Sur la méthode d'approximation de Newton

par J. Mikusiński (Wrocław)

Première partie

1. La méthode bien connue de Newton, appliquée à l'équation $x^2-c=0$ $(c>0)$, conduit aux approximations successives

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right) \tag{1}$$

qui convergent très rapidement vers $\sqrt{c}$. En prenant pour x_0 l'entier de $\sqrt{c}$, on a par exemple les approximations suivantes:

$$\text{pour } \sqrt{2}:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ldots,$$

$$\text{pour } \sqrt{3}:\quad 1,\ 2,\ \frac{7}{4},\ldots,$$

$$\text{pour } \sqrt{5}:\quad 2,\ \frac{9}{4},\ \frac{161}{72},\ \frac{51\,841}{23\,184},\ldots$$

Il est intéressant de comparer ces suites avec les réduits successifs des développements de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ en fractions continues, à savoir:

$$\text{pour } \sqrt{2}:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ldots,$$

$$\text{pour } \sqrt{3}:\quad 1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ldots,$$

$$\text{pour } \sqrt{5}:\quad 2,\ \frac{9}{4},\ \frac{38}{17},\ \frac{161}{72},\ \frac{682}{305},\ \frac{2689}{1292},\ \frac{12\,238}{5473},\ \frac{51\,841}{23\,184},\ldots,$$

On voit que les suites (2) sont des sous-suites de (3). Plus précisément, désignons par $x_0, x_1, x_2, \ldots$ la suite d'approximations de $\sqrt{c}$ fournies par la méthode de Newton ($x_0=$ entier de $\sqrt{c}$) et par $r_0, r_1, r_2, \ldots$ la suite des réduits du développement de $\sqrt{c}$ en fraction continue.

Les suites (2) et (3) suggèrent la formule générale

$$x_n=r_{2^n-1}. \tag{4}$$

Or, pour $\sqrt{7}$, les deux suites analogues sont:

$$2,\ \frac{11}{4},\ \frac{233}{88},\ \frac{108\,497}{41\,008},\ldots,$$

$$2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ldots,$$

ces suites sont tout à fait différentes (sauf au premier terme). Donc, la formule (4) n'est pas valable généralement.

Quel doit être le nombre naturel c pour que la formule (4) ait lieu?

La réponse est donnée par la proposition suivante:

Pour que la formule (4) *ait lieu, il faut et il suffit que le nombre c soit de la forme*

$$c=a^2+\frac{2a}{b}, \tag{5}$$

où a et b sont naturels.

Voici les nombres naturels inférieurs à 100, satisfaisant à cette condition:

2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 20, 24, 26, 27, 30, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 48, 50, 51, 56, 63, 65, 66, 68, 72, 80, 82, 83, 84, 87, 90, 99.

2. Il est facile de vérifier que la fraction continue correspondant au nombre $\sqrt{c}$ est

$$a(b,2a),$$

où $(b,2a)$ est la période de la fonction. D'autre part, tout nombre rationnel supérieur à 1, ayant pour fraction continue de sa racine carrée une fraction de période 2 (ou 1) est de la forme (5). En effet, la fraction continue $a(b,d)$ représente un nombre x, satisfaisant à l'équation

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{d-a+x}},$$

ou bien, ce qui revient au même, à l'équation

$$x^2+x(d-2a)=a(d-a)+\frac{d}{b}.$$

Si x est une racine carrée irrationnelle d'un nombre rationnel, le coefficient de x dans cette équation est nul, ce qui entraîne $d=2a$ et

$$x^2=a^2+\frac{2a}{b}.$$

Nous avons donc démontré que la supposition que le nombre rationnel $c>1$ soit de la forme (5) est équivalente à la supposition que $\sqrt{c}$ se développe en une fraction continue de période 2 (au plus).

3. Nous allons maintenant démontrer la nécessité de la condition (5). Posons

$$c=a^2+k,$$

où $a=E(\sqrt{c})$. On a alors $r_0=a$. Si $x_0=a$, on trouve, d'après (1),

$$x_1=a+\frac{k}{2a}.$$

En admettant que la formule (4) a lieu, le nombre x_1 sera égal au premier réduit r_1 et, par conséquent, l'inverse de $k/2a$ sera égal à un nombre entier, soit b, d'où $k=2a/b$, ce qu'il fallait démontrer.

4. La démonstration de la suffisance de la condition (5) est plus difficile. Commençons par considérer la fonction

$$f_1(x)=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{2a+x}}.$$

Si P_n/Q_n, où $(P_n,Q_n)=1$, désigne le $n^{\text{ième}}$ réduit de la fraction périodique $0(b,2a)$, on peut écrire

$$f_1(x)=\frac{P_2+P_1x}{Q_2+Q_1x}.$$

Posons par reccurence

$$f_{n+1}(x)=f_n[f_n(x)] \qquad (n=1,2,\ldots); \tag{6}$$

alors

$$f_n(x)=\frac{P_s+P_{s-1}x}{Q_s+Q_{s-1}x}, \qquad f_{n+1}(x)=\frac{P_{2s}+P_{2s-1}\,x}{Q_{2s}+Q_{2s-1}\,x} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) conduisent à la relation

$$\frac{P_{2s}+P_{2s-1}x}{Q_{2s}+Q_{2s-1}x}=\frac{P_s(Q_s+P_{s-1})+(P_sQ_{s-1}+P_{s-1}^2)x}{(Q_s^2+Q_{s-1}P_s)+Q_{s-1}(Q_s+P_{s-1})x} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{8}$$

Il existe donc un nombre d tel que

$$\begin{aligned} dP_{2s}&=P_sQ_s+P_{s-1}P_s,\\ dQ_{2s}&=Q_sQ_s+Q_{s-1}P_s.\end{aligned} \tag{9}$$

Comme

$$\begin{vmatrix} P_s & P_{s-1}\\ Q_s & Q_{s-1}\end{vmatrix}=\pm 1,$$

on tire de (9)

$$P_s=\pm d\begin{vmatrix} P_s & P_{2s}\\ Q_s & Q_{2s}\end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q_s=\pm d\begin{vmatrix} P_{2s} & P_{s-1}\\ Q_{2s} & Q_{s-1}\end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit que $d=1$, car $(P_s,Q_s)=1$.

Les formules (9) s'écriront donc

$$\begin{aligned} P_{2s}&=P_s(Q_s+P_{s-1}),\\ Q_{2s}&=Q_s^2+P_sQ_{s-1},\end{aligned} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{10}$$

Ceci entraîne, en vertu de (8),

$$\begin{aligned} P_{2s-1}&=P_sQ_{s-1}+P_{s-1}^2,\\ Q_{2s-1}&=Q_{s-1}(Q_s+P_{s-1}),\end{aligned} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Nous démontrerons que l'on a

$$bP_s=2aQ_{s-1} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{12}$$

En effet, cette formule a lieu pour $n=1$, car $P_2=2a$ et $Q_1=b$. Supposons que (12) ait lieu pour un certain n naturel. Alors on a, en vertu de (10) et (11),

$$bP_{2s}=bP_s(Q_s+P_{s-1})=2aQ_{s-1}(Q_s+P_{s-1})$$

et, en vertu de (11),

$$bP_{2s}=2aQ_{2s-1}.$$

Cela prouve, par induction, la validité de (12) pour tout n naturel.

Nous démontrerons encore que

$$Q_s=P_{s-1}+2aQ^{s-1} \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{13}$$

En effet, cette formule a lieu pour $n=1$, car $Q_2=1+2ab$, $P_1=1$ et $Q_1=b$. Supposons que (13) ait lieu pour un certain n naturel. D'après (10) et (11), on a

$$\begin{aligned} Q_{2s}&=Q_s^2+P_sQ_{s-1}=(P_{s-1}+2aQ_{s-1})Q_s+P_sQ_{s-1}\\ &=P_{s-1}(P_{s-1}+2aQ_{s-1})+2aQ_{s-1}Q_s+P_sQ_{s-1}\\ &=(P_sQ_{s-1}+P_{s-1}^2)+2aQ_{s-1}(Q_s+P_{s-1}).\end{aligned}$$

En vertu de (11), on a donc

$$Q_{2s} = P_{2s-1} + 2aQ_{2s-1},$$

ce qui prouve (12) par induction.

Nous démontrerons maintenant que

$$a + \frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} + \frac{c}{a + \dfrac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}}\right) \qquad (s=2^n, n=1,2,\ldots). \tag{14}$$

Cette égalité est algébriquement équivalente à la suivante

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} = \frac{\dfrac{2a}{b}Q_{s+1}^2 + P_{s-1}^2}{2Q_{s-1}(aQ_{s-1} + P_{s-1})}. \tag{15}$$

D'après (11) et (12), on voit aussitôt que les numérateurs dans les deux membres de (15) sont égaux. Pareillement, d'après (11) et (13), on voit que les dénominateurs dans (15) sont égaux. Donc l'égalité (15) et, en même temps, l'égalité (14) se trouvent démontrées.

L'égalité (14) entraîne évidemment la validité de la formule (4). La suffisance de la condition (5) est ainsi démontrée.

5. Dans le cas, où la formule de Newton (1) fournit des réduits de fractions continues, l'emploi de cette formule est particulièrement avantageux. En effet, les réduits des fractions continues représentent les meilleures approximations. Cela assure que les calculs, auxquels la formule (1) conduit, seront très „économiques". De plus, la théorie des fractions continues permet d'estimer, à chaque pas, le degré d'approximation.

La situation est différente lorsque la formule (1) ne fournit pas de réduits de fractions continues, ce qui a lieu, comme on l'a vu, pour $\sqrt{7}$ par exemple. On a alors

$$x_3 = \frac{108\,497}{41\,008} \approx 2{,}645\,752\,0$$

et

$$r_9 = \frac{2024}{765} \approx 2{,}645\,751\,6,$$

tandis que

$$\sqrt{7} \approx 2{,}645\,751\,3.$$

La formule (1) conduit dans ce cas au nombre x_3 dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres inutilement grands. On le voit, en comparant x_3 au réduit r_9 qui fournit une meilleure approximation de $\sqrt{7}$.

Remarquons qu'en recommençant par $x_0=3$, la formule (1) conduira, à chaque pas suivant, à un réduit de la fraction continue de $\sqrt{7}$. Il serait intéressant de savoir indiquer la valeur initiale de x_0, quel que soit le nombre c, de manière que les approximations obtenus moyennant (1) coïncident toujours avec les réduits de $\sqrt{c}$.

Deuxième partie

1. Dans la première partie, nous avons démontré que les approximations fournies par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

où $x_0 = \mathrm{E}(\sqrt{c}) < \sqrt{c}$, coïncident avec des réduits (non nécessairement successifs) de la fraction continue de $\sqrt{c}$, pourvu que c soit de la forme

$$c = a + \frac{2a}{b},$$

où a et b sont des nombres naturels. Nous avons aussi posé la question, s'il est possible de déterminer la valeur de x_0, quel que soit c naturel, de manière que la formule (1) donne toujours des réduits du développement de $\sqrt{c}$.

Nous donnons ici la réponse à cette question.

Supposons que $a = \mathrm{E}(\sqrt{c}) < \sqrt{c}$ et que le $p^{\text{ième}}$ terme de la fraction continue de $\sqrt{c}$ soit $2a$. On sait que les p premiers termes de cette fraction constituent une période. (Cette période est primitive lorsque le nombre $2a$ n'apparaît pas avant le $p^{\text{ième}}$ terme.) Nous démontrerons que

(I) *En prenant pour x_n le $(p-1)^{\text{ième}}$ réduit de $\sqrt{c}$, où p est le nombre de termes dans une période (non nécessairement primitive), le nombre x_{n+1}, donné par la formule* (1), *est égal au $(2p-1)^{\text{ième}}$ réduit de $\sqrt{c}$.*

Comme les $2p$ premiers termes de cette fraction continue constituent évidemment encore une période, il s'ensuit que *toutes les itérations de la formule* (1) *fourniront toujours des réduits.*

En particulier, en posant $x_0 = r_{p-1}$ $\big((p-1)^{\text{ième}}$ réduit$\big)$, on aura

$$x_n = r_{2^{n-1}p-1} \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{2}$$

Par exemple, on a

$$\sqrt{7} = 2(1,1,1,4)$$

et les réduits initiaux de $\sqrt{7}$ sont

$$2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ldots$$

La periode compte quatre termes. En posant donc

$$x_0 = r_3 = \frac{8}{3},$$

on trouve, d'après (1),

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + 7\cdot\frac{3}{8}\right) = \frac{127}{48} = r,$$

en accord avec la formule (2).

2. Or, il est aisé de voir qu'en prenant, dans le dernier exemple,

$$x_0 = r_1 = 3,$$

on aura, d'après (1),

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{8}{3} = r_3.$$

Il existe donc un réduit antérieur jouissant de la même propriété. Généralement, on a la proposition suivante:

(II) *Si la période primitive de $\sqrt{c}$ compte $2k$ (k naturel) termes, alors toutes les itérations que l'on obtient par* (1), *en commençant par le* $(k-1)^{\text{ième}}$ *réduit de $\sqrt{c}$, sont encore des réduits de $\sqrt{c}$.*

On voit que, pour les calculs numériques, la proposition (II) est plus avantageuse que la proposition (I). En effet, il est toujours possible, en évaluant succesivement les termes d'une période, de voir que l'on est déjà parvenu à une demi-période[1]). L'évaluation des réduits postérieurs devient alors inutile. Comme l'évaluation des réduits d'ordre supérieur est toujours plus laborieuse, il s'ensuit que la proposition (II) permet d'épargner plus d'une moitié de calculs indispensables en appliquant la proposition (I).

[1]) Voir, par exemple, W. Patz, *Tafel der regelmässigen Kettenbrüche für die Quadratwurzeln*, Leipzig 1941, p. XI-XIII.

La proposition (II) ne peut plus être améliorée de manière à rester valable pour tout $\sqrt{c}$ à période paire. En effet, on a, par exemple,

$$\sqrt{19} = 4(2,1,3,1,2,8);$$

la période est évidemment paire. Les réduits initiaux sont

$$4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \ldots$$

Les réduits 4, 9/2 et 13/3, substitués au lieu de x_n dans la formule (1), donnent pour x_{n+1} respectivement

$$\frac{35}{8},\ \frac{157}{36},\ \frac{170}{39}.$$

Le réduit 13/3 nous a amené, comme il fallait l'attendre, au réduit 170/39, mais aucun des réduits antérieurs ne s'est transformé en réduit.

3. Lorsque la période primitive de $\sqrt{c}$ est impaire, une proposition analogue à (II) n'a pas lieu. En effet, on a, par exemple,

$$\sqrt{89} = 9(2,3,3,2,18).$$

Les réduits initiaux de cette fraction sont

$$9,\ \frac{19}{2},\ \frac{66}{7},\ \frac{217}{23},\ \frac{500}{53},\ \frac{9217}{977},\ \frac{18934}{2007},\ \frac{66019}{6998},$$
$$\frac{216991}{23001},\ \frac{500001}{53000},\ \ldots$$

En prenant pour x_n successivement les valeurs des cinq réduits initiaux, on trouve pour x_{n+1}

$$\frac{85}{9},\ \frac{717}{76},\ \frac{8717}{924},\ \frac{47085}{4991},\ \frac{500001}{53000}.$$

Le cinquième nombre est, conformément à la proposition (I), égal au neuvième réduit. Cependant, aucun des nombres précédents n'est pas un réduit. Ceci montre que, pour les périodes impaires, le résultat fourni par la proposition (I) ne peut être amélioré généralement. Pour le voir, on pourrait aussi prendre $\sqrt{41}$ au lieu de $\sqrt{89}$.

4. Nous donnerons maintenant la démonstration de la proposition (I).

Posons

$$\sqrt{c}=a(a_1,\ldots,a_q,2a) \qquad (q=p-1)$$

et

$$f(x)=a+\frac{1|}{|a_1}+\ldots+\frac{1|}{|a_q}+\frac{1|}{|x}=\frac{A_qx+A_{q-1}}{B_qx+B_{q-1}},$$

où généralement A_i et B_i sont le numérateur et le dénominateur du $i^{\text{ième}}$ réduit de $\sqrt{c}$. On a alors

$$c=f(a+\sqrt{c})=\frac{A_q(a+\sqrt{c})+A_{q-1}}{B_q(a+\sqrt{c})+B_{q-1}}.$$

Cette égalité équivaut algébriquement à la suivante

$$B_qc+(aB_q+B_{q-1}-A_q)\sqrt{c}=aA_q+A_{q-1}.$$

Comme c est naturel et $\sqrt{c}$ irrationnel, on en tire

(3) $$A_q=aB_q+B_{q-1}$$

et

(4) $$c=\frac{aA_q+A_{q+1}}{B_q}.$$

On a ensuite

$$\frac{A_{2q+1}}{B_{2q+1}}=f\left(a+\frac{A_q}{B_q}\right)=\frac{A_q^2+B_q(aA_q+A_{q-1})}{B_q(A_q+aB_q+B_{q-1})}$$

et, en vertu de (3),

(5) $$\frac{A_{2q+1}}{B_{2q+1}}=\frac{A_q^2+B_q(aA_q+A_{q-1})}{2A_qB_q}.$$

D'autre part, on a, en vertu de (4),

(6) $$\frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{B_q}+c\frac{B_q}{A_q}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{B_q}+\frac{aA_q+A_{q+1}}{A_q}\right)=\frac{A_q^2B_q(aA_q+A_{q+1})}{2A_qB_q}.$$

En comparant (5) et (6), il vient, pour $q=p-1$,

$$\frac{A_{2p-1}}{B_{2p-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}}+c\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}\right),$$

ce qui prouve la proposition (I).

5. Passons maintenant à la démonstration de la proposition (II).

On sait que la période de toute fraction continue de $\sqrt{c}$ est symétrique, abstraction faite du dernier terme. Si cette période est *paire*, on peut donc écrire

$$\sqrt{c}=a(a_1,\ldots,a_q,b,a_q,\ldots,a_1,2a) \qquad (q=k-1).$$

Posons

$$f(x)=a+\frac{1|}{|a_1}+\ldots+\frac{1|}{|a_q}+\frac{1|}{|b}+x=\frac{A_{q+1}+A_qx}{B_{q+1}+B_qx}$$

et

$$g(x)=\frac{1|}{|a_q}+\ldots+\frac{1|}{|a_1}+x=\frac{B_{q-1}+(A_{q-1}-aB_{q-1})x}{B_q+(A_q-aB_q)x},$$

où A_i et B_i désignent généralement le numérateur et le dénominateur du $i^{\text{ième}}$ réduit du développement de $\sqrt{c}$.

On a

$$\sqrt{c}=f\left[g\left(\frac{1}{a+\sqrt{c}}\right)\right]=\frac{A_{q+1}(B_q\sqrt{c}+A_q)+A_q(B_{q-1}\sqrt{c}+A_{q-1})}{B_{q+1}(B_q\sqrt{c}+A_q)+B_q(B_{q-1}\sqrt{c}+A_{q-1})}.$$

Cette égalité est algébriquement équivalente à la suivante

$$B_q(B_{q+1}+B_{q-1})c+(B_{q+1}A_q-A_{q+1}B_q+B_qA_{q-1}-A_qB_{q-1})\sqrt{c}$$
$$=A_q(A_{q+1}+A_{q-1}).$$

Le coefficient de $\sqrt{c}$ est nul, il vient donc

(7) $$c=\frac{A_q(A_{q+1}+A_{q-1})}{B_q(B_{q+1}+B_{q-1})}.$$

On a ensuite

(8) $$\frac{A_{2q+1}}{B_{2q+1}}=f[g(0)]=\frac{A_{q+1}B_q+A_qB_{q-1}}{B_q(B_{q+1}+B_{q-1})}.$$

D'autre part, on tire de (7)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{B_q}+c\frac{B_q}{A_q}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{B_q}+\frac{A_{q+1}+A_{q-1}}{B_{q+1}+B_{q-1}}\right)$$
$$=\frac{A_{q+1}B_q+A_qB_{q-1}+A_qB_{q+1}+A_{q-1}B_q}{2B_q(B_{q+1}-B_{q-1})};$$

on a

$$A_qB_{q+1}+A_{q-1}B_q=A_{q+1}B_q+A_qB_{q-1}+(A_qB_{q+1}-A_{q+1}B_q+A_{q-1}B_q-A_qB_{q-1})$$
$$=A_{q+1}B_q+A_qB_{q-1}+0,$$

donc

(9) $$\frac{1}{2}\left(\frac{A_q}{B_q}+c\frac{B_q}{A_q}\right)=\frac{A_{q+1}B_q+A_qB_{q-1}}{B_q(B_{q+1}+B_{q-1})}.$$

En comparant (8) et (9), il vient, pour $q=k-1$,

$$\frac{A_{2k-1}}{B_{2k-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+c\frac{B_{k-1}}{A_{k-1}}\right).$$

Cela prouve que le $(k-1)^{\text{ième}}$ réduit de $\sqrt{c}$, substitué au lieu de x_n dans la formule (1) donne pour x_{n+1} le $(2k-1)^{\text{ième}}$ réduit de $\sqrt{c}$. D'après la proposition (I), les itérations postérieures donneront toujours un réduit de $\sqrt{c}$.

6. Considérons encore le développement du nombre $\sqrt{13}$:

$$3(1,1,1,1,6);$$

la période est ici impaire. Les réduits initiaux sont

$$3,\ 4,\ \frac{7}{2},\ \frac{11}{3},\ \frac{18}{5},\ \frac{119}{33},\ \frac{137}{38},\ \frac{256}{71},\ \frac{393}{109},\ \frac{649}{180},\ \frac{4287}{1189},\ \frac{4936}{1369},\ \frac{9223}{2558},\ \frac{14159}{3927},\ldots$$

En prenant pour x_n successivement les valeurs des cinq réduits initiaux, on trouve pour x_{n+1}, moyennant (1),

$$\frac{11}{3},\ \frac{35}{8},\ \frac{101}{28},\ \frac{119}{33},\ \frac{649}{180},\ \frac{14159}{3927}.$$

D'après la proposition (I), le quatrième des réduits, c'est-à-dire le nombre $18/5$ reproduit, moyennant (1), un réduit de $\sqrt{13}$. Or, on voit que les réduits antérieurs 3 et $11/3$, ainsi que $119/33$, reproduisent encore des réduits. Il serait peut-être intéressant de trouver des règles générales qui permettraient d'indiquer tous les réduits jouissant de telles propriétés.

On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients

by J. Čermák (Brno)

1. In 1889 appeared a paper of E. Weyr, *O theorii forem bilinearných* [1]. It contains an original theory of matrices and its applications in different branches of mathematics.

Using Weyr's theory I shall present here a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients. I shall show that general solution of the above mentioned system is given and — what is especially remarkable — can be expressed by explicit formulas, if a reduced normal system of vectors, relative to the matrix of coefficients of the system is known. The reduced normal system of vectors is a slightly modified concept of the normal system of vectors of Weyr's theory.

I want to point out here that complete solutions of the above mentioned system were given in course of time by many mathematicians. Particularly neat were those of L. Stickelberger [2], O. Perron [3] and J. Kaucký [4]. O. Perron also obtained explicit formulas for solution; of course his method is quite different from mine.

The idea of the method presented here is due to O. Borůvka, who has derived in a similar way the general solution (hitherto not published) of homogeneous systems of linear differential equations with constant coefficients. It may be mentioned that independently of him, in a somewhat different manner but also starting from a theorem of Weyr's theory, M. Kumorovitz has given the general solution of the same system of differential equations [5].

It was J. Kaucký who called my attention to the difference equations.

2. Let A be a square matrix[1]) with elements in the field of complex numbers and a one of its characteristic roots. Then zero is the characte-

[1]) Square matrices of order n will be denoted by capital Latin characters, vectors in n-dimensional vector space by small Gothic or bold face type Latin characters with possible superscripts and identified with one-column matrices. E is unit-matrix. The determinant of A will be written $|A|$.