}\cdot\frac{2}{3}+(q+1)\frac{1}{6}=1. \tag{49}$$

Pour répondre à cette question, il suffit de trouver toutes les solutions entières de l'équation diophantienne

$$\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2}{3}+(n+1)\frac{1}{6}=1$$

ou

$$4(n+1)=2^n(5-n). \tag{50}$$

L'équation (50) est facile à résoudre. Puisque le premier membre de cette équation est positif, le deuxième membre fournit la condition

$$n<5, \tag{51}$$

et il suffit de vérifier successivement les valeurs

$$n=1,2,3,4. \tag{52}$$

En substituant ces valeurs, on constate que

$$n=1, \qquad n=2, \qquad n=3$$

sont des solutions tandis que $n=4$ ne l'est pas. On en conclut que les seuls couples (p,q) qui satisfont au système (49) sont les suivants

$$\begin{aligned} p&=1, \quad q=2,\\ p&=1, \quad q=3,\\ p&=2, \quad q=3. \end{aligned} \tag{53}$$

Dans ces cas, et seulement dans ces cas, les coefficients λ_i ont leurs valeurs simpsoniennes; dans tous les cas $R(h)$ est un infiniment petit de cinquième ordre au moins.

En réunissant les résultats obtenus, on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME[1]). *Soit une fonction régulière $f(x)$ ayant le développement* (45). *Si l'on suppose que l'expression* (5) *approche le mieux l'intégrale* (1) (*c'est-à-dire que la fonction* (6) *est un infiniment petit d'ordre de plus élevé possible*), *les coefficients λ_1 et λ_2 ont la forme*

$$\lambda_1=\frac{(q-p)\cdot 2^{q-1}}{pq[2^{q-p}-1]}, \qquad \lambda_2=\frac{p\cdot 2^{q-p}-q}{pq[2^{q-p}-1]}$$

et λ_0 a $\big($*si* $f(a)\neq 0\big)$ *la valeur*

$$\lambda_0=1-\lambda_1-\lambda_2.$$

Les valeurs des λ_i dépendent donc des nombres p,q et ne dépendent pas des coefficients a_p et a_q.

La fonction $R(h)$ est alors un infiniment petit d'ordre m, où m a, suivant le cas, la valeur suivante:

1) *si* $p=1, q=2, r=3$, *alors* $m=s+1$,
2) *dans le cas contraire, c'est-à-dire si* $p=1, q=2, r\geqslant 4$ *ou* $p=1$, $q\geqslant 3$ *ou bien* $p\geqslant 2$, $m=r+1$.

Les valeurs λ_i sont simpsoniennes, c'est-à-dire qu'elles sont déterminées par les formules (43) *et* (44) *seulement dans l'un des trois cas* (53).

Dans tous les cas mentionnés, on a $m\geqslant 5$.

---

[1]) Les résultats contenus dans ce théorème ont été communiqués (sans démonstration) à la séance de l'Académie des Sciences du 25 juin 1951. Voir S. Gołąb, *Quelques propositions de la théorie des courbes planes et leures applications aux quadratures approchées*, Bull. Acad. Pol. d. Sc. et d. Lettr., Suppl. 4. (1951), p. 349-358.