3° m n'est pas puissance d'un nombre premier. Comme m est un nombre composé, on peut donc développer m en facteurs premiers $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, où $k \geqslant 2, p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, et où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des nombres naturels. Posons $a = m/p_1$ et $b = m/p_2$. On aura $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ et $b \not\equiv 0 \pmod{m}$. Soit (1) un polynôme aux coefficients entiers et supposons que $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod{m}$. On a donc $p_2 f(b) - p_1 f(a) \equiv 0 \pmod{m}$. On trouve sans peine $p_1 a^l \equiv p_2 b^l \equiv 0 \pmod{m}$ pour l naturels, d'où il résulte que $p_1 f(a) \equiv p_1 a_n \pmod{m}$ et $p_2 f(b) \equiv p_2 a_n \pmod{m}$. On a donc $(p_2 - p_1) a_n \equiv 0 \pmod{m}$, c'est-à-dire $m | (p_2 - p_1) a_n$. Or, p_1 et p_2 étant deux facteurs premiers les plus petits du nombre m, les nombres m et $p_2 - p_1$ sont premiers entre eux, et on trouve $m | a_n$, donc $f(0) = a_n \equiv 0 \pmod{m}$.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

En voici maintenant un corollaire immédiat:

COROLLAIRE. *Si m est un module composé $\neq 4$, il existe un polynôme de degré 2, $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$, aux coefficients entiers, tel que la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ ait plus que deux racines.*

En effet, pour obtenir le polynôme $f(x)$ qui satisfasse au corollaire, il suffit de poser $f(x) = (x-a)(x-b)$, où a et b sont des entiers satisfaisant au théorème. D'après ce dernier, la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ aura au moins trois racines distinctes: a, b et 0.

Ici encore le nombre composé 4 est exceptionnel. En effet, on démontre sans peine que si (1) est un polynôme aux coefficients entiers tels que a_0 et 4 sont des nombres premiers entre eux, la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{4}$ ne peut avoir plus que n racines[1]).

Il en résulte que 4 est le seul nombre composé auquel peut être étendu le théorème de Lagrange, d'après lequel, m étant un nombre premier, n un nombre naturel et (1) un polynôme aux coefficients entiers où $(a_0, m) = 1$, la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ a au plus n racines.

---

[1]) Voir mon livre, *Teoria liczb* (en polonais), 3me édition, Warszawa-Wrocław 1950, p. 180-181.

Sur quelques propriétés des courbes planes

par S. GOŁĄB (Kraków)

Introduction

On connaît bien, depuis les temps d'Archimède, la propriété des arcs paraboliques disant que si $\widetilde{AB}$ est un arc arbitraire d'une parabole quelconque (de deuxième ordre) et $\overline{AB}$ est la corde joignant les points extrêmes A, B de l'arc, alors si l'on désigne par p la surface du segment parabolique limité par l'arc $\widetilde{AB}$ et la corde $\overline{AB}$ et par P la surface du rectangle de base $\overline{AB}$, circonscrit à ce segment parabolique, on a

$$\frac{p}{P} = \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Il est facile de montrer que si un arc convexe est tel que pour chaque couple de ses points A, B le rapport de la surface de la lentille, limitée par la corde $\overline{AB}$ et l'arc $\widetilde{AB}$, à la surface du rectangle de base $\overline{AB}$, circonscrit à cette lentille, est une grandeur constante, cette constante doit être égale à $2/3$ et l'arc doit faire partie d'une parabole.

On peut poser le problème suivant: soit $\widetilde{AB}$ l'arc d'une courbe arbitraire plane convexe Γ et $\overline{AB}$ — la corde joignant les points extrêmes A, B. Désignons par L la lentille limitée par l'arc $\widetilde{AB}$ et la corde $\overline{AB}$. Désignons encore par R le rectangle de base $\overline{AB}$ circonscrit à la lentille L (le côté parallèle à $\overline{AB}$ est tangent à l'arc $\widetilde{AB}$). Désignons enfin par p et P respectivement les mésures superficielles des domaines L et R

$$p = m(L), \qquad P = m(R). \tag{2}$$

Demandons quand le rapport p/P est voisin du nombre $2/3$ en supposant que le diamètre de la lentille soit assez grand en comparaison avec sa largeur, c'est-à-dire que la hauteur du rectangle soit petite en comparaison avec sa base. Il est évident que le rapport p/P sera un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{p}{P} \leqslant 1. \tag{3}$$

La réponse à cette question est précisement le but de la présente note où nous donnons une suite de propositions se rapportant à ce sujet.

Dès le début le problème a été „localisé“ dans le sens que, pour un arc donné d'une courbe plane, on considère séparément le faisceau de droites qui sont cordes des lentilles correspondantes. Ces faisceaux peuvent être „impropres“ (cordes parallèles à une direction donnée, tendant à un point déterminé C situé à l'intérieur des arcs $\widetilde{AB}$) ou bien „propres“ de sommet A, le point B tendant vers A. Le premier de ces problèmes se trouva plus simple et plus facile que le deuxième (aussi bien du point de vue des suppositions que des résultats obtenus et des méthodes de démonstration).

La proposition qui suit donne un résultat de caractère intégral. Elle exige cependant, des suppositions allant plus loin sur la régularité de l'arc Γ.

Comme il l'était à prévoir, on peut répondre positivement à la question posée plus haut dans le cas où la courbure de l'arc Γ est de signe constant[1]). La proposition cesse d'être vraie si l'arc possède des points singuliers de courbure nulle ou infinie. Même dans ces cas j'ai obtenu des résultats. Le rapport p/P n'est pas alors voisin de $2/3$. Le fait intéressant à noter est qu'alors le rapport p/P se rapproche d'un nombre plus grand que $2/3$ ou plus petit que $2/3$ suivant que le point singulier situé à l'intérieur de $\widetilde{AB}$ possède la courbure nulle resp. infinie. Ce sera l'inverse si le point singulier est à l'extrémité de cet arc.

Les résultats obtenus dans cette note peuvent servir également à des buts pratiques. On peut les appliquer notamment, à une nouvelle méthode de quadrature approchée à l'aide de trapèzes qui sera beaucoup plus exacte que la methode classique[2]).

Je consacrerai un travail spécial à l'étude du dégré d'exactitude de cette méthode de quadrature approchée.

Ce cycle de problèmes peut être généralisé dans un certain sens dans le cas des arcs de courbes gauches, quoiqu'il est difficile de définir pour ces arcs les rectangles circonscrits aux lentilles. Pareillement, on peut généraliser le problème en posant des questions analogues sur les surfaces convexes. Ceci sera le sujet de publications à part.

---

[1]) Un problème analogue concernant le rapport de la surface de la lentille à la surface du triangle, dont un côté est la corde $\overline{AB}$ et les deux autres sont des segments des tangentes menées à Γ aux points A, B, a été traité par Völler (1858) et Schlömilch (1859). Voir p. ex. [1], p. 12.

[2]) Voir [2].

Notations et suppositions

Soit un arc Γ de la courbe donnée par l'équation

$$y=f(x), \tag{4}$$

où la fonction $f(x)$ est déterminée dans un certain voisinage du point $x=0$. Supposons que la fonction $f(x)$ et sa derivée s'annulent au point $x=0$:

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=0. \tag{5}$$

Ces suppositions reviennent au choix d'un système spécial de coordonnées et ne restreignent pas la généralité du raisonnement. Nous appellerons ces suppositions hypothèse H_0.

Nous dirons que l'arc Γ satisfait à la supposition H_1 dans le voisinage du point $O(0,0)$ si la fonction $f(x)$ est décroissante dans un voisinage à gauche du point zéro et croissante dans un voisinage à droite de ce point.

Nous dirons que l'arc Γ satisfait à la supposition H_2 dans un voisinage à droite du point $O(0,0)$ si $f(x)$ est croissante et si, en tout point B de l'arc Γ de ce voisinage, cet arc ne possède, sans compter ce point et le point O, aucun autre point commun avec le segment OB.

Nous dirons que l'arc Γ satisfait à la supposition C_k si la fonction $f(x)$ possède dans un voisinage à droite du point zéro une dérivée continue d'ordre k $(k\geqslant 1)$.

Proposition 1. *Supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse aux suppositions H_0 et H_1 et qu'elle soit infiniment petite d'ordre a $(a\geqslant 1)$. Soit δ un nombre positif suffisamment petit. Désignons par L la lentille limitée d'en haut par la droite $y=\delta$ et d'en bas par l'arc de la courbe Γ. Soit R le rectangle circonscrit à cette lentille. Dans ce cas, on a la relation*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{a}{a+1}. \tag{6}$$

De la supposition (5) résulte que l'on doit avoir

$$a>1. \tag{7}$$

Il est chose évidente qu'il suffit de démontrer la relation

$$\lim\frac{m(L^*)}{m(R^*)}=\frac{a}{a+1} \tag{8}$$

où L^* et R^* font partie respectivement de L et R pour $x\geqslant 0$. Désignons par B le point (seul et unique à cause de l'hypothèse H_1) où la droite

$y=\delta$ coupe la partie à droite de l'arc Γ et soit h l'abscisse du point B. Il s'ensuit de nos suppositions que

$$m(L^*)=m(R^*)-\int_0^h f(x)\,dx. \tag{9}$$

Si la fonction $f(x)$ est infiniment petite d'ordre a, on a la relation (pour $x\geqslant 0$):

$$f(x)=x^a\big(g+\varepsilon(x)\big), \tag{10}$$

où

$$\lim \varepsilon(x)=0, \tag{11}$$

le nombre g étant différent de zéro. A cause de la supposition $\mathbf{H}_1$, on a

$$g>0. \tag{12}$$

L'intégrale du deuxième membre de la relation (9) sera calculée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,dx=\int_0^h [x^a g+x^a\varepsilon(x)]\,dx &=\frac{g}{a+1}\,h^{a+1}+h(\vartheta h)^a\varepsilon(\vartheta h)\\ &=h^{a+1}\left\{\frac{g}{a+1}+\vartheta^a\varepsilon(\vartheta h)\right\},\end{aligned} \tag{13}$$

où ϑ est une grandeur (dépendant de h) vérifiant les inégalités

$$0<\vartheta<1. \tag{14}$$

Des inégalités (7) et (14) et de la relation (11) découle que

$$\lim_{h\to 0} \vartheta^a\varepsilon(\vartheta h)=0. \tag{15}$$

On a ensuite:

$$m(R^*)=hf(h)=h^{a+1}[g+\varepsilon(h)]. \tag{16}$$

Des relations (9), (13) et (16) on a finalement

$$\frac{m(L^*)}{m(R^*)}=1-\frac{\dfrac{g}{a+1}+\vartheta^a\varepsilon(\vartheta h)}{g+\varepsilon(h)} \tag{17}$$

d'où, à cause de (11), (12), (15), résulte la relation (8) lorsque $\delta\to 0$ ce qui entraîne que $h\to 0$. Notre proposition est ainsi démontrée.

De cette proposition on déduit comme conséquence immédiate la

Proposition 2. *Si la fonction $f(x)$ possède au point $x=0$ la courbure (au sens classique) différente de zéro, alors (en employant les mêmes notations qu'avant)*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{2}{3}. \tag{18}$$

En effet, l'existence de la deuxième dérivée $f''(0)$ différente de zéro entraîne comme conséquence l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ et le fait que $f(x)$ est un infiniment petit de deuxième ordre; pour $a=2$, on obtient de la relation (6) la relation (18).

Remarque. Si l'arc Γ possède au point O la courbure égale à zero, on a alors

$$a>2 \tag{19}$$

et la limite du rapport p/P est, comme on le voit de (6), supérieure à $2/3$ et s'approche de l'unité pour $a\to\infty$. On peut donner un l'exemple d'une telle fonction convexe pour laquelle la limite du rapport p/P soit égale à l'unité. Il suffit de poser

$$f(x)=e^{-1/x^2} \qquad \big(f(0)=0\big). \tag{20}$$

Envisageons le rapport

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{\int_0^x e^{-1/u^2}\,du}{xe^{-1/x^2}}.$$

On a

$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x^2}+\dfrac{2}{x^2}\,e^{-1/x^2}}=\frac{x^2}{2+x^2}\to 0$$

quand $x\to 0$. Donc $F(x)/G(x)\to 0$, c'est-à-dire $p/P\to 1$. Cette fonction est cependant un infiniment petit d'ordre infini.

Si, par contre, on a

$$1<a<2, \tag{21}$$

la courbe Γ aura au point O une courbure infinie et la limite du rapport p/P sera un nombre inférieur à $2/3$ qui tendra vers $1/2$ quand $a\to 1$.

Proposition 3. *Supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse aux suppositions $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_2$ ainsi que C_1. Supposons de plus que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre a et $f'(x)$ — un infiniment petit d'ordre $a-1$. Désignons par*

h un nombre positif suffisamment petit et par L la lentille limitée par la corde OB et l'arc de la courbe Γ, où B est le point de la courbe d'abscisse h; R désigne comme avant le rectangle circonscrit à la lentille L.

Ces suppositions faites, on a la relation suivante:

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}}{2(\alpha+1)}. \tag{22}$$

Démonstration. A cause de la supposition C_1 la fonction $\varepsilon(x)$ dans la formule (10) a la dérivée $\varepsilon'(x)$ pour $x>0$. En différentiant les deux membres de cette relation, on a:

$$f'(x)=\alpha g x^{\alpha-1}+\alpha x^{\alpha-1}\varepsilon(x)+x^{\alpha}\varepsilon'(x).$$

En divisant cette relation par $x^{\alpha-1}$, on a

$$\frac{f'(x)}{x^{\alpha-1}}=\alpha g+\alpha\varepsilon(x)+x\varepsilon'(x). \tag{23}$$

De la supposition que $f'(x)$ soit un infiniment petit d'ordre $\alpha-1$ résulte que le rapport $f'(x)/x^{\alpha-1}$ a, si $x\to 0$, une limite différente de zéro. De là, puisque $\alpha\varepsilon(x)\to 0$, on conclut que le produit $x\varepsilon'(x)$ doit avoir une limite

$$\lim_{x\to 0} x\,\varepsilon'(x)=\beta. \tag{24}$$

On voit de (24) que le produit $x\,\varepsilon'(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle fermé $[0,x]$; on doit donc avoir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x u\,\varepsilon'(u)\,du=\beta. \tag{25}$$

En intégrant par parties, on a

$$\int_0^x u\,\varepsilon'(u)\,du=[u\,\varepsilon(u)]_0^x-\int_0^x\varepsilon(u)\,du=x\,\varepsilon(x)-x\,\varepsilon(\vartheta x),\qquad \text{où}\quad 0<\vartheta<1.$$

Donc

$$\frac{1}{x}\int_0^x u\,\varepsilon'(u)\,du=\varepsilon(x)-\varepsilon(\vartheta x). \tag{26}$$

Mais

$$\lim_{x\to 0}[\varepsilon(x)-\varepsilon(\vartheta x)]=0.$$

Donc, à cause de (25) et (26),

$$\beta=0. \tag{27}$$

Si l'on pose alors

$$\eta(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\alpha\,\varepsilon(x)+x\varepsilon'(x) \tag{28}$$

on peut écrire

$$f'(x)=x^{\alpha-1}[\alpha g+\eta(x)], \tag{29}$$

où

$$\lim_{x\to 0}\eta(x)=0. \tag{30}$$

Calculons maintenant $m(L)$. On a

$$m(L)=\frac{1}{2}hf(h)-\int_0^h f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}h^{\alpha+1}[g+\varepsilon(h)]-\frac{g}{\alpha+1}h^{\alpha+1}-h(\vartheta h)^{\alpha}\varepsilon(\vartheta h) \tag{31}$$

$$=h^{\alpha+1}\left\{\frac{g}{2}-\frac{g}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\varepsilon(h)-\vartheta^{\alpha}\varepsilon(\vartheta h)\right\}.$$

Le calcul de $m(R)$ donnera un peu plus d'embarras. Désignons par c la longueur de la corde $\overline{OB}$ et par d la hauteur du rectangle R. Supposons que M désigne le point de Γ où le côté du rectangle R, parallèle à la corde OB, est tangent à Γ. Le point M aura pour abscisse Θh, où

$$0<\Theta<1. \tag{32}$$

On a, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$f'(\Theta h)=\frac{f(h)-f(0)}{h}=h^{\alpha-1}[g+\varepsilon(h)]. \tag{33}$$

En substituant $x=\Theta h$ dans (29), on obtient

$$f'(\Theta h)=\Theta^{\alpha-1}h^{\alpha-1}[\alpha g+\eta(\Theta h)]. \tag{34}$$

La comparaison des formules (33) et (34) donne

$$\Theta^{\alpha-1}[\alpha g+\eta(\Theta h)]=g+\varepsilon(h). \tag{35}$$

En divisant par la somme $\alpha g+\eta(\Theta h)$ qui, pour les h suffisamment petits, est une grandeur positive, on a

$$\Theta^{\alpha-1}=\frac{g+\varepsilon(h)}{\alpha g+\eta(\Theta h)}. \tag{36}$$

On voit de cette relation que si $h\to 0$, la valeur de Θ a la limite suivante:

(37) $$\lim_{h\to 0}\Theta=\frac{1}{a^{1/(a-1)}}.$$

Cette relation est intéressante en elle-même et elle est, il me semble, inconnue. Même dans le cas particulier de $a=2$ cette relation ne résulte pas de la proposition classique, puisqu'elle suppose la continuité de la deuxième dérivée pour $x=0$ [3]).

Revenons au calcul de $m(R)$. On a

(38) $$c=\sqrt{h^2+f^2(h)}.$$

La grandeur d est la distance du point $M\big(\Theta h, f(\Theta h)\big)$ de la droite OB dont l'équation est

(39) $$f(h)x-hy=0.$$

On a donc

$$d=\frac{|f(h)\Theta h-hf(\Theta h)|}{\sqrt{f^2(h)+h^2}}=\frac{|\Theta hf(h)-hf(\Theta h)|}{c}.$$

On tire de là

(40) $$m(R)=cd=|\Theta hf(h)-hf(\Theta h)|.$$

On peut se libérer du signe de la valeur absolue dans le deuxième membre de la formule (40). L'arc $\widetilde{OB}$ de la courbe Γ est situé tout entier au dessous de la droite (39), c'est-à-dire du même côté que le point $(h,0)$ pour lequel le premier membre de l'équation (39) a la valeur positive $f(h)h$. Il résulte de là que

(41) $$m(R)=h\big\{\Theta f(h)-f(\Theta h)\big\}.$$

En tenant compte de (10) dans la formule (41), on a

(42) $$m(R)=h^{a+1}\big\{\Theta[g+\varepsilon(h)]-\Theta^a[g+\varepsilon(\Theta h)]\big\}.$$

Les formules (31) et (42) donnent

(43) $$\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{\dfrac{g}{2}-\dfrac{g}{a+1}+\dfrac{1}{2}\varepsilon(h)-\vartheta^a\varepsilon(\vartheta h)}{g(\Theta-\Theta^a)+\Theta\varepsilon(h)-\Theta^a\varepsilon(\Theta h)}.$$

[3]) Cf. p. ex. [3], p. 265, Exercise 12. Il faut remarquer que dans l'énoncé du théorème il manque une supposition essentielle notamment que $f^{n+1}(x)$ soit différente de zéro.

Les expressions

$$\frac{1}{2}\varepsilon(h),\qquad \vartheta^a\varepsilon(\vartheta h),\qquad \Theta\varepsilon(h),\qquad \Theta^a\varepsilon(\Theta h)$$

tendent vers zéro si $h\to 0$. Il s'ensuit, à cause de (37), que

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a+1}}{\dfrac{1}{a^{1/(a-1)}}-\dfrac{1}{a^{a/(a-1)}}}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a+1}}{a^{1/(1-a)}-a^{a/(1-a)}}$$

$$=\frac{\dfrac{a-1}{2(a+1)}}{a^{1/(1-a)}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)}=\frac{a}{2(a+1)}\cdot\frac{1}{a^{1/(1-a)}}=\frac{a}{2(a+1)}a^{1/(a-1)}$$

$$=\frac{1}{2(a+1)}a^{a/(a-1)},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

De cette proposition vient comme corollaire la proposition suivante:

Proposition 4. *Si la fonction $f(x)$ est de classe C_1 et possède au point $x=0$ la courbure (au sens classique) différente de zéro, alors*

(44) $$\lim_{h\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{2}{3}.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $f''(0)=k>0$. Dans ce cas on peut écrire:

$$f(x)=x^2\left(\frac{k}{2}+\varepsilon(x)\right).$$

On tire de là

$$f'(x)=kx+2x\varepsilon(x)+x^2\varepsilon'(x).$$

Puisque $f'(0)=0$, on a

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

ou

$$k+2\varepsilon(x)+x\varepsilon'(x)\to k.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x\to 0}x\varepsilon'(x)=0.$$

On peut donc écrire

$$f'(x)=x[k+\eta(x)],$$

où

$$\eta(x)=2\varepsilon(x)+x\varepsilon'(x)\to 0 \quad \text{si} \quad x\to 0.$$

La dérivée $f'(x)$ est donc un infiniment petit du premier ordre. Les suppositions de la proposition 3 étant ainsi satisfaites, on en conclut que

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(L)}{m(R)}=\frac{1}{6}2^2=\frac{2}{3}.$$

Remarque. On peut aussi démontrer réciproquement que, si $f(x)$ est un infiniment petit du deuxième ordre et $f'(x)$ est du premier ordre, la deuxième dérivée $f''(0)$ existe.

Etudions l'allure de la fonction

$$\varphi(a)=\frac{a^{a/(a-1)}}{2(a+1)} \tag{45}$$

quand la variable a varie de 1 à ∞.

On a

$$\varphi'(a)=\frac{a^{a/(a-1)}}{2(a^2-1)^2}\{2(a-1)-(a+1)\ln a\}. \tag{46}$$

En désignant par

$$r(a)=\ln a-\frac{2(a-1)}{a+1},$$

on constate que

$$r'(a)=\frac{1}{a}-\frac{4}{(a+1)^2}>0 \quad \text{pour} \quad a\neq\pm 1,$$

c'est-à-dire que la fonction $r(a)$ est croissante pour les $a>1$. Puisque $r(1)=0$, on a

$$r(a)>0 \quad \text{pour} \quad a>1$$

et par conséquent

$$\varphi'(a)<0 \quad \text{pour} \quad a>1,$$

ce qui prove que la fonction $\varphi(a)$ est décroissante pour $a>1$. Si $a\to 1$, alors

$$a^{a/(a-1)}\to e$$

et, par conséquent,

$$\lim_{a\to 1}\varphi(a)=\frac{e}{4}\approx 0,679\,57\ldots \tag{47}$$

Si, par contre, $a\to\infty$, alors

$$\varphi(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+1}\cdot a^{1/(a-1)}\to\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

On voit que

$$\lim_{a\to\infty}\varphi(a)=\frac{1}{2}. \tag{48}$$

La fonction $\varphi(a)$ est donc décroissante à l'encontre de la fonction $\psi(a)=a/(a+1)$ qui est la limite du quotient p/P de la proposition 1 et qui est fonction croissante. Tandis que la fonction ψ prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $(1/2,1)$, la fonction $\varphi(a)$ ne prend que les valeurs de l'intervalle ouvert $(1/2,e/4)$. Pour $a=2$ (et uniquement pour cette valeur) les deux fonctions prennent la valeur commune égale à $2/3$.

Proposition 5. *Les notations et les supposition étant les mêmes que dans la proposition 2, désignons par B' la projection du point B sur la tangente à Γ au point O, c'est-à-dire sur l'axe x, et par C le point du segment BB' tel que l'on ait*

$$(a+1)\overline{BC}=(a-1)\overline{CB}'. \tag{49}$$

Désignons encore par T la triangle OBC. Nous pouvons affirmer qu'a lieu la relation

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(L)}{m(T)}=1. \tag{50}$$

Démonstration. De la définition même du triangle T découle que

$$m(T)=\frac{1}{2}h\frac{a-1}{a+1}f(h)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-1}{a+1}h^{a+1}\{g+\varepsilon(h)\}. \tag{51}$$

En appliquant (31) et (51), on obtient

$$\frac{m(L)}{m(T)}=\frac{\dfrac{g}{2}-\dfrac{g}{a+1}+\dfrac{1}{2}\varepsilon(h)-\vartheta^a\varepsilon(\vartheta h)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a-1}{a+1}\big(g+\varepsilon(h)\big)}. \tag{52}$$

La formule (50) résulte directement de la relation (52).

Dans le cas où le point O n'est pas singulier, c'est-à-dire quand $a=2$, le point C sur le segment BB' doit être choisi de manière qu'il se trouve distant de B de $1/3$ et de B' de $2/3$ du segment entier $\overline{BB}'$.

Cette proposition sera utilisée pour une nouvelle méthode de quadrature approchée à l'aide de trapèzes.

Les propositions que nous avons données plus haut avaient un caractère local dans le sens que le point O était fixé et les points A, B, voire B seul, s'approchaient du point O tout en restant sur l'arc de la courbe Γ. Nous allons maintenant énoncer une proposition ayant un caractère intégral. Elle exigera toutefois des suppositions allant plus loin.

Proposition 6. *Si la fonction $f(x)$ possède dans l'intervalle fermé $[a,b]$ la deuxième dérivée $f''(x)$ de signe constant et la troisième dérivée bornée, dans ce cas (la courbe $y=f(x)$ étant convexe), si l'on désigne par $L(x',x'')$ la lentille limitée par l'arc de la courbe $y=f(x)$ et la corde passant par les points $(x',f(x')),(x'',f(x''))$ et par $R(x',x'')$ le rectangle circonscrit à la lentille $L(x',x'')$, on pourra déterminer pour tout $\varepsilon>0$ un nombre $\delta>0$ tel que si*

$$|x'-x''|<\delta, \tag{53}$$

on aura

$$\left|\frac{m[L(x',x'')]}{m[R(x',x'')]}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon. \tag{54}$$

Démonstration. Supposons pour la démonstration par l'absurde que la thèse de la proposition ne soit pas vraie. Dans ce cas il y aurait deux suites de nombres x_n et h_n, où $h_n>0$ et $h_n\to 0$, telles que la suite

$$\frac{m[L(x_n,x_n+h_n)]}{m[R(x_n,x_n+h_n)]} \tag{55}$$

ne tende pas vers la limite $2/3$.

Puisque la suite (55) est bornée par les nombres $1/2$ et 1 et que x_n se trouve dans l'intervalle $[a,b]$, on peut choisir les suites x_n, h_n de manière que x_n tende vers une certaine valeur x_0 et que la suite (55) converge vers un nombre $g\neq 2/3$. On supposera dans la suite que les suites x_n et h_n ont été choisies comme il vient d'être dit. On peut même supposer sans restreindre la généralité du raisonnement que $x_0=0$ et que l'on ait pris pour l'axe des x la tangente au point $x=0$, ce qui revient à supposer que $f'(0)=0$. Enfin on peut supposer sans faire tort à la généralité que $f''(x)>0$. Dans ce cas la courbe $y=f(x)$ sera située au dessus de l'axe des x en tournant sa concavité vers le haut. Il en résulte que

$$m[L(x,x+h)]=\frac{h}{2}[f(x)+f(x+h)]-\int_x^{x+h} f(u)\,du \qquad (h>0). \tag{56}$$

En désignant dans ce qui suit par c la longueur de la corde de la lentille L et par d la hauteur du rectangle R, on a en premier lieu

$$c=\sqrt{h^2+[f(x+h)-f(x)]^2} \tag{57}$$

et en second lieu

$$d=\frac{\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}(x+\Theta h-x)-f(x+\Theta h)+f(x)\right|}{\sqrt{1+\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]^2}}, \tag{58}$$

où Θ est une grandeur vérifiant l'inégalité

$$0<\Theta<1 \tag{59}$$

et déterminée sans ambiguïté par l'équation

$$f'(x+\Theta h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{60}$$

Puisque

$$m[R(x,x+h)]=cd, \tag{61}$$

on peut obtenir de (57) et (58) après certaines transformations, que

$$m[R(x,x+h)]=h\left|\Theta[f(x+h)-f(x)]-[f(x+\Theta h)-f(x)]\right|. \tag{62}$$

L'arc de la courbe $y=f(x)$ se trouvant au dessous de la corde, il s'ensuit qu'en supprimant le signe de la valeur absolue dans le second membre de la relation (62), on peut écrire

$$m[R(x,x+h)]=h\{-f(x+\Theta h)+f(x)+\Theta[f(x+h)-f(x)]\}. \tag{63}$$

Désignons, pour abréger,

$$\begin{aligned} A(x,h)&=m[L(x,x+h)],\\ B(x,h)&=m[R(x,x+h)]. \end{aligned} \tag{64}$$

Comme on le verra plus bas, les fonctions A et B sont des infiniment petits du troisième ordre par rapport à la variable h.

En vertu de nos suppositions la fonction A est triplement différentiable. On ne peut en dire autant de la fonction B à laquelle il faut appliquer une autre méthode.

De la formule (56), on tire au moyen de différentiations successives:

$$\frac{\partial A}{\partial h}=\frac{1}{2}[f(x)+f(x+h)]+\frac{h}{2}f'(x+h)-f(x+h)$$

$$=\frac{h}{2}f'(x+h)+\frac{1}{2}[f(x)-f(x+h)],$$

(65)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial h^2}=\frac{h}{2}f''(x+h)+\frac{1}{2}f'(x+h)-\frac{1}{2}f'(x+h)=\frac{h}{2}f''(x+h),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial h^3}=\frac{h}{2}f'''(x+h)+\frac{1}{2}f''(x+h).$$

De ces formules et de l'équation (56) il vient

$$A(x,0)=0,\qquad \frac{\partial A(x,0)}{\partial h}=0,\qquad \frac{\partial^2 A(x,0)}{\partial h^2}=0. \tag{66}$$

Les relations (66) donnent ensuite

$$A(x,h)=\frac{h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 A(x,\tilde{\Theta}h)}{\partial h^3}, \tag{67}$$

ce qui, à cause de (65), permet d'écrire

$$A(x,h)=\frac{h^3}{12}G(x,h), \tag{68}$$

où l'on a posé pour abréger

$$G(x,h)=f''(x+\tilde{\Theta}h)+\tilde{\Theta}hf'''(x+\tilde{\Theta}h). \tag{69}$$

La troisième dérivée f''' étant bornée et la deuxième dérivée f'' étant continue au point $x=0$, on tire de l'égalité (69) que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}} G(x,h)=f''(0). \tag{70}$$

Nous allons transformer maintenant l'expression $B(x,h)$ en appliquant deux fois le théorème de la valeur moyenne et en utilisant la propriété de continuité de la deuxième dérivée $f''(x)$.

$$\begin{aligned} B(x,h) &= h\{-f(x+\Theta h)+f(x)+\Theta[f(x+h)-f(x)]\}\\ &= h\{-\Theta hf'(x+\Theta_1\cdot\Theta h)+\Theta hf'(x+\Theta h)\}\\ &= h^2\Theta\{-f'(x+\Theta_1\cdot\Theta h)+f'(x+\Theta h)\}\\ &= h^2\Theta\cdot\Theta h(1-\Theta_1)\cdot f''\big(x+\Theta_2\cdot\Theta h(1-\Theta_1)\big)\\ &= h^3\Theta^2(1-\Theta_1)f''\big(x+(1-\Theta_1)\,\Theta_2\cdot\Theta h\big), \end{aligned} \tag{71}$$

où l'on a

$$\Theta_1(x,h)=\Theta\{x,\Theta(x,h)h\}. \tag{72}$$

Par contre nous ne savons rien de précis au sujet de la fonction $\Theta_2(x,h)$ si ce n'est que

$$0<\Theta_2(x,h)<1. \tag{73}$$

Nous affirmons maintenant que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}}\Theta(x,h)=\frac{1}{2}. \tag{74}$$

Pour un x fixe l'égalité (74) serait une conséquence particulière de la formule démontrée (37) pour $a=2$. Dans le cas général, il s'agit de la limite de la fonction $\Theta(x,h)$ si les deux variables x et h tendent vers zéro.

On peut écrire

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\bar{\Theta}_2h). \tag{75}$$

La comparaison avec le relation (60) donne

$$f'(x+\Theta h)-f'(x)=\frac{h}{2}f''(x+\bar{\Theta}_2h). \tag{76}$$

En appliquant au premier membre de (76) encore une fois le théorème de la valeur moyenne, on aura

$$\Theta h\cdot f''(x+\Theta_2\Theta h)=\frac{h}{2}f''(x+\bar{\Theta}_2h),$$

d'où, à cause de la supposition $f''(x)\neq 0$, il résulte

$$\Theta=\frac{f''(x+\bar{\Theta}_2h)}{2f''(x+\Theta_2\Theta h)}. \tag{77}$$

De là, vu la continuité de la deuxième dérivée, on obtient la relation (74).

De ce résultat et de la relation (72) découle que

(78) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}} \Theta_1(x,h)=\frac{1}{2},$$

puisque $\Theta(x,h)h\to 0$.

Si donc l'on pose

(79) $$g(x,h)\overset{\text{df}}{=}\Theta^2(1-\Theta_1)f''(x+(1-\Theta_1)\Theta_2\Theta h),$$

on aura

(80) $$B(x,h)=h^3g(x,h)$$

et, en vertu (74) et (78),

(81) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}} g(x,h)=\frac{1}{8}f''(0).$$

Les relations (68), (70), (80) et (81) donnent le résultat

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}}\frac{A(x,h)}{B(x,h)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

De là, en particulier,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m[L(x_n,h_n)]}{m[R(x_n,h_n)]}=\frac{2}{3},$$

ce qui est en contradiction avec ce qu'il a été établi plus haut. La démonstration de notre proposition est ainsi achevée.

Travaux cités

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Geometrie*, Berlin 1923.

[2] S. Gołąb, *Quelques propositions de la théorie des courbes planes et leures applications aux quadratures approchées*, Bull. Acad. Polon. Sc. (1951) Suppl. A 4, p. 349-358.

[3] G. H. Hardy, *A course of pure mathematics*, 4 ed., Cambridge 1925.

Sur la dérivée covariante des objets géométriques de deuxième classe

par S. Gołąb (Kraków)

On sait bien que l'on peut définir la notion de dérivée absolue (covariante) d'une quantité, c'est-à-dire d'un objet géométrique spécial de première classe (affineur et affineur-densité). Cette dérivée est un objet de même genre[1]), mais elle est construite au moyen d'un autre objet qui est de deuxième classe[2]). En généralisant cette construction, on peut se demander si l'on peut définir au moyen d'objets de troisième classe la dérivée covariante des objets de deuxième classe. Il est vrai que pour l'objet bien connu de deuxième classe, c'est-à-dire pour les paramètres de connexion linéaire, on peut définir un comitant différentiel, notamment l'affineur de courbure, mais on ne peut pas traiter cet affineur comme dérivée covariante de l'objet en question, parce que le genre de l'objet est tout à fait différent.

Le but de cette Note est de donner quelques contributions se rapportant à ce sujet. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour un objet différentiel pur de deuxième classe à une composante dans l'espace à une dimension je démontre que dans le cas d'un pseudogroupe[3]) général on ne peut pas définir la notion de dérivée covariante d'un objet si l'on postule en même temps que cette dérivée doit être un objet de deuxième classe. Il existe toutefois la possibilité de définir cette notion si l'on se borne à certains sous-groupes du pseudogroupe.

Soit un espace X_1 à une dimension et le pseudogroupe de transformations de la coordonnée ξ d'un point variable

(1) $$\bar{\xi}=\varphi(\xi),$$

où la fonction φ est de classe C_3 (l'existence des troisièmes derivées continues) et telle que

(2) $$\varphi'(\xi)\neq 0.$$

[1]) Voir [1], p. 85. L'expression "the same kind" (le même genre) veut dire que la règle de transformation des composantes est la même.

[2]) Voir [2].

[3]) Voir [2].