Publications citées

[1] S. Faedo, *Proprieta asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4) 26 (1947), p. 207-215.

[2] E. Levi, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Cl. Sci. Fis. Nat. (8) 8 (1950), p. 465-470, (8) 9 (1950), p. 26-31.

[3] T. Ważewski, *Sur le principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313.

[4] T. Ważewski, *Sur l'évaluation du nombre des paramètres éssentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe troisième 1 (1953), p. 3-5.

[5] В. А. Якубович, *Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений*, Доклады Академии наук С. С. С. Р. (Новая серия) 63 № 4 (1948), стр. 363-366.

[6] В. А. Якубович, *Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений*, Математический сборник (Новая серия) 28 (70), № 1 (1951), стр. 217-240.

[7] N. Levinson, *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations*, Duke Mathematical Journal 15 (1948), p. 111-126.

[8] T. Ważewski, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles tangentes aux hyperplans caractéristiques issues du point singulier*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 277-297.

[9] Z. Szmydt, *Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24, fasc. II (1951).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singulier

par Z. Mikołajska (Kraków)

§ 1. Introduction. Soit $\Phi(t)$ une intégrale du système

$$\frac{dz_i}{dt} = f^i(t, z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1.1}$$

dont les deuxièmes membres sont continus dans l'ensemble de points $(t, z_1, \ldots, z_n)$ pour lesquels

$$t \in (a,b), \qquad (z_1, \ldots, z_n) \in \Theta,$$

où Θ est un ensemble ouvert. Admettons l'unicité pour les intégrales de ce système.

Définition 1. Soit (α,β) le plus grand intervalle dans lequel $\Phi(t)$ existe. Nous disons que *l'intégrale $\Phi(t)$ atteint l'extrémité droite* de l'intervalle (a,b) lorsque $\beta=b$.

Soit Δ un intervalle partiel de (α,β). Nous désignons par

$$\Phi(\Delta) \tag{1.2}$$

l'ensemble des points $z=\Phi(t)$ correspondant aux valeurs $t \in \Delta$.

Les symboles $[\gamma,\delta]$, et (γ,δ) désignant respectivement les intervalles fermés et ouverts, les symboles $[\gamma,\delta)$, et $(\gamma,\delta]$ — respectivement les intervalles fermés du côté de γ et fermés du côté de δ, la signification de

$$\Phi([\gamma,\delta]), \qquad \Phi((\gamma,\delta)), \qquad \Phi([\gamma,\delta)), \qquad \Phi((\gamma,\delta]) \tag{1.3}$$

est évidente.

Définition 2. Soit

$$z_0 \in \Theta, \qquad \omega \subset \Theta \tag{1.4}$$

et supposons que $\Phi(t)$ atteine b. Nous disons que $\Phi(t)$ est *asymptotique relativement à l'ensemble* ω lorsqu'il existe un t_0, tel que

$$\Phi([t_0,b)) \subset \omega. \tag{1.5}$$

Définition 3. Nous disons que $\Phi(t)$ est *asymptotique relativement au point* z_0, lorsque $\Phi(t)$ atteint b et $\lim_{t\to b}\Phi(t)=z_0$.

Définition 4. Le point z_0 est dit *point asymptotiquement singulier fort*, lorsqu'il existe un voisinage ω de z_0 $(\omega\subset\overset{*}{\Theta})$ tel que l'ensemble des intégrales asymptotiques relativement à ω est non-vide et coïncide avec celui d'intégrales asymptotiques relativement à z_0.

Remarque 1. Dans le cas d'un système aux coefficients constants

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\qquad \frac{dy}{dt}=Ax+By\qquad (Ab-aB\neq 0) \tag{1.6}$$

le noeud et le col sont des points asymptotiquement singuliers forts, tandis que le centre ne l'est pas.

Aux notions ci-dessus se rattache le problème suivant:

Problème 1. *Indiquer les conditions suffisantes pour que z_0 soit un point asymptotiquement singulier fort et évaluer le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques relativement à z_0.*

Indiquer, en particulier, le cas où il existe une intégrale unique asymptotique relativement à z_0.

MM. P. Hartman et A. Wintner [1] ont indiqué une solution du problème dans le cas $n=1$, c'est-à-dire dans le cas où le système (1.1) se réduit à une seule équation (cf. § 15).

Une autre solution d'un caractère plus qualitatif a été indiquée par M. T. Ważewski [2]. C'est lui qui m'a suggéré l'idée de généraliser le théorème en question de MM. P. Hartman et A. Wintner au cas du système d'un nombre quelconque d'équations.

Le problème 1 peut être divisé en deux problèmes:

Problème 2. *En admettant que z_0 soit un point asymptotiquement singulier fort, indiquer les conditions suffisantes relatives au système* (1.1) *permettant d'évaluer le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques relativement à z_0.*

Problème 3. *Indiquer les conditions suffisantes pour qu'un point z_0 soit asymptotiquement singulier fort.*

Le théorème 1 du § 10 donne une solution du problème 2. Afin de mettre en évidence le caractère géométrique de ce théorème, bornons-nous au cas où z_0 coïncide avec l'origine des coordonnées de l'espace à n dimensions et introduisons le cône $C(p,q)$

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2=B\sum_{j=p+1}^{p+q} z_j^2\qquad (B>0) \tag{1.7}$$

où $p+q=n$. Abstraction faite de l'origine des coordonnées, ce cône partage l'espace en deux parties $D_1(p,q)$ et $D_2(p,q)$

$$\begin{aligned} &\textit{Partie } D_1(p,q): && 0<\sum_{i=1}^{p} z_i^2\leqslant B\sum_{j=p+1}^{n} z_j^2,\\ &\textit{Partie } D_2(p,q): && \sum_{i=1}^{p} z_i^2\geqslant B\sum_{j=p+1}^{p+q} z_j^2>0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Supposons que l'origine des coordonnées soit un point asymptotiquement singulier fort du système (1.1) et admettons que les intégrales du système (1.1) s'approchent du plan à p dimensions

$$z_{p+1}=0,\quad \ldots,\quad z_{p+q}=0 \tag{1.9}$$

lorsqu'elles passent par les points dans $D_1(p,q)$ et qu'elles s'éloignent du plan à q dimensions

$$z_1=0,\quad \ldots,\quad z_p=0 \tag{1.10}$$

lorsqu'elles passent par les points situés dans $D_2(p,q)$.

Cela posé, le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques relativement à l'origine sera au moins égale à q (cf. théorème 1 du § 10).

Pour démontrer ce théorème nous nous servirons d'une méthode topologique dûe à T. Ważewski [3].

Le théorème 2 du § 13 fournit une solution du problème 3.

L'hypothèse servant de base à ce théorème est qualitativement analogue à celle du théorème 1, mais elle est plus précise au point de vue quantitatif. Elle exprime que les intégrales passant par les points situés dans $D_1(p,q)$ ou $D_2(p,q)$ s'approchent ou s'éloignent suffisamment vite de l'hyperplan (1.9) ou (1.10).

Les plans (1.9) et (1.10) jouant des rôles différents dans l'énoncé de nos théorèmes, les rôles des variables

$$z_1,z_2,\ldots,z_p \tag{1.11}$$

et des variables

$$z_{p+1},\ldots,z_{p+q} \tag{1.12}$$

seront aussi différents. Il sera donc commode d'introduire pour les points (1.11) et (1.12) deux notations différentes en les remplaçant respectivement par

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_p), \tag{1.13}$$

$$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_q). \tag{1.14}$$

Dans ces notations le système (1.1) prend la forme du système suivant de $p+q=n$ équations:

$$\frac{dX}{dt}=F(t,X,Y), \tag{1.15}$$

$$\frac{dY}{dt}=G(t,X,Y). \tag{1.16}$$

La forme bien particulière des hyperplans (1.9) et (1.10) ne constitue aucune restriction essentielle. En appliquant une transformation linéaire convenable, on peut les transformer en hyperplans Π et Σ donnés d'avance et ayant un seul point commun. Dans le cas des systèmes linéaires aux coefficients constants dont les deuxièmes membres sont complétés par des perturbations non linéaires, on peut prendre comme Σ l'hyperplan caractéristique correspondant aux racines caractéristiques dont les parties réelles sont positives et comme Π l'hyperplan caractéristique correspondant aux autres racines caractéristiques dont les parties réelles sont négatives donc non nulles. Le théorème 5 et l'exemple du § 17 se rattachent à un tel cas. Nos théorèmes 1 et 2 englobent aussi le cas particulier où l'un des systèmes (1.15), (1.16) manque (cas $p=0$ et cas $q=0$).

L'exemple à la fin du travail (§ 17) montre que nos théorèmes, grâce à leur caractère topologique, peuvent être appliqués même au cas où les deuxièmes membres du système (1.1) ne possèdent pas de dérivées partielles du premier ordre sur la droite $z=z_0$, $a<t<b$.

§ 2. Nous rappelons des définitions de quelques notions connues intervenant dans la suite.

Définition 5. On dit que l'ensemble A, $A\subset B$, est *rétracte* de l'ensemble B lorsqu'il existe une transformation $Q=T(P)$ continue dans B et telle que

$$T(P)=P \quad \text{lorsque} \quad P\epsilon A, \qquad T(P)\epsilon A \quad \text{lorsque} \quad P\epsilon B.$$

Définition 6. Soit $\omega\subset\Theta$. La classe de ces points frontières de ω qui appartiennent à Θ est dite *frontière de ω relative à Θ*. Elle sera désignée par Front (ω,Θ).

Définition 7. ω est dit *fermé relativement à Θ* lorsque $\omega\subset\Theta$ et Front $(\omega,\Theta)\subset\omega$.

§ 3. Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dz}{dt}=\Gamma(t,z) \tag{3.1}$$

écrit sous la forme vectorielle.

Hypothèse G. La fonction $\Gamma(t,Z)$ est continue dans un ensemble ouvert Ω, $(t\epsilon(a,b), Z\epsilon\Theta)$ de points (t,Z). Par chaque point de Ω passe une intégrale unique du système (3.1). ω est un sous-ensemble de Θ fermé relativement à Θ.

§ 4. Soit

$$P_0=(t_0,Z_0) \tag{4.1}$$

un point tel que $t_0\epsilon(a,b)$, $Z_0\epsilon$ Front(ω,Θ) et soit $z=\Phi(t)$ l'intégrale du système (3.1) issue du point (t_0,Z_0).

Définition 8. P_0 est dit point de sortie relatif à ω,Θ et au système (3.1) lorsqu'il existe un nombre positif $\varepsilon>0$ tel que

$$\Phi\big((t_0-\varepsilon,t_0)\big)\subset\omega.$$

P_0 est dit *point de sortie stricte* relatif à ω,Θ et au système (3.1) lorsque

$$\Phi\big((t_0-\varepsilon,t_0)\big)\subset\omega, \qquad \Phi\big((t_0,t_0+\varepsilon)\big)\subset\Theta-\omega.$$

§ 5. Théorème de M. T. Ważewski [3]. *Admettons l'hypothèse G du § 3 relativement au système* (3.1). *Désignons par S la classe des points de sortie relatifs à ω et Θ et supposons que tout point de S soit point de sortie stricte* (*relatif à ω et Θ*). *Soit Z un ensemble tel que*

$$Z\subset\omega+S,$$
$$Z\cdot S \text{ soit un rétracte de } S,$$
$$Z\cdot S \text{ ne soit pas un rétracte de } Z.$$

Cela posé, il existe au moins un point $Q\subset Z-S$ tel que l'intégrale J issue de Q se laisse prolonger à droite jusqu'à la frontière (*absolue*) *de Ω sans quitter au cours de ce prolongement l'intérieur de l'ensemble ω.*

§ 6. Dans le § 4 nous avons énoncé les définitions du point de sortie et de sortie stricte (relatifs à ω,Θ et au système (3.1); cf. définition 8). En gardant les mêmes notations et les mêmes hypothèses nous introduisons les définitions suivantes:

Définition 9. Le point $P_0=(t_0,Z_0)$ est dit *point d'entrée* relatif à ω,Θ et au système (3.1) lorsque

$$Z_0\epsilon\text{Front}\,(\omega,\Theta), \qquad t_0\epsilon(a,b), \qquad \Phi(t_0,t_0+\varepsilon)\subset\omega.$$

P_0 est dit *point d'entrée stricte* relatif à ω,Θ et à (3.1) lorsque

$$\Phi(t_0,t_0+\varepsilon)\subset\omega, \qquad \Phi(t_0-\varepsilon,t_0)\subset\Theta-\omega.$$

Définition 10. $P_0=(t_0,Z_0)$ est dit *point de glissement extérieur* relatif à ω,Θ et à (3.1) lorsque

$$Z_0\epsilon\,\text{Front}\,(\omega,\Theta), \qquad t_0\epsilon(a,b), \qquad \Phi(t_0-\varepsilon,t_0)\subset\Theta-\omega, \qquad \Phi(t_0,t_0+\varepsilon)\subset\Theta-\omega.$$

§ 7. Système $A(p,q)$. Nous envisageons, dans la suite, le système $A(p,q)$ de $p+q$ équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_i}{dt}=f^i(t,x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

(7.1)

$$\frac{dy_j}{dt}=g^j(t,x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \qquad (j=1,2,\ldots,q).$$

En posant

$$X=(x_1,\ldots,x_p), \qquad Y=(y_1,\ldots,y_q),$$

(7.2) $$F(t,X,Y)=\{f^1(t,X,Y),\ldots,f^p(t,X,Y)\},$$

$$G(t,X,Y)=\{g^1(t,X,Y),\ldots,g^q(t,X,Y)\},$$

nous écrivons ce système sous la forme vectorielle, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{dX}{dt}=F(t,X,Y),$$

(7.3)

$$\frac{dY}{dt}=G(t,X,Y).$$

Le système $A(p,0)$ contient p équations et il a la forme

(7.4) $$\frac{dX}{dt}=F(t,X).$$

La variable Y n'intervient pas dans ce système. Le système $A(0,q)$ contenant q équations a la forme

(7.5) $$\frac{dY}{dt}=G(t,Y).$$

§ 8. Nous admettons, dans la suite, relativement au système $A(p,q)$ l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE H. Les deuxièmes membres $F(t,X,Y)$, $G(t,X,Y)$ du système $A(p,q)$ sont continus dans un ensemble *ouvert* Ω composé des points (t,X,Y) de l'espace à $p+q+1$ dimensions tels que $a<t<b$, $(X,Y)\epsilon\Theta$, où b est fini ou $b=\infty$ et Θ est un ensemble ouvert de l'espace à $p+q$ dimensions.

Par chaque point de Ω passe une intégrale unique du système $A(p,q)$.

Définition 11. Soit

(8.1) $$V(t,X,Y)$$

une fonction de classe C^1 au voisinage d'un point $(t_0,X_0,Y_0)\epsilon\Omega$ (c'est-à-dire ayant les dérivées partielles du premier ordre continues dans ce voisinage). Les valeurs de $V(t,X,Y)$ représentent des nombres réels (et non pas points). Soit $X=\Phi(t)$, $Y=\Psi(t)$ l'intégrale du système $A(p,q)$ issue du point (t_0,X_0,Y_0) et posons

$$\lambda(t)=V\big(t,\Phi(t),\Psi(t)\big).$$

La dérivée de $\lambda(t)$ au point $t=t_0$ sera dite *dérivée complète* de $V(t,X,Y)$ relative au système $A(p,q)$ et calculée au point (t_0,X_0,Y_0).

On a évidemment (cf. (7.1))

$$\lambda'(t_0)=\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial x_i}f^i(t,X,Y)+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial y_j}g^j(t,X,Y)\right]_{\substack{t=t_0\\X=X_0\\Y=Y_0}}+\left[\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial t}\right]_{\substack{t=t_0\\X=X_0\\Y=Y_0}}.$$

Cette dérivée est une fonction du point $(t_0,X_0,Y_0)\epsilon\Omega$. En remplaçant (t_0,X_0,Y_0) par (t,X,Y) on obtient sa valeur au point (t,X,Y) qui sera désignée par

$$\left(\frac{dV(t,X,Y)}{dt}\right)_{A(p,q)}.$$

On a évidemment

$$\left(\frac{dV(t,X,Y)}{dt}\right)_{A(p,q)}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial x_i}f^i(t,X,Y)$$

(8.2)

$$+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial y_j}g^j(t,X,Y)+\frac{\partial V(t,X,Y)}{\partial t}.$$

Remarque 2. La dérivée complète (8.2), considérée le long d'une intégrale $X=\Phi(t)$, $Y=\Phi(t)$ du système $A(p,q)$ est égale à la dérivée ordinaire de la fonction $V\big(t,\Phi(t),\Psi(t)\big)$.

Notations. Soient $P=(p_1,\ldots,p_s)$, $Q=(q_1,\ldots,q_s)$ deux vecteurs de l'espace à s dimensions. Leurs *modules* seront désignés par $|P|$ et $|Q|$ et leur produit scalaire par $P\cdot Q$. On a donc

(8.3) $$|P|=\sqrt{\sum_{i=1}^{s}p_i^2}, \qquad |Q|=\sqrt{\sum_{i=1}^{s}q_i^2},$$

(8.4) $$P\cdot Q=\sum_{i=1}^{s}p_iq_i.$$

Remarque 3. Posons en particulier (cf. (8.1)) $V(t,X,Y)=|X|$ ou $V(t,X,Y)=|Y|$. On a pour les dérivées complètes de ces fonctions, calculées au point $(t,X,Y)\epsilon\Omega$ les formules suivantes (cf. (8.2), (8.3) et (8.4))

$$\left(\frac{d|X|}{dt}\right)_{A(p,q)}=\frac{XF(t,X,Y)}{|X|} \quad \text{lorsque} \quad |X|\neq 0, \tag{8.5}$$

$$\left(\frac{d|Y|}{dt}\right)_{A(p,q)}=\frac{YG(t,X,Y)}{|Y|} \quad \text{lorsque} \quad |Y|\neq 0. \tag{8.6}$$

La dérivée complète $(d|X|/dt)_{A(p,q)}$ est égale à la vitesse avec laquelle l'intégrale passant par le point (X,Y) à l'instant t s'éloigne ou s'approche du plan $X=0$, suivant que le signe de cette dérivée est positif ou négatif.

§ 9. Notations. Ensemble ω^*, $S^*(t)$ et $E^*(t)$. L'ensemble ω^* est défini par les relations

$$|X|\leqslant\gamma^*, \qquad |Y|\leqslant\delta^* \qquad (\omega^*\subset\Theta), \tag{9.1}$$

où γ^*,δ^* sont fixes, $0<\gamma^*<\infty$, $0<\delta^*<\infty$.

Les ensembles $S^*(t_0)$ et $E^*(t_0)$ sont définis relativement par les relations

$$t_0\leqslant t<b, \qquad |X|=\gamma^*, \qquad |Y|\leqslant\delta^*, \tag{9.2}$$

$$t_0\leqslant t<b, \qquad |X|\leqslant\gamma^*, \qquad |Y|=\delta^*. \tag{9.3}$$

Nous introduisons relativement au système $A(p,q)$ l'hypothèse suivante:

Hypothèse K. Il existe un $t_0\epsilon(a,b)$ tel que (cf. (8.5), (8.6), (9.2) et (9.3))

$$\left(\frac{d|X|}{dt}\right)_{A(p,q)}=\frac{XF(t,X,Y)}{|X|}>0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X,Y)\epsilon S^*(t_0), \tag{9.4}$$

$$\left(\frac{d|Y|}{dt}\right)_{A(p,q)}=\frac{YG(t,X,Y)}{|Y|}<0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X,Y)\epsilon E^*(t_0). \tag{9.5}$$

Dans le cas $p=0$ (cf. § 7), le système $A(p,q)$ prend la forme (7.5). Nous admettons que

$$\left(\frac{d|Y|}{dt}\right)_{A(0,q)}=\frac{YG(t,Y)}{|Y|}<0 \quad \text{lorsque} \quad (t,Y)\epsilon E^*(t_0). \tag{9.6}$$

Dans le cas $q=0$ le système $A(p,q)$ a la forme (7.4) et nous admettons que

$$\left(\frac{d|X|}{dt}\right)_{A(p,0)}=\frac{XF(t,X)}{|X|}>0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\epsilon S^*(t_0). \tag{9.7}$$

Hypothèse L. Chaque intégrale asymptotique relativement à ω^* et au système (7.3) est asymptotique relativement à l'origine des coordonnées (cf. la définition 2 et 3 du § 1).

Au cas, où il existe au moins une intégrale asymptotique relativement à ω^* et au système (7.3) l'hypothèse L exprime que l'origine des coordonnées est un point asymptotiquement singulier fort.

§ 10. Théorème 1. *Admettons les hypothèses* H, K *et* L *relativement au système* $A(p,q)$.

Désignons, dans le cas $p>0$, $q>0$, *par* $\sigma(Y_0)$ *la sphère à* p *dimensions définie par les relations*

$$t=t_0, \qquad |X|<\gamma^*, \qquad Y=Y_0. \tag{10.1}$$

Dans le cas $q=0$, *nous désignons par* $\hat{\sigma}$ *la sphère à* p *dimensions*

$$t=t_0, \qquad |X|<\gamma^*. \tag{10.2}$$

Cela posé,

1⁰ *dans le cas* $p>0$, $q>0$, *chaque sphère* $\sigma(Y_0)$, *où* Y_0 *est un point quelconque, tel que*

$$|Y_0|<\delta^*, \tag{10.3}$$

contient au moins un point P *tel que l'intégrale issue de* P *soit asymptotique relativement à l'origine;*

2⁰ *dans le cas* $q>0$, *le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques relativement à l'origine des coordonnés est au moins égale à* q;

3⁰ *dans le cas* $p=0$, *toutes les intégrales issues des points de* ω^* *pour certain* τ_0, $\tau_0\epsilon(t_0,b)$ *sont asymptotiques relativement à l'origine des coordonnées;*

4⁰ *dans le cas* $q=0$, *il existe au moins une intégrale asymptotique relativement à l'origine des coordonnées.*

Démonstration. Nous prouverons d'abord, en nous appuyant sur l'hypothèse K que pour t_0 on a les propriétés suivantes:

(I*) *L'ensemble*

$$S^*(t_0)-E^*(t_0) \tag{10.4}$$

est composé des points de sortie stricte relatifs à ω^*,Θ *et au système* (7.3),

(II*) *L'ensemble*

$$E^*(t_0)-S^*(t_0) \tag{10.5}$$

est composé des points d'entrée stricte relatifs à ω^*, Θ *et au système* (7.3),

(III*) *L'ensemble*

$$E^*(t_0)\cdot S^*(t_0) \tag{10.6}$$

est composé des points de glissement extérieur à ω^*,Θ *et au système* (7.3).

Soit d'abord un point P_0 appartenant à (10.4)

(10.7) $$P_0=(t_0, X_0, Y_0), \qquad P_0 \epsilon S^*(t_0)-E^*(t_0)$$

et soit $\{X(t), Y(t)\}$ l'intégrale passant par P_0. On a

$$X(t_0)=X_0, \qquad Y(t_0)=Y_0$$

et en vertu de (10.7), (9.2) et (9.3)

(10.8) $$|X(t_0)|=|X_0|=\gamma^*, \qquad |Y(t_0)|=|Y_0|<\delta^*.$$

En vertu de (9.4) et (10.8), il existe un $\varepsilon>0$ tel que

$$|X(t)|<\gamma^*, \qquad |Y(t)|<\delta^* \qquad \text{lorsque} \quad t_0-\varepsilon<t<t_0,$$
$$|X(t)|>\gamma^*, \qquad |Y(t)|<\delta^* \qquad \text{lorsque} \quad t_0<t<t_0+\varepsilon.$$

Ces inégalités expriment (cf. la définition 8, § 4) que P_0 est un point de sortie stricte.

En s'appuyant sur (9.2), (9.3), (9.4), (9.5) et sur les définitions 9 et 10 on démontre par un raisonnement analogue notre assertion relative aux ensembles (10.5) et (10.6). Les cas $p=0$ et $q=0$ sont plus faciles à traiter en ce qui concerne le caractère de ces ensembles.

La frontière de ω^* relative à Θ étant égale à S^*+E^*, il résulte de (I*), (II*) et (III*) que, dans les hypothèses K, l'ensemble des points de sortie de ω^* relatifs à Θ est identique à l'ensemble $S^*(t_0)-S^*(t_0)\cdot E^*(t_0)$ et que tous les points de sortie de ω^* relatifs à Θ sont des points de sortie stricte. (Dans le cas, où $p=0$ ou $q=0$, on a $S^*\cdot E^*=0$.)

En vertu des propriétés des ensembles S^* et E^*, qui viennent d'être démontrées, l'existence des intégrales asymptotiques relativement à ω^* résulte immédiatement du théorème de Ważewski [8]. Il suffit, à cet effet, de remarquer que la surface d'une sphère n'est pas un rétracte de la sphère et que la surface de la sphère $t=t_0$, $|X|\leqslant\gamma^*$, $Y=Y_0$ (dans le cas $q=0$, de la sphère $t=t_0$, $|X|\leqslant\gamma^*$) est un rétracte de l'ensemble $|X|=\gamma^*$, $|Y|\leqslant\delta^*$, $t_0\leqslant t<b$.

D'après l'hypothèse L toute intégrale, asymptotique relativement à ω^* est asymptotique relativement à l'origine des coordonnées z_0.

La démonstration de 3^0 résulte immédiatement de II*. En effet, dans ce cas la frontière de ω^* relative à Θ ne contient que des points d'entrée stricte dans ω^*, et par conséquent aucune intégrale ne peut sortir de ω^* dans Θ. Il s'ensuit que toute intégrale, issue d'un point $P(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_{q+p})\epsilon\,\omega^*$, reste pour $\tau\leqslant t<b$ dans ω^*, donc d'après l'hypothèse L est asymptotique relativement au point z_0.

§ 11. Propriétés des équations comparatives. Nous avons admis dans le théorème 1, l'hypothèse L que toute intégrale asymptotique relativement à l'ensemble ω^* et au système $A(p,q)$ est aussi asymptotique relativement à l'origine des coordonnées. Or cette hypothèse est d'un caractère qualitatif et il peut arriver qu'elle ne soit pas facile à vérifier dans les applications.

C'est pourquoi nous allons donner, dans les paragraphes suivants, une condition suffisante, pour que l'hypothèse L soit satisfaite. Avant d'énoncer cette condition nous ferons quelques remarques pour mettre en évidence son sens intuitif.

ε étant un nombre positif quelconque $(0<\varepsilon<1)$, introduisons les ensembles $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ et ω_ε définis par les relations

$$(\textit{Ensemble } A_\varepsilon) \qquad \varepsilon\gamma\leqslant|X|\leqslant\gamma, \qquad \delta|X|\geqslant|Y|\gamma,$$
$$(\textit{Ensemble } B_\varepsilon) \qquad \varepsilon\delta\leqslant|Y|\leqslant\delta, \qquad \delta|X|\leqslant|Y|\gamma,$$
$$(\textit{Ensemble } \omega_\varepsilon) \qquad |X|\leqslant\varepsilon\gamma, \qquad |Y|\leqslant\varepsilon\delta.$$

Considérons l'intégrale $X=X(t)$, $Y=Y(t)$ du système $A(p,q)$ issue d'un point arbitraire $P^*=(X^*, Y^*)$.

Supposons que le système $A(p,q)$ satisfasse, pour tout $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$, aux conditions suivantes M et N.

Condition M. Toute intégrale issue d'un point arbitraire $P^*\epsilon A_\varepsilon$ en un instant T_ε (suffisamment voisin de b, $T_\varepsilon<b$) sort, en un instant t^*, $t^*>T_\varepsilon$, de l'ensemble A_ε sans plus y revenir.

Condition N. Toute intégrale issue d'un point arbitraire $P^*\epsilon B_\varepsilon$ en un instant suffisamment voisin de b sort de B_ε, en un certain instant, sans y revenir.

En admettant ces hypothèses on peut vérifier facilement que l'hypothèse L est satisfaite pour le système $A(p,q)$.

On peut facilement indiquer une condition de caractère cinematique qui implique la condition N dans le cas où $b=\infty$, c'est-à-dire lorsque t varie dans l'intervalle $a<t<\infty$. Il suffit à cet effet de supposer que, à partir d'un certain instant $\tau_\varepsilon\,(a<\tau_\varepsilon<\infty)$, toute intégrale $X(t)$, $Y(t)$ du système $A(p,q)$ s'approche suffisamment vite de l'hyperplan $Y=0$ tant qu'elle reste dans B_ε. Il suffit par exemple que la vitesse de cet approchement $-d|Y(t)|/dt$ soit plus grande qu'une certaine constante $-\beta_\varepsilon>0$. On obtient ainsi la condition N_1:

$$\frac{d}{dt}|Y(t)|\leqslant\beta_\varepsilon<0 \qquad \text{lorsque} \quad \tau_\varepsilon<t<\infty \quad \text{et} \quad \big(X(t), Y(t)\big)\epsilon B_\varepsilon.$$

Pareillement la condition M résulte de la suivante

Condition M_1

$$\frac{d}{dt}|X(t)|\geqslant a_\varepsilon>0 \quad \text{lorsque} \quad \tau_\varepsilon<t<\infty, \quad \text{et} \quad (X(t),Y(t))\in A_\varepsilon.$$

On a (pour $X(t)\neq 0$ resp. pour $Y(t)\neq 0$)

$$\frac{d}{dt}|X(t)|=\frac{XF(t,X,Y)}{|X|}, \qquad \frac{d}{dt}|Y(t)|=\frac{YG(t,X,Y)}{|Y|}.$$

Abstraction faite du cas $X(t)=0$ et $Y(t)=0$ (qui est sans importance dans la suite) les conditions M_1 et N_1 prennent la forme

$$\frac{YG(t,X,Y)}{|Y|}\leqslant\beta_\varepsilon<0 \quad \text{lorsque} \quad (X,Y)\in B_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon<t,$$

$$\frac{XF(t,X,Y)}{|X|}\geqslant a_\varepsilon>0 \quad \text{lorsque} \quad (X,Y)\in A_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon<t.$$

Ces inégalités constituent une sorte de comparaison du système de $p+q$ équations

$$X'=F(t,X,Y), \qquad Y'=G(t,X,Y),$$

avec les deux équations

$$\frac{du}{dt}=a_\varepsilon, \qquad \frac{dv}{dt}=\beta_\varepsilon.$$

Au lieu de ces dernières équations on peut appliquer, pour la comparaison, les équations de la forme plus générale

$$\frac{du}{dt}=h_\varepsilon(t,u), \qquad \frac{dv}{dt}=k_\varepsilon(t,v) \tag{11.1}$$

pourvu que les conditions

$$\frac{d}{dt}|Y(t)|\leqslant k_\varepsilon(t,|Y|) \quad \text{lorsque} \quad \tau_\varepsilon<t<\infty,$$

$$\frac{d}{dt}|X(t)|\geqslant h_\varepsilon(t,|X|) \quad \text{lorsque} \quad \tau_\varepsilon<t<\infty$$

impliquent les conditions N et M.

A cet effet, il suffit d'admettre que les équations (11.1) jouissent de certaines propriétés $W(a,b,\alpha,\beta)$ et $V(a,b,\alpha,\beta)$ de caractère qualitatif que nous indiquerons tout à l'heure. On observera facilement que ces propriétés concernent l'éloignement de l'axe $u=0$ des intégrales de l'équation $du/dt=h_\varepsilon(t,u)$ et le rapprochement de l'axe $v=0$ des intégrales de l'équation $dv/dt=k_\varepsilon(t,v)$.

Nous passons maintenant aux détails.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt}=f(t,u) \tag{11.2}$$

dont le second membre est continu dans le rectangle

(U) $$a<t<b, \qquad \alpha<u\leqslant\beta$$

et admettons l'unicité de ses intégrales.

Propriété $W(a,b,\alpha,\beta)$. Nous dirons que l'équation (11.2) *jouit de la propriété* $W(a,b,\alpha,\beta)$, lorsque toute intégrale de (11.2) contenue dans U et prolongée à droite jusqu'à la frontière de U, tend vers un point (τ_0,β), $\tau_0\in(a,b)$, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\tau_0}u(t)=\beta, \qquad a<\tau_0<b.$$

Propriété $V(a,b,\alpha,\beta)$. Nous dirons que l'équation (11.2) dont le second membre est continu dans le rectangle U *jouit de la propriété* $V(a,b,\alpha,\beta)$, lorsque toute intégrale de (11.2) contenue dans U et prolongée à droite jusqu'à la frontière de U, tend vers un point (τ_0,α), $\tau_0\in(a,b)$ c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\tau_0}u(t)=\alpha, \qquad a<\tau_0<b.$$

§ 12. Lemme 1. *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt}=\Phi(t)\Psi(u) \tag{12.1}$$

où les fonctions Φ et Ψ sont supposées de satisfaire aux hypothèses suivantes:

$$\Phi(t)>0 \quad \textit{et } \Phi \textit{ est continue pour} \quad a<t<b, \tag{12.2}$$

$$\Psi(u)>0 \quad \textit{et } \Psi \textit{ est continue pour} \quad \alpha<u\leqslant\beta, \tag{12.3}$$

$$\int_{t_0}^{b}\Phi(t)dt=\infty \quad \textit{pour tout } t_0, \quad a<t_0<b. \tag{12.4}$$

Dans ces hypothèses l'équation (12.1) *consideré dans* U, *jouit de la propriété* $W(a,b,\alpha,\beta)$.

Démonstration. Soit $u(t)$ une intégrale de (12.1) prolongée pour $t \geqslant \bar{t}$, jusqu'à la frontière de l'ensemble U, et supposons, pour la démonstration par impossible, qu'elle ne coupe pas la droite $u=\beta$. On a alors l'inégalité

$$(12.5)\qquad a<u(t)<\beta \quad \text{pour} \quad \bar{t}\leqslant t$$

tant que l'intégrale $u(t)$ existe. D'autre part, en vertu de la relation

$$(12.6)\qquad u'(t)=\Phi(t)\Psi\big(u(t)\big)>0$$

la fonction $u(t)$ est croissante et par conséquent on a

$$(12.7)\qquad a<u(\bar{t})<u(t)<\beta \quad \text{pour} \quad \bar{t}<t.$$

Comme l'intégrale $u(t)$ atteint la frontière de l'ensemble U, il résulte des inégalités et (12.7) qu'elle est définie dans l'intervalle $\bar{t}\leqslant t<b$ et y vérifie l'inégalité (12.7). La fonction $u(t)$ étant croissante, la limite $\lim\limits_{t\to b} u(t)$ existe et, en posant

$$(12.8)\qquad \gamma=\lim_{t\to b} u(t)>a,$$

on a $a<\gamma\leqslant\beta$. De l'identité (12.6) on obtient aisément la relation

$$(12.9)\qquad \int\limits_{u(\bar{t})}^{u(t)} \frac{du}{\Psi(u)} = \int\limits_{\bar{t}}^{t} \Phi(\tau)\,d\tau$$

d'où, en faisant tendre t vers b, on a, d'après (12.4),

$$(12.10)\qquad \int\limits_{\bar{u}}^{\gamma} \frac{du}{\psi(u)} = \infty \qquad \big(\bar{u}=u(\bar{t})\big).$$

La fonction $\Psi(u)$ étant positive et continue dans l'intervalle $a<\bar{u}\leqslant u\leqslant\gamma$, la dernière relation est impossible et la démonstration est ainsi terminée.

LEMME 2. *Dans les hypothèses* (12.2), (12.3) *et* (12.4) *du lemme précédent et dans l'hypothèse accéssoire que pour* $u=a$ $\Psi(u)$ *est continue et* $\Psi(u)>0$, *l'équation*

$$(12.11)\qquad \frac{du}{dt} = -\Phi(t)\Psi(u)$$

jouit dans U *de la propriété* $V(a,b,a,\beta)$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.

§ 13. Une condition suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un point asymptotiquement singulier fort. Considérons le système d'équations différentielles $A(p,q)$

$$(13.1)\qquad \frac{dX}{dt} = F(t,X,Y), \qquad \frac{dY}{dt} = G(t,X,Y)$$

ainsi que les équations auxiliaires

$$(13.2)\qquad u'=h_\varepsilon(t,u) \quad \text{où} \quad h_\varepsilon(t,u)>0,$$

$$(13.3)\qquad v'=k_\varepsilon(t,v) \quad \text{où} \quad k_\varepsilon(t,v)<0.$$

Nous admettons l'unicité des intégrales des équations (13.2) et (13.3) et les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES (W, V):

(W) l'équation (13.2) jouit de la propriété $W(\tau_\varepsilon,b,\varepsilon\gamma,\gamma)$,

(V) l'équation (13.3) jouit de la propriété $V(\tau_\varepsilon,b,\varepsilon\delta,\delta)$.

THÉORÈME 2. *Admettons, pour le système* $A(p,q)$, *les hypothèses* H (cf. § 8), *et soit* $\omega_1\subset\omega^*$ *l'ensemble défini par les inégalités* (cf. § 9):

$$(\omega_1)\qquad |X|\leqslant\gamma, \qquad |Y|\leqslant\delta.$$

Supposons ensuite qu'à chaque ε, $0<\varepsilon<1$, *viennent correspondre un nombre* T_ε, $a<T_\varepsilon<b$, *et deux équations différentielles* (13.2) *et* (13.3) *satisfaisant aux hypothèses* (W, V) *telles que l'inégalité*

$$(13.4)\qquad \left(\frac{d|X|}{dt}\right)_{A(p,q)} = \frac{XF(t,X,Y)}{|X|} \geqslant h_\varepsilon(t,|X|)>0 \quad \text{pour} \quad \tau_\varepsilon\leqslant t<b$$

soit satisfaite dans l'ensemble A_ε:

$$(A_\varepsilon)\qquad \varepsilon\gamma\leqslant|X|\leqslant\gamma, \qquad \delta|X|\geqslant|Y|\gamma$$

et l'inégalité

$$(13.5)\qquad \left(\frac{d|Y|}{dt}\right)_{A(p,q)} = \frac{YG(t,X,Y)}{|Y|} \leqslant k_\varepsilon(t,|Y|)<0 \quad \text{pour} \quad \tau_\varepsilon\leqslant t<b$$

soit satisfaite dans l'ensemble B_ε:

$$(B_\varepsilon)\qquad \varepsilon\delta\leqslant|Y|\leqslant\delta, \qquad \delta|X|\leqslant\gamma|Y|.$$

Dans ces hypothèses l'origine des coordonnées est un point asymptotiquement singulier fort.

Démonstration. Désignons par ω_ε l'ensemble

$$(\omega_\varepsilon) \qquad |X|\leqslant\varepsilon\gamma, \qquad |Y|\leqslant\varepsilon\delta \qquad (\text{pour tout } \varepsilon, 0<\varepsilon<1).$$

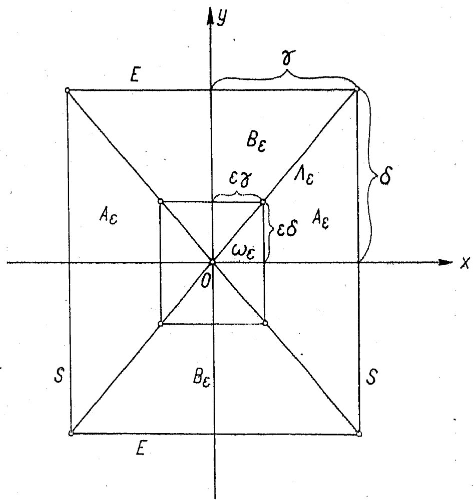
Nous allons démontrer que,

(R) *pour tout* ε, $0<\varepsilon<1$ *chaque intégrale* $J(t)$ *asymptotique relativement à* ω_1 *est aussi asymptotique relativement à* ω_ε.

Le théorème 2 en résultera immédiatement.

Pour établir la proposition (R) nous démontrerons d'abord la propriété suivante:

(I) *Pour tout* ε_0, $0<\varepsilon_0<1$ *chaque intégrale* $J(t)$ *asymptotique relativement à* ω_1, *reste à l'extérieur du l'ensemble* A_{ε_0}, *pour* $t>\tau_{\varepsilon_0}$.



Avant de passer à la démonstration de la propriété (I), remarquons que les hypothèses (13.4), (13.5) impliquent l'hypothèse K (introduite dans le § 9) pour le système $A(p,q)$ avec $\gamma^*=\gamma$, $\delta^*=\delta$, $t_0=\tau_{\varepsilon_0}$, aussi bien qu'avec $\gamma^*=\varepsilon_0\gamma$, $\delta^*=\varepsilon_0\delta$, $t_0=\tau_{\varepsilon_0}$. L'inégalité (9.4) est donc satisfaite dans l'ensemble

$$(S) \qquad |X|=\gamma, \qquad |Y|\leqslant\delta, \qquad \tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b$$

ainsi que dans l'ensemble

$$(S_{\varepsilon_0}) \qquad |X|=\varepsilon_0\gamma, \qquad |Y|\leqslant\varepsilon_0\delta, \qquad \tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b,$$

tandis que l'inégalité (9.5) est verifiée dans l'ensemble

$$(E) \qquad |X|\leqslant\gamma, \qquad |Y|=\delta, \qquad \tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b$$

et dans l'ensemble

$$(E_{\varepsilon_0}) \qquad |X|\leqslant\varepsilon_0\gamma, \qquad |Y|=\varepsilon_0\delta, \qquad \tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b.$$

Par conséquent, d'après nos considérations précédentes (cf. § 10), les propriétés (I*), (II*) et (III*) ont lieu pour les ensembles S, E, ω_1 et Θ, ou pour les ensembles S_{ε_0}, E_{ε_0}, ω_{ε_0} et ω_1, lorsqu'on remplace γ^*, δ^*, t_0 et ω^* par $\gamma, \delta, \tau_{\varepsilon_0}$ et ω_1, ou par $\varepsilon_0\gamma, \varepsilon_0\delta, \tau_{\varepsilon_0}$ et ω_{ε_0}. Il s'ensuit que les propositions suivantes ont lieu:

(13.6) *L'ensemble* $S-E$ *est l'ensemble des points de sortie stricte de l'ensemble* ω_1 *relatifs à* Θ (cf. (I*)).

(13.7) *L'ensemble* $E-S$ *est l'ensemble des points d'entrée stricte dans* ω_1 (*relatifs à* Θ) (cf. (II*)).

(13.8) *L'ensemble* $E\cdot S$ *est l'ensemble de points de glissement extérieur pour* ω_1 (*relatifs à* Θ) (cf. (III*)).

D'une façon analogue, on établit que:

(13.9) *L'ensemble* $S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0}$ *est l'ensemble des points de sortie stricte de* ω_{ε_0} (*relatifs à* ω_1).

(13.10) *L'ensemble* $E_{\varepsilon_0}-S_{\varepsilon_0}$ *est l'ensemble des points d'éntrée stricte dans* ω_{ε_0} (*relatifs à* ω_1).

(13.11) *L'ensemble* $S_{\varepsilon_0}\cdot E_{\varepsilon_0}$ *est l'ensemble des points de glissement exterieur pour* ω_{ε_0} *relatifs à* ω_1.

On vérifie facilement que l'ensemble $A_{\varepsilon_0}+B_{\varepsilon_0}$ est la fermeture de l'ensemble $\omega_1-\omega_{\varepsilon_0}$ et que B_{ε_0} est fermé relativement à ω_1, $(S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0})\cdot B_{\varepsilon_0}=0$ et $S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0}\subset A_{\varepsilon_0}$. Il en résulte, d'après (13.9) que:

(13.9') *L'ensemble* $S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0}$ *est l'ensemble des points d'entrée stricte dans* A_{ε_0} (*relatifs à* ω_1), *car tout point de sortie de* ω_{ε_0} *dans* ω_1 *est un point d'entré dans* $\omega_1-\omega_{\varepsilon_0}$.

D'une façon analogue on établit, d'après (13.11), que:

(13.11') *L'ensemble* $S_{\varepsilon_0}\cdot E_{\varepsilon_0}$ *est l'ensemble des points de glissement intérieur pour* $A_{\varepsilon_0}+B_{\varepsilon_0}$ (*relatifs à* ω_1), *puisque tout point de glissement extérieur pour* ω_{ε_0} (*relatifs à* ω_1) *est un point de glissement intérieur pour* $\omega_1-\omega_{\varepsilon_0}$.

Nous examinerons encore les points de l'ensemble $A_{\varepsilon_0}\cdot B_{\varepsilon_0}$.

Introduisons à cet effet l'ensemble Λ_{ε_0}:

$$(13.12) \qquad \Lambda_{\varepsilon_0}=(A_{\varepsilon_0}B_{\varepsilon_0})X_c(\tau_{\varepsilon_0},b)-S\cdot E,$$

et considérons un point arbitraire $P_0=(\tau_0,\tilde{X},\tilde{Y})\,\epsilon A_{\varepsilon_0}$. Le point $(\tilde{X},\tilde{Y})$ appartient à l'ensemble A_{ε_0} ainsi qu'à l'ensemble B_{ε_0}. Les inégalites (13.4) (13.5) sont donc verifieés au point P_0. Désignons par $\{\xi(t),\eta(t)\}$ l'intégrale du système $A(p,q)$ issue du point P_0. Alors

$$\xi(\tau_0)=\tilde{X},\qquad \eta(\tau_0)=\tilde{Y} \tag{13.13}$$

et en tenant compte de ce que la dérivée complète, considérée le long de l'intégrale, est identique avec la dérivée ordinaire de la fonction composée, on obtient, d'après (8.5) et (8.6),

$$\left(\frac{d}{dt}|\xi(t)|\right)_{t=\tau_0}=\frac{\tilde{X}\cdot F(\tau_0,\tilde{X},\tilde{Y})}{|\tilde{X}|}>0, \tag{13.14}$$

$$\left(\frac{d}{dt}|\eta(t)|\right)_{t=\tau_0}=\frac{\tilde{Y}\cdot G(\tau_0,\tilde{X},\tilde{Y})}{|\tilde{Y}|}<0. \tag{13.15}$$

En multipliant (13.15) par $(-\gamma)$ et (13.14) par δ, et en additionnant les inégalités ainsi obtenues, on parvient à l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\{\delta|\xi(t)|-\gamma|\eta(t)|\}_{t=\tau_0}>0. \tag{13.16}$$

On a en outre

$$\delta|\xi(\tau_0)|-\gamma|\eta(\tau_0)|=\delta|\tilde{X}|-\gamma|\tilde{Y}|=0, \tag{13.17}$$

$$\varepsilon_0\gamma\leqslant|\tilde{X}|<\gamma,\qquad \varepsilon_0\delta\leqslant|\tilde{Y}|<\delta \tag{13.18}$$

puisque le point $P_0=(\tau_0,\tilde{X},\tilde{Y})$ appartient à l'ensemble A_{ε_0}. Les relations (13.16), (13.17) (13.18) et (13.11′) montrent qu'il existe un nombre positif $\alpha>0$, tel que

$$\begin{gathered}\delta|\xi(t)|-\gamma|\eta(t)|>\delta|\xi(\tau_0)|-\gamma|\eta(\tau_0)|=0,\\ \varepsilon_0\gamma<|\xi(t)|<\gamma,\qquad |\eta(t)|<\delta\end{gathered} \tag{13.19}$$

lorsque $\tau_0<t\leqslant\tau_0+\alpha$ et

$$\begin{gathered}\delta|\xi(t)|-\gamma|\eta(t)|<0,\\ |\xi(t)|<\gamma,\qquad \varepsilon_0\delta<|\eta(t)|<\delta\end{gathered} \tag{13.20}$$

lorsque $\tau_0-\alpha\leqslant t<\tau_0$. Il résulte des relations (13.17), (13.18), (13.19) et (13.20) que:

(13.21) *Les points de l'ensemble A_{ε_0} sont des points d'entrée stricte relatifs à l'ensemble A_{ε_0} et ω_1 tandis que relativement à l'ensemble B_{ε_0} et ω_1 ils sont des points de sortie stricte.*

En nous appuyant sur les propriétés (13.6), (13.8), (13.9) et (13.21) nous allons démontrer que l'intégrale $J(t)$ asymptotique relativement à ω_1 a la propriété I. Nous partagerons la démonstration en trois étapes:

(I_1) *Dans l'intervalle $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b$ l'intégrale $J(t)$ n'a pas des points communs avec l'ensemble S.*

(I_2) *Dans l'hypothèse que l'intégrale $J(t)$ possède dans l'intervalle $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b$ au moins un point commun avec l'ensemble A_{ε_0}, $J(t)$ est asymptotique relativement à l'ensemble A_{ε_0}.*

(I_3) *L'intégrale $J(t)$ n'est pas asymptotique relativement à l'ensemble A_{ε_0}.*

La propriété (I_1) résulte facilement des relations (13.6), (13.8) et de l'hypothèse que $J(t)$ soit asymptotique relativement à l'ensemble ω_1. En effet, nous avons démontré, que tout point de l'ensemble S est un point de sortie stricte ou de glissement extérieur relatif à ω_1 et Θ et par suite $J(t)$ ayant un point commun avec S devrait quitter l'ensemble ω_1, ce qui contredit à notre hypothèse sur l'allure asymptotique de l'intégrale $J(t)$ relativement à ω_1.

Nous démontrerons la propriété (I_2) en nous appuyant sur la propriété (I_1) et les relations (13.9′) et (13.21).

Supposons, pour la démonstration par impossible, qu'il existe deux valeurs $t=t_1$ et $t=t_2$, $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t_1<t_2<b$, telles que $J(t_1)$ appartienne à A_{ε_0} et $J(t_2)$ n'y appartienne pas. Alors il existe aussi une valeur t_3, $t_1<t_3<t_2$ telle que $J(t_3)$ est un point de sortie de l'ensemble A_{ε_0} et n'appartienne pas à l'ensemble S, ce qui est impossible car

$$[\mathrm{Front}(A_{\varepsilon_0},\Theta)]\times(\tau_{\varepsilon_0},b)=S+A_{\varepsilon_0}+(S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0})$$

et les ensembles A_{ε_0} et $S_{\varepsilon_0}-E_{\varepsilon_0}$ se composent exclusivement des points d'entrée stricte relatifs à l'ensemble A_{ε_0} et ω_1.

Passons à la démonstration par impossible de la propriété (I_3). Supposons à cet effet qu'il existe un nombre l tel que $\tau_{\varepsilon_0}<l<b$ et que $J(t)\,\epsilon A_{\varepsilon_0}$ lorsque $l\leqslant t<b$. En raison de (13.4) on a le long de l'intégrale $J(t)$ l'inégalité

$$\frac{d}{dt}|X(t)|\geqslant h_{\varepsilon_0}(t,|X(t)|)\qquad \text{pour}\quad t\,\epsilon\,[l,b). \tag{13.22}$$

Soit $u(t)$ l'intégrale de l'équation auxiliaire $u'=h_{\varepsilon_0}(t,u)$ passant par le point $\{l,|X(l)|\}$. D'après la théorie des inégalités différentielles et grâce à la propriété (I_1) et la relation (13.22) nous obtenons

$$u(t)\leqslant|X(t)|\qquad \text{pour}\quad t\,\epsilon\,[l,b). \tag{13.23}$$

On a ainsi une contradiction, car l'hypothèse (W) affirme l'existence d'un nombre l_0 tel que

$$u(l_0)=\gamma,\qquad l_0\,\epsilon\,[l,b).$$

En rapprochant les propriétés (I_2) et (I_3) on constate facilement que la propriété (I) est satisfaite.

Nous allons maintenant démontrer que pour $J(t)$ asymptotique relativement à ω_1 les propriétés suivantes sont satisfaites:

(II_1) *La relation* $J(\tau^*)\epsilon\omega_{\varepsilon_0}$, *où* $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant\tau^*<b$, *implique que, dans l'intervalle* $[\tau^*,b)$,

$$J(t)\subset\omega_{\varepsilon_0},$$

c'est-à-dire l'intégrale $J(t)$, *ayant un point* $\tau^*, J(\tau^*)$ *commun avec l'ensemble* ω_{ε_0}, *est asymptotique relativement à cet ensemble.*

(II_2) *Il existe une valeur* $\bar{t}$ *de l'intervalle* $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant\bar{t}<b$ *telle que* $J(\bar{t})\epsilon\omega_{\varepsilon_0}$.

Il est évident, que (R) résulte immédiatemant de (II_1) et (II_2). Passons à la démonstration de la propriété (II_1). En raison de la propriété (I), il est évident que l'intégrale $J(t)$ ne contient pas de points communs avec l'ensemble A_{ε_0} pour $\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b$. Donc elle ne peut pas quitter l'ensemble ω_{ε_0} que par l'ensemble $E_{\varepsilon_0}-S_{\varepsilon_0}$, ce qui est impossible car les points de cet ensemble sont d'après la relation (13.10) des points d'entrée stricte dans ω_{ε_0}. Nous avons donc établi que l'intégrale $J(t)$, s'étant trouvé dans ω_{ε_0} pour une certaine valeur $\tau^*\geqslant\tau_{\varepsilon_0}$, y reste pour tous les t de l'intervalle $\tau^*<t<b$. La propriété (II_1) se trouve ainsi démontrée.

Pour la démonstration par impossible, de la propriété (II_2), supposons que l'intégrale $J(t)$ n'ait pas de points communs avec ω_{ε_0} dans l'intervalle $[\tau_{\varepsilon_0},b)$. Il en résulte, que $J(t)$ est asymptotique relativement à $\omega_1-A_{\varepsilon_0}-\omega_{\varepsilon_0}$, car, en raison de la propriété (I), l'intégrale $J(t)$, par hypothèse asymptotique relativement à ω_1, est asymptotique relativement à $\omega_1-A_{\varepsilon_0}$ et, par suite, selon notre supposition, elle l'est aussi relativement à $\omega_1-A_{\varepsilon_0}$. Remarquons que

$$\omega_1-A_{\varepsilon_0}-\omega_{\varepsilon_0}\subset B_{\varepsilon_0}.$$

Le long de l'intégrale $J(t)$ on a donc

$$\frac{d}{dt}|Y(t)|\leqslant k_\varepsilon(t,|Y(t)|)\qquad\text{pour}\quad\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b, \tag{13.24}$$

car l'inégalité (13.5) est satisfaite dans l'ensemble B_{ε_0}.

Soit $v(t)$ l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$v'=k_{\varepsilon_0}(t,v) \tag{13.25}$$

passant par le point $(\tau_{\varepsilon_0},|Y(\tau_{\varepsilon_0})|)$. On obtient alors de la relation (13.24) l'inégalité

$$\varepsilon_0\delta<|Y(t)|\leqslant v(t)\qquad\text{pour}\quad\tau_{\varepsilon_0}\leqslant t<b, \tag{13.26}$$

L'équation (13.25) étant, d'après l'hypothèse (V), du type $V(a,b,\varepsilon_0\delta,\delta)$, il existe un nombre ζ tel que $\zeta\epsilon(\tau_{\varepsilon_0},b)$,

$$v(\zeta)=\varepsilon_0\delta. \tag{13.27}$$

En rapprochant les relations (13.26) et (13.27) on obtient une contradiction

$$\varepsilon_0\delta<|Y(\zeta)|\leqslant\varepsilon_0\delta.$$

La propriété (II_2) est ainsi démontrée.

La propriété (R) résulte immédiatement des propriétés (II_1) et (II_2). Ainsi nous avons démontré que pour t suffisamment voisin de b, l'intégrale $J(t)$ parcourt dans ω_{ε_0}, c'est-à-dire qu'elle est asymptotique relativement à ω_{ε_0}.

§ 14. Voici maintenant le théorème qui constitue une conséquence directe des théorèmes 1 et 2.

THÉORÈME 3. *Dans les hypothèses du théorème 2 il existe une famille, à q paramètres essentiels, d'intégrales de l'équation $A(p,q)$ asymptotiques relativement à l'ensemble ω_1 et à l'origine de coordonnées. Si $q=0$, il en existe au moins une et dans le cas où $p=0$, toutes les intégrales sont asymptotiques relativement à ω_1 et à l'origine de coordonnées.*

§ 15. COROLLAIRE. *En raison des lemmes* 1 *et* 2 *les équations* (13.2) *et* (13.3) *satisfont aux hypothèses* (W, V) *c'est-à-dire jouissent respectivement de la propriété* $W(\tau_\varepsilon,b,\varepsilon\gamma,\gamma)$ *et* $V(\tau_\varepsilon,b,\varepsilon\delta,\delta)$ *lorsqu'on pose*

$$h_\varepsilon(t,u)=a_\varepsilon\Phi(t)\Psi(u),$$

$$k_\varepsilon(t,v)=-a_\varepsilon\Phi(t)\Psi(v)$$

où

$$\Phi(t)>0\ \textit{et}\ \Phi(t)\ \textit{est continue pour}\ a<t<b\leqslant\infty,$$

$$\Psi(u)>0\ \textit{et}\ \Psi(u)\ \textit{est continue pour}\ 0<u\leqslant\beta=\max(\gamma,\delta),$$

$$\int_{t_0}^{b}\Phi(t)\,dt=\infty\qquad\textit{pour}\quad t_0\epsilon(a,b),$$

$$a_\varepsilon>0.$$

Dans le cas $\Psi(u)\equiv 1$ et $p+q=1$ on obtient du théorème 3 le théorème de Hartman et Winter.

§ 16. Une condition d'unicité de l'intégrale asymptotique relativement à l'origine des coordonnées. Nous allons indiquer une condition d'unicité de l'intégrale asymptotique relativement à l'origine des coordonnées dans le cas du système $A(p,0)$, c'est-à-dire

$$\frac{dX}{dt}=F(t,X). \tag{16.1}$$

Théorème 4. *Admettons les hypothèses* H, K, L (cf. § 8 et 9) *dans le cas où $q=0$ et supposons en outre que $F(t,X)$ soit une fonction de classe C^1 dans l'ensemble $\omega\times\Delta$*

$$X\in\omega, \qquad a<t<b$$

et que la forme quadratique

$$Q=Q(\eta_1,\ldots,\eta_p)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} f^i_{x_j}(t,X)\eta_i\eta_j \tag{16.2}$$

soit positive, semi-définie pour chaque point (t,X) de l'ensemble $\omega\times\Delta$, c'est-à-dire

$$Q(\eta_1,\ldots,\eta_p)\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad X\in\omega, \quad a<t<b. \tag{16.3}$$

Dans ces hypothèses il existe une intégrale unique du système considéré, asymptotique relativement à ω et au point asymptotiquement singulier z_0.

Démonstration. L'existence de l'intégrale asymptotique relativement à ω et au point asymptotiquement singulier z_0 résulte, d'après nos hypothèses, du théorème 1 (cf. § 10, cas $q=0$). Supposons qu'il existe deux intégrales asymptotiques $\overline{X}(t)$ et $\overline{\overline{X}}(t)$, différentes l'une de l'autre. L'unicité du système $A(p,0)$ étant supposée, il en résulte que pour t suffisamment voisin de b les fonctions $\overline{X}(t)$ et $\overline{\overline{X}}(t)$ sont définies et

$$\overline{X}(t)\neq\overline{\overline{X}}(t) \quad \text{pour} \quad t_0\leqslant t<b,\ a<t_0<b. \tag{16.4}$$

Soit

$$\varrho(t)=|\overline{X}(t)-\overline{\overline{X}}(t)|. \tag{16.5}$$

La fonction $\varrho(t)$ est donc définie pour $t_0\leqslant t<b$ et $\varrho(t)>0$ lorsque $t_0\leqslant t<b$

$$\varrho'(t)=\frac{\big(\overline{X}(t)-\overline{\overline{X}}(t)\big)\cdot\big(F(t,\overline{X}(t))-F(t,\overline{\overline{X}}(t))\big)}{\varrho(t)} \quad \text{pour} \quad t_0\leqslant t<b. \tag{16.6}$$

A l'aide de la fonction auxiliaire

$$\Gamma(t,X,\eta)=\Gamma(t,x_1,\ldots,x_p,\eta_1,\ldots,\eta_p)=\sum_{i=1}^{p} f^i(t,X)\eta_i=F(t,X)\eta \tag{16.7}$$

où $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_p)$, le numérateur de l'expression obtenue pour $\varrho'(t)$ peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}(\overline{X}-\overline{\overline{X}})[F(t,\overline{X})-F(t,\overline{\overline{X}})]&=F(t,\overline{X})(\overline{X}-\overline{\overline{X}})-F(t,\overline{\overline{X}})(\overline{X}-\overline{\overline{X}})\\ &=\Gamma(t,\overline{X},\overline{X}-\overline{\overline{X}})-\Gamma(t,\overline{\overline{X}},\overline{X}-\overline{\overline{X}})=[\Gamma(t,\overline{X},\eta)-\Gamma(t,\overline{\overline{X}},\eta)]_{\eta=\overline{X}-\overline{\overline{X}}}.\end{aligned} \tag{16.8}$$

En tenant compte de ce que la fonction Γ est de classe C^1 par rapport à X dans l'ensemble convexe $|X|\leqslant\gamma$, on obtient, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}&\Gamma(t,\overline{X},\eta)-\Gamma(t,\overline{\overline{X}},\eta)\\ &=\sum_{j=1}^{p}\Gamma_{x_j}(t,X^*,\eta)(\overline{x}_j-\overline{\overline{x}}_j)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} f^i_{x_j}(t,X^*)(\overline{x}_j-\overline{\overline{x}}_j)\eta_i\end{aligned} \tag{16.9}$$

où $X^*=\overline{\overline{X}}+\delta(\overline{X}-\overline{\overline{X}})$, $0<\delta<1$. Posons $\eta=\overline{X}-\overline{\overline{X}}$. En rapprochant les relations (16.6), (16.7), (16.8), (16.9) et en tenant compte de ce que la fonction Q est une forme quadratique positive semi-définie, on obtient

$$\begin{aligned}\varrho'(t)&=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{f^i_{x_j}(t,X^*)(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}}_i)(\overline{x}_j-\overline{\overline{x}}_j)}{\varrho(t)}\\ &=\frac{Q(\overline{x}_1-\overline{\overline{x}}_1,\ldots,\overline{x}_p-\overline{\overline{x}}_p)}{\varrho(t)}=\frac{Q(\overline{X}-\overline{\overline{X}})}{\varrho(t)}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{16.10}$$

Il en résulte que $\varrho(t)$ est une fonction croissante, d'où

$$\varrho(t)\geqslant\varrho(t_0)>0 \quad \text{pour} \quad t_0\leqslant t<b. \tag{16.11}$$

On a ainsi une contradiction, car $\lim\limits_{t\to b}\varrho(t)=0$ en raison de ce que $\overline{X}(t)\to 0$ et $\overline{\overline{X}}(t)\to 0$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

§ 17. Hypothèse M. Les coefficients a_{ij} du système

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{17.1}$$

sont constants et réels. $s_1,\ldots,s_n$ désigne la suite complète des racines caractéristiques, par hypothèse simples, du système (17.1), $s_j=\gamma_j+i\delta_j$, $(j=1,2,\ldots,n)$ où γ_j et δ_j sont réels et

$$\gamma_j>0 \quad \text{pour} \quad j=1,2,\ldots,p \qquad (p<n), \tag{17.2}$$

$$\gamma_j<0 \quad \text{pour} \quad j=p+1,p+2,\ldots,n. \tag{17.3}$$

Théorème 5. *Admettons l'hypothèse* M *relativement au système* (17.1) *et envisageons le système perturbé*

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+\eta_k(t,x_1,\ldots,x_n) \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{17.4}$$

Admettons que les fonctions $\eta_k(t,x_1,\ldots,x_n)$ soient continues pour $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ appartenant à un voisinage ω de l'origine des coordonnées et pour $0\leqslant t<\infty$, et que par chaque point de ω passe une intégrale unique du système (17.4).

Cela posé, il existe un nombre $N>0$ (dépendant exclusivement du système (17.1)) tel que, pour chaque système de fonctions $\eta_k(t,x_1,\ldots,x_n)$ en question satisfaisant aux inégalités

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2(t,x_1,\ldots,x_n)}<N\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\quad \textit{pour}\quad X\epsilon\omega \ \textit{et}\ 0\leqslant t<\infty \tag{17.5}$$

on ait les propriétés suivantes:

1° *L'origine des coordonnées est un point asymptotiquement singulier fort du système* (17.4).

2° *La famille des intégrales du système* (17.4) *qui tendent vers l'origine avec $t\to\infty$ dépend de $q=n-p$ paramètres essentiels au moins.*

Démonstration. En appliquant au système (17.4) une transformation linéaire convenable, aux coefficients constants

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}b_{kj}x_j \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{T}$$

on obtient un système de la forme suivante:

$$(17.6)\quad \begin{aligned}
\frac{dy_k}{dt}&=\gamma_k y_k+\delta_k y_{m+k}+\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\bar{\eta}_j(t,Y) && (k=1,2,\ldots,m),\\
\frac{dy_{m+k}}{dt}&=-\delta_k y_k+\gamma_k y_{m+k}+\sum_{j=1}^{n}b_{m+k,j}\bar{\eta}_j(t,Y) && (k=1,2,\ldots,m),\\
\frac{dy_s}{dt}&=\gamma_s y_s+\sum_{j=1}^{n}b_{sj}\bar{\eta}_j(t,Y) && (s=2m+1,\ldots,p),\\
\frac{dy_{p+r}}{dt}&=\gamma_{p+r}y_{p+r}+\delta_{p+r}y_{p+r+l}+\sum_{j=1}^{n}b_{p+r,j}\bar{\eta}_j(t,Y) && (r=1,2,\ldots,l),\\
\frac{dy_{p+r+l}}{dt}&=-\delta_{p+r}y_{p+r}+\gamma_{p+r}y_{p+r+l}+\sum_{j=1}^{n}b_{p+r+l,j}\bar{\eta}_j(t,Y) && (r=1,2,\ldots,l),\\
\frac{dy_h}{dt}&=\gamma_h y_h+\sum_{j=1}^{n}b_{hj}\bar{\eta}_j(t,Y) && (h=p+2l+1,\ldots,n),
\end{aligned}$$

où

$$\bar{\eta}_i(t,Y)=\eta_i\Big(t,\sum_{j=1}^{n}B_{1j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}B_{nj}y_j\Big) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et $\|B_{kj}\|$ désigne la matrice inverse de la matrice $\|b_{ij}\|$.

Posons

$$\xi_k=y_k\quad (k=1,2,\ldots,p),\qquad Y_s=y_{s+p}\quad (s=1,2,\ldots,n-p), \tag{17.7}$$

$$\bar{\bar{\eta}}_i(t,\xi,Y)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\bar{\eta}_j(t,\xi_1,\ldots,\xi_p,Y_1,\ldots,Y_{n-p}). \tag{17.8}$$

Le système (17.6) prendra la forme $A^*_{(p,n-p)}$

$$A^*_{(p,n-p)}\quad \begin{cases}
\dfrac{d\xi_k}{dt}=\gamma_k\xi_k+\delta_k\,\xi_{m+k}+\bar{\bar{\eta}}_k(t,\xi,Y) & (k=1,2,\ldots,m),\\[2mm]
\dfrac{d\xi_{q+k}}{dt}=-\delta_k\,\xi_k+\gamma_k\,\xi_{k+m}+\bar{\bar{\eta}}_{q+k}(t,\xi,Y) & (k=1,2,\ldots,m),\\[2mm]
\dfrac{d\xi_s}{dt}=\gamma_s\,\xi_s+\bar{\bar{\eta}}_s(t,\xi,Y) & (s=2m+1,\ldots,p),\\[2mm]
\dfrac{dY_r}{dt}=\gamma_{p+r}Y_r+\delta_{p+r}Y_{l+r}+\bar{\bar{\eta}}_{r+p}(t,\xi,Y) & (r=1,2,\ldots,l),\\[2mm]
\dfrac{dY_{j+r}}{dt}=-\delta_{p+r}Y_r+\gamma_{p+r}Y_{l+r}+\bar{\bar{\eta}}_{l+r+p}(t,\xi,Y) & (r=1,2,\ldots,l),\\[2mm]
\dfrac{dY_h}{dt}=\gamma_{p+h}Y_h+\bar{\bar{\eta}}_{p+h}(\gamma,\xi,Y) & (h=2l+1,\ldots,n-p).
\end{cases}$$

De la supposition (17.3) et (17.2) il résulte, qu'il existe deux nombres α et β, $\beta<\alpha$, tels que

$$0<\alpha\leqslant\gamma_k \qquad (k=1,2,\ldots,p;\ p<n), \tag{17.9}$$

$$\gamma_j\leqslant\beta<0 \qquad (j=p+1,p+2,\ldots,n). \tag{17.10}$$

Posons

$$N=\min\left(\frac{\alpha}{4BB^*},\frac{|\beta|}{4BB^*}\right) \tag{17.11}$$

où

$$B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2,\qquad B^*=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}^2. \tag{17.12}$$

Nous affirmons que le nombre N, défini par (17,5), est un nombre dont l'existence intervient dans le présent théorème. Afin de le prouver, supposons que (cf. (8.1))

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^2(t,X)}=|\eta(t,X)|<N|X|. \tag{17.13}$$

Considérons les ensembles D_1 et D_2 définis par les inégalités

(l'ensemble D_1) $\quad \lambda\geqslant|\xi|\geqslant|Y|, \qquad |\xi|+|Y|>0,$

(l'ensemble D_2) $\quad |\xi|\leqslant|Y|\leqslant\lambda, \qquad |\xi|+|Y|>0,$

où λ est un nombre positif ($\lambda>0$) choisi de façon que le point X correspondant par l'intermédiaire des transformations T et (17.7) à un point (ξ,Y) appartenant à D_1+D_2 soit situé dans ω. On a donc

$$X\epsilon\,\omega \qquad \text{lorsque} \qquad (\xi,Y)\epsilon\,D_1+D_2.$$

Nous allons démontrer que les dérivées complètes de $|\xi|$ et de $|Y|$ relatives au système $A^*(p,n-p)$ (cf. § 8) satisfont aux inégalités

$$\left(\frac{d|\xi|}{dt}\right)_{A^*(p,n-p)}\geqslant\frac{a}{2}|\xi|>0 \qquad \text{dans} \quad D_1, \tag{17.14}$$

$$\left(\frac{d|Y|}{dt}\right)_{A^*(p,n-p)}\leqslant\frac{\beta}{2}|Y|<0 \qquad \text{dans} \quad D_2. \tag{17.15}$$

Evaluons, à cet effet, les dérivées complètes (relatives au système $A^*(p,q)$) des fonctions $|\xi|$ et $|Y|$ dans les ensembles D_1 et D_2, en nous appuyant sur l'inégalité de Schwarz. On a

$$\left(\frac{d|\xi|}{dt}\right)_{A^*(p,n-p)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k\xi_k^2+\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k\xi_{k+q}^2+\sum\limits_{k=2m+1}^{p}\gamma_k\xi_k^2}{|\xi|} \tag{17.16}$$
$$+\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\delta_k\xi_{k+q}\xi_k-\sum\limits_{k=1}^{m}\delta_k\xi_k\xi_{k+q}}{|\xi|}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\xi_k\bar{\bar{\eta}}_k(t,\xi,Y)}{|\xi|}.$$

Les γ_k étant positifs pour $k=1,2,\ldots,p$, on a en vertu de (17.9) l'inégalité

$$\left(\frac{d|\xi|}{dt}\right)_{A^*(p,n-p)}\geqslant\frac{a\sum\limits_{k=1}^{p}\xi_k^2}{|\xi|}-|\bar{\bar{\eta}}(t,\xi,Y)|=a|\xi|-|\bar{\bar{\eta}}|. \tag{17.17}$$

En vertu de la définition de $\bar{\bar{\eta}}(t,\xi,Y)$, on a

$$|\bar{\bar{\eta}}(t,\xi,Y)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\eta_j(t,\xi,Y)\Big]^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\Big]\Big[\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2\Big]}$$
$$=|\bar{\eta}(t,\xi,Y)|B=\Big|\eta\Big(t,\sum_{j=1}^{n}B_{1j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}B_{nj}y_j\Big)\Big|\cdot B, \tag{17.18}$$
$$y_k=\xi_k \quad (k=1,2,\ldots,p), \qquad y_k=Y_{k-p} \quad (k=p+1,\ldots,n).$$

Il en résulte, en vertu de (17.11), (17.12) et (17.13) que

$$|\bar{\bar{\eta}}(t,\xi,Y)|\leqslant BN|X|=BN\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}B_{ij}y_j\Big]^2} \tag{17.19}$$
$$=BN\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{p}B_{ij}\xi_j+\sum_{j=p+1}^{n}B_{ij}Y_{j-p}\Big]^2}$$
$$\leqslant BN\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}B_{sj}^2\Big]\Big[\sum_{j=1}^{p}\xi_j^2+\sum_{j=1}^{n-p}Y_j^2\Big]}\leqslant B\frac{a}{4BB^*}B^*\sqrt{|\xi|^2+|Y|^2}$$

d'où il vient que dans l'ensemble D_1 on a

$$|\bar{\bar{\eta}}(t,\xi,Y)|\leqslant\frac{a}{4}\cdot2|\xi|=\frac{a}{2}|\xi|. \tag{17.20}$$

Des relations (17.20) et (17.17) resulte que l'inégalité (17.14) a lieu dans D_1, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{d|\xi|}{dt}\right)_{A^*(p,n-p)}\geqslant\frac{a}{2}|\xi|>0 \qquad \text{dans} \quad D_1.$$

En s'appuyant sur (17.10) on prouve d'une façon analogue que l'inégalité (17.15) a lieu dans D_2. Les inégalités (17.14) et (17.15) expriment que le système $A^*(p,n-p)$ satisfait aux prémisses du théorème 2 du § 13 avec

$$b=\infty, \qquad h_\varepsilon(t,u)=\frac{a}{2}u, \qquad k_\varepsilon(t,u)=\frac{\beta}{2}u,$$

les fonctions $h_\varepsilon(t,u)$ et $k_\varepsilon(t,u)$ satisfont évidemment aux prémisses des lemmes 1 et 2 du § 12. En appliquant le théorème 2 on conclut facilement la validité du présent théorème.

Remarque. Envisageons, en particulier, le cas où les fonctions intervenant dans le système (17.4) ne dépendent pas de la variable t. Ce système prend alors la forme

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+\eta_k(x_1,\ldots,x_n) \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{17.4''}$$

Dans le cas où

$$\eta_k(0,\ldots,0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

l'origine des coordonnées est un point singulier du système (17.4'').

Le problème relatif à l'existence des intégrales non nulles identiquement et tendant vers l'origine a été l'objet d'un grand nombre de recherches [4].

Dans toutes ces recherches, si je le sais bien, les méthodes de démonstration nécessitaient l'hypothèse que les fonctions η_k possèdent les dérivées partielles continues du premier ordre au point $(0,\ldots,0)$ et dans un voisinage de ce point.

Or, l'exemple qui suit montre que les prémisses du théorème 5 peuvent être vérifiées même au cas où les *fonctions* η_k *ne possèdent pas la différentielle de Stolz au point* $(0,\ldots,0)$. Ceci provient de ce que la démonstration de ce théorème a été établie dans une voit topologique.

Exemple 1. Considérons le système

$$x'=x+k\sqrt{x^2+y^2},\qquad y'=-y+l\sqrt{x^2+y^2}, \tag{17.19}$$

où

$$0<|k|<\frac{1}{16},\qquad 0<|l|<\frac{1}{16}.$$

On a $\eta_1(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, $\eta_2(x,y)=l\sqrt{x^2+y^2}$. Il est évident que les fonctions η_1 et η_2 ne possèdent pas la différentielle de Stolz à l'origine. On voit facilement que système (17.19) satisfait à la condition de l'unicité de Lipschitz, et que $\gamma_1=1$, $\gamma_2=-1$.

En posant $\alpha=1$, $\beta=-1$ on voit que les prémisses du théorème 5 sont vérifiées. L'origine des coordonnées est donc un point asymptotiquement singulier fort et le système (17.19) admet une famille d'intégrales tendant vers l'origine. Cette famille dépend d'un paramètre au moins.

Exemple 2. Considérons le système

$$x'=x+k\left(x\sin\frac{1}{x}+y\cos\frac{1}{y}\right),\qquad y'=-y+l\left(x\cos\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}\right) \tag{17.20}$$

et définissons les deuxièmes membres de ce système comme égaux à zéro pour $x=0$, $y=0$. Admettons que les nombres fixes k et l satisfassent aux inégalités

$$0<|k|<\frac{1}{32},\qquad 0<|l|<\frac{1}{32}.$$

Un raisonnement analogue à celui qui intervient dans l'exemple précédent montre que l'origine des coordonnées est un point asymptotiquement singulier fort et que le système (17.20) admet une famille (dépendant d'un paramètre au moins) d'intégrales tendant vers l'origine.

On observera que dérivées partielles des deuxièmes membres du système (17.20)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x+k\left(x\sin\frac{1}{x}+y\cos\frac{1}{y}\right)\right]=1+k\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-y+l\left(x\cos\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}\right)\right]=l\cos\frac{1}{x}+\frac{l}{x}\sin\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-y+l\left(x\cos\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}\right)\right]=-1+l\left[\sin\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\cos\frac{1}{y}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x+k\left(x\sin\frac{1}{x}+y\cos\frac{1}{y}\right)\right]=k\left(\cos\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}\right)$$

n'existent pas à l'origine et qu'elles ne sont pas bornées dans aucun voisinage de l'origine.

§ 18. Dans les théorèmes 2 et 3 on pourait remplacer la distance des deux points $\varrho(X_1,X_2)=|X_1-X_2|$ et $\varrho(Y_1,Y_2)=|Y_1-Y_2|$ par $A(X_1,X_2)$ et $B(Y_1,Y_2)$, où A et B désignent deux fonctions convenables non négatives et s'annulant exclusivement pour $X_1=X_2$. La lecture des articles de M. J. Massera ou M. A. Liapounoff et M. N. I. Malkin, cités plus bas peuvent orienter sur la façon de réaliser une telle généralisation.

Publications citées

[1] P. Hartman and A. Wintner, *On the asymptotic behavior of the solutions of a non-linear differential equations*, American Journal of Mathematics 68 (1946), p. 301-308.

[2] T. Ważewski, *Sur l'allure asymptotique des intégrales d'une équation différentielle non linéaire*, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, Serie A: Sc. Math. (1945), p. 63-66.

[3] — *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annalles de la Soc. Pol. de Math. 20 (1947), p. 279-313. Rendiconti dell'Acad. Naz. dei Lincei (1947), Série VIII, vol. III, p. 210.

[4] O. Perron, *Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 121-146 et 16 (1923), p. 273-295.

[5] J. L. Massera, *On Liapounoff's conditions of stability*, Annals of Math. 50 № 3 (1949), p. 705-721.

[6] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annals of Math. Studies, № 17 (1907), p. 255-262.

[7] I. Malkin, *Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes von Liapounoff*, C. R. Doklady Acad. Sc. URSS. 18 (1938), p. 162-164.

[8] T. Ważewski, *Sur l'évaluation du nombre des paramètres éssentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique*, Bulletin de l'Académie Pol. des Sciences, Cl. III, vol. I, Nos 1-2, 1953.