Sur la formule de Green-Gauss-Ostrogradsky

par S. Łojasiewicz (Kraków)

§ 1. Dans la note présente je donne une démonstration de la formule de Green sous les hypothèses suivantes:

Soit G un ensemble ouvert à n dimensions, borné et tel que sa frontière S et celle de son extérieur soient égales. Supposons qu'il soit possible d'établir une décomposition de S en un nombre fini où dénombrable d'ensembles disjoints

$$S = C + S_1 + S_2 + \ldots, \tag{1}$$

où C est un ensemble fermé de mesure à $n-1$ dimensions nulle[1]), et S_ν $(\nu=1,2,\ldots,)$ est une surface, ouverte relativement à S, donnée par une représentation paramétrique

$$x_i = x_i^{(\nu)}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

ou, en utilisant la notation vectorielle

$$X=(x_1,\ldots,x_n), \qquad U=(u_1,\ldots,u_{n-1}),$$

par

$$X = X^{(\nu)}(U), \tag{3}$$

où U parcourt une region à $n-1$ dimensions $D^{(\nu)}$; admettons que la transformation (2) soit une homéomorphie de $D^{(\nu)}$ en $S^{(\nu)}$, que $x_i^{(\nu)}(U)$ soient de la classe C^1 dans $D^{(\nu)}$ c'est-à-dire qu'elles soient continues avec leurs dérivées partielles du premier ordre), que le rang de la matrice

$$\frac{\partial X^{(\nu)}}{\partial U} = \left[\frac{\partial x_i^{(\nu)}}{\partial u_j}\right] \qquad (i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n-1)$$

soit égal à $n-1$, et que le vecteur

$$A^{(\nu)}(U) = \left(a_1^{(\nu)}(U), \ldots, a_n^{(\nu)}(U)\right),$$

[1]) Au sens de Hausdorff [1].

où

$$a_i^{(\nu)}(U) = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1^{(\nu)}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1^{(\nu)}}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_1^{(\nu)}}{\partial u_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_{i-1}^{(\nu)}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_{i-1}^{(\nu)}}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_{i-1}^{(\nu)}}{\partial u_{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_{i+1}^{(\nu)}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_{i+1}^{(\nu)}}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_{i+1}^{(\nu)}}{\partial u_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_n^{(\nu)}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n^{(\nu)}}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n^{(\nu)}}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{4}$$

(qui est normal à $S^{(\nu)}$) soit dirigé à l'extérieur[2]) de G.

Soit $F(X) = \left(f_1(X), \ldots, f_n(X)\right)$ un champ vectoriel de la classe C^1 (c'est-à-dire que les composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient de la classe C^1) dans un domaine G_1 qui contient $\bar{G} = G + S$. Supposons que la fonction

$$|F(X^{(\nu)}(U))| \cdot |A^{(\nu)}(U)|$$

soit sommable dans $D^{(\nu)}$, $(\nu=1,2,\ldots)$, et que

$$\sum_\nu \int_{D^{(\nu)}} |F(X^{(\nu)})| \cdot |A^{(\nu)}|\, dU < \infty. \tag{5}$$

Ceci étant admis, la formule de Green

$$\int_G \operatorname{div} F\, dX = \sum_\nu \int_{D^{(\nu)}} F(X^{(\nu)}) A^{(\nu)}\, dU \ ^{3)} \tag{6}$$

subsiste.

Dans le § 2 nous démontrerons que cette formule reste vraie lorsque F est de la classe C^1 et bornée dans G, continue dans $G + \sum S^{(\nu)}$, $\operatorname{div} F$ est sommable dans G et lorsque la condition (5) est satisfaite.

[2]) Évidemment cette hypothèse ne restreint pas la généralité; on peut changer au besoin des paramètres: $u_1' = -u_1, u_2' = u_2, \ldots, u_{n-1}' = u_{n-1}$.

[3]) $$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}; \qquad FA = f_1 a_1 + \ldots + f_n a_n;$$

puisque $d\sigma = |A|\, dU$, on a $\int FA\, dU = \int FN\, d\sigma$, où $N = A/|A|$ est la normale extérieure

Remarques preliminaires. On peut choisir les paramètres dans les représentations de $S^{(\nu)}$ de manière que des $D^{(\nu)}$ soient disjoints et que leur réunion $\Omega=\sum_{\nu} D^{(\nu)}$ soit bornée. Posons $X(U)=X^{(\nu)}(U)$, $A(U)=A^{(\nu)}(U)$, $\left(x_i(U)=x_i^{(\nu)}(U),\ a_i(U)=a_i^{(\nu)}(U)\right)$ pour $U\epsilon D^{(\nu)}$, $\nu=1,2,\ldots$ L'expression

$$X=X(U), \quad \text{où} \quad U\epsilon\Omega \tag{7}$$

est une représentation parametrique de $\sum_{\nu} S^{(\nu)}$; on a (d'après (5))

$$\int_{\Omega} |F||A|\,dU<\infty \tag{8}$$

et la formule de Green s'écrit sous la forme

$$\int_{G} \operatorname{div} F\,dX=\int_{\Omega} FA\,dU. \tag{9}$$

Remarquons, qu'on a

$$\left|H,\frac{\partial X}{\partial U}\right|=HA \text{ [4]} \tag{10}$$

pour chaque vecteur H.

Considérons le système dynamique

$$\dot{X}=F(X) \quad \text{dans} \quad G_1. \tag{11}$$

Désignons par $\Phi(t,\Xi)$ l'intégrale qui passe par le point $(0,\Xi)$; on a alors

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=F(\Phi), \tag{12}$$

$$\Phi(0,\Xi)=\Xi. \tag{13}$$

Il existe un $\tau_0>0$ tel que $\Phi(t,\Xi)$ soit définie pour $|t|<\tau_0$ et $\Xi\epsilon G+S$. La transformation

$$X=\Phi(t,\Xi) \tag{14}$$

est une homéomorphie dans $G+S$ pour chaque $t\epsilon[-\tau_0,\tau_0]$; son jacobien

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Xi}\right|=\exp\left(\int_0^t \operatorname{div} F(X)\Big|_{x=\Phi(s,\Xi)} ds\right) \text{ [5]} \tag{15}$$

est toujours positif.

Considérons la transformation

$$X=\Psi(t,U)=\Phi\left(t,X(U)\right); \tag{16}$$

elle est définie dans $[-\tau_0,\tau_0]\times\Omega$ [6]. Calculons son jacobien; en s'appuaynt sur la formule $\mathfrak{A}[H,\mathfrak{K}]=[\mathfrak{A}H,\mathfrak{A}\mathfrak{K}]$ (H étant vecteur, $\mathfrak{K}$ — matrice à n lignes et $n-1$ colonnes), on a d'après (12),

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right]=\left[F(\Phi),\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]\left[\frac{\partial X}{\partial U}\right]\right]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]\left[\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]^{-1}F,\left[\frac{\partial X}{\partial U}\right]\right],$$

d'où, en vertu de (10),

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|=\left|\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right|\left(\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]^{-1}F\right)A. \tag{17}$$

Soit A un ensemble fermé contenu dans Ω et supposons que $F\left(X(U)\right)A(U)\neq0$ dans A. Nous affirmons *qu'il existe un* τ *tel que* $0<\tau<\tau_0$ *et*

$$\Phi\left(t,X(U)\right)\ \textit{non}\,\epsilon S \quad \textit{lorsque} \quad 0<|t|\leqslant\tau,\ U\epsilon A, \tag{18}$$

(19) *la transformation* $X=\Psi(t,U)$ *soit une homéomorphie dans* $[0,\tau]\times A$.

Nous montrerons d'abord (18). En supposant le contraire il existerait une suite $\{t_\nu,U_\nu\}$ pour laquelle

$$t_\nu\neq0, \qquad t_\nu\to0, \tag{20}$$

$U_\nu\epsilon A$ et $\Phi\left(t_\nu,X(U_\nu)\right)\epsilon S$. L'ensemble A étant compact, on peut admettre que

$$U_\nu\to U_0\epsilon A. \tag{21}$$

$X(U_0)$ serait situé sur une $S^{(k)}$ qui est ouverte relativement à S, et alors $\Phi\left(t_\nu,X(U_\nu)\right)\epsilon S^{(k)}$ pour ν suffisamment grand; on aurait donc

$$\Phi\left(t_\nu,X(U_\nu)\right)=X(V_\nu) \tag{22}$$

pour un $V_\nu\epsilon D^{(k)}$. Puisque, $X(V_\nu)=\Phi\left(t_\nu,X(U_\nu)\right)\to\Phi\left(0,X(U_0)\right)=X(U_0)$,

[4] $\left|H,\frac{\partial X}{\partial u}\right|$ est le déterminant de la matrice

$$\left[H,\frac{\partial X}{\partial U}\right]=\begin{bmatrix} h_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{bmatrix},$$

où $H=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$.

[5] Cf. E. Kamke [2], p. 155.

[6] Le produit cartésien.

alors

(23) $$V_\nu \to U_0$$

(car $X(U)$ est une homéomorphie dans $D^{(k)}$). On aurait de plus

(24) $$\Phi(0, X(U_\nu)) = X(U_\nu).$$

On conclut des relations (20)-(24) que le système

$$\Phi(t, X(U)) = X(V)$$

envisagé dans un voisinage quelconque du point $t=0, U=U_0, V=U_0$ ne serait pas résoluble par rapport à (t, V) d'une façon univoque, d'où (cf. (10) et (12))

$$F(X(U_0))\,\varDelta(U_0) = \left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial V}\right| = 0$$

contrairement à l'hypothèse.

Pour prouver (19), il suffit de montrer que la transformation (16) est biunivoque dans $[0,\tau]\times\varDelta$. Si

$$\Phi(t_1, X(U_1)) = \Phi(t_2, X(U_2)), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_0 \leqslant \tau, \qquad U_1, U_2 \in \varDelta,$$

alors

$$\Phi(t_1 - t_2, X(U_1)) = \Phi(0, X(U_2)) = X(U_2) \in S,$$

d'où, en vertu de (18), $t_1 - t_2 = 0$ et, par suite, $X(U_1) = X(U_2)$, $U_1 = U_2$. La transformation (16) est donc biunivoque et (19) est démontré.

L'ensemble C a la mesure à $n-1$ dimensions égale à zéro; alors, d'après la définition[7]), pour chaque nombre $\eta > 0$, la somme $\sum\limits_j [\delta(C_j)]^{n-1}$, où $C = \sum\limits_j C_j$ est une décomposition de C en un nombre fini ou dénombrable d'ensembles de diamètre $\delta(C_j) < \eta$, peut être faite aussi petite que l'on veut. Il en est de même avec la somme $\sum\limits_{i=1}^{N}(\text{côté de } Q_i)^{n-1}$, où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ sont des cubes ouverts de côtés $<\eta$ pour lesquels $C \subset \sum\limits_{i=1}^{N} Q_i$.

Considérons l'ensemble

(25) $$E = \Phi([0, t_0], C) \qquad (0 < t_0 < \tau_0).$$

[7]) F. Hausdorff [1], cf. aussi S. Saks [3], p. 53-54. En particulier chaque ensemble donné par une représentation paramétrique

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ parcourt un ensemble ouvert ou fermé dans lequel x_i sont de la classe C^1, a la mesure à q dimensions égale à zéro pourvu que $q > p$.

Nous affirmons qu'il est de mesure à n dimensions[8]) nulle:

(26) $$m(\Phi([0, t_0], C)) = 0.$$

En effet, soit G_2 un domaine tel que $E \subset G_2$, $\bar{G}_2 \subset G_1$, et prenons $\eta > 0$ tel que

$$\eta < \min(t_0, \varrho(E, \text{ frontière de } G_2))\,^{9});$$

alors, chaque segment dont les extrémités sont situées sur C_j est contenu dans G_2 et on a d'après le théorème des accroissements finis (en posant $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$)

$$\varphi_i(t', \Xi') - \varphi_i(t'', \Xi'') = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(\tilde{t}_i, \tilde{\Xi}_i)(t' - t'') + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_\nu}(\tilde{t}_i, \tilde{\Xi}_i)(\Xi - \Xi''),$$

d'où

(27) $$|\Phi(t', \Xi') - \Phi(t'', \Xi'')| \leqslant M(|t' - t''| + |\Xi' - \Xi''|),$$

lorsque $0 \leqslant t', t'' \leqslant t_0$ et $\Xi', \Xi'' \in C_j$, où

$$M = n^2 \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ \Xi \in G_2}} \left(\max_{i,\nu = 1,\ldots,n} \left(\left|\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}\right| \right)\right).$$

Soit m_j un nombre naturel tel que

(28) $$\frac{t_0}{m_j} < \delta(C_j) \leqslant \frac{t_0}{m_j - 1}.$$

Décomposons l'intervalle $[0, t_0]$ en m_j intervalles consécutifs $[\sigma_0^{(j)}, \sigma_1^{(j)}], \ldots$ $\ldots, [\sigma_{m_j-1}^{(j)}, \sigma_{m_j}^{(j)}]$ de façon que $\sigma_i^{(j)} - \sigma_{i-1}^{(j)} = \dfrac{t_0}{m_j}$ et posons

$$E_{ij} = \Phi([\sigma_{i-1}^{(j)}, \sigma_i^{(j)}], C_j).$$

On a évidemment

(29) $$E = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} E_{ij}.$$

Si $X', X'' \in E_{ij}$, alors $X' = \Phi(t', \Xi')$, $X'' = \Phi(t'', \Xi'')$, où $\sigma_{i-1}^{(j)} \leqslant t', t'' \leqslant \sigma_i^{(j)}$ et $\Xi', \Xi'' \in C_j$, donc, d'après (27) et (28),

$$|X' - X''| \leqslant M\left(\frac{t_0}{m_j} + \delta(C_j)\right) \leqslant 2M\delta(C_j).$$

[8]) Au sens de Lebesgue.

[9]) $\varrho(Z_1, Z_2)$ désigne la distance entre deux ensembles Z_1 et Z_2.

Il en résulte que

$$\delta(E_{ij}) \leqslant 2M\delta(C_j),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{m_j} [\delta(E_{ij})]^n \leqslant m_j (2M)^n (\delta(C_j))^n$$

et enfin, car on a, en vertu de (28), $m_j\delta(C_j) \leqslant 2t_0$,

(30) $$\sum_j \sum_{i=1}^{m_j} (\delta(E_{ij}))^n \leqslant 2t_0 (2M)^n \sum_j (\delta(C_j))^{n-1}.$$

La somme du deuxième membre de (30) étant aussi petite que l'on veut; il en est de même pour le premier membre d'où il résulte, d'après (29), que $m(E)=0$.

Démonstration de la formule de Green. Posons

(31) $$G_t = \Phi(t,G) \quad \text{pour} \quad \tau_0 > t > 0,$$

(cf. (14)). Nous montrerons que la limite

(32) $$\lim_{t\to 0} \frac{m(G_t)-m(G)}{t}$$

existe et est égale au premier ainsi qu'au deuxième membre de la formule de Green.

On a, d'après (13),

$$m(G) = \int_G dX = \int_G \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(0,\Xi)\right| d\Xi,$$

et, d'après (14), (15),

$$m(G_t) = \int_{G_t} dX = \int_G \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(t,\Xi)\right| d\Xi.$$

On a donc

(33) $$\frac{m(G_t)-m(G)}{t} = \int_G \frac{1}{t}\left(\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(t,\Xi)\right| - \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(0,\Xi)\right|\right) d\Xi.$$

Puisque la fonction

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(t,\Xi)\right| = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(t,\Xi)\right| \operatorname{div} F(X)|_{X=\Phi(t,\Xi)}$$

(cf. (15)) est continue dans l'ensemble borné, fermé $\bar{G}\times[-\tau_0,\tau_0]$, alors, en vertu de (13),

$$\frac{1}{t}\left(\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(t,\Xi)\right| - \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(0,\Xi)\right|\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(\tau_{t\Xi},\Xi)\right| \underset{G}{\Rightarrow} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}(0,\Xi)\right| \operatorname{div} F(X)|_{X=\Phi(0,\Xi)} = \operatorname{div} F(\Xi)\,^{10)},$$

lorsque $t\to 0$. On en conclut, selon (33), que

(34) $$\lim_{t\to 0} \frac{m(G_t)-m(G)}{t} = \int_G \operatorname{div} F(\Xi)\, d\Xi.$$

La limite (32) est donc égale au premier membre de la formule de Green.

Désignons par R l'ensemble de toutes les caractéristiques saturées du système (11) envisagé dans G. On a

(35) $$G = \sum_{\Gamma\in R} \Gamma$$

(les caracteristiques Γ étant disjointes entre elles). Soit $X=X_\Gamma(t)$, où $a_\Gamma<t<\beta_\Gamma$, l'équation d'une caractéristique Γ de R. Désignons par $P_\Gamma=X_\Gamma(a_\Gamma)$ resp. par $Q_\Gamma=X_\Gamma(\beta_\Gamma)$ l'extrémité gauche resp. droite de Γ, lorsque $a_\Gamma>-\infty$ resp. $\beta_\Gamma<\infty$; dans le cas, où $a_\Gamma=-\infty$ resp. $\beta_\Gamma=\infty$, nous dirons que P_Γ resp. Q_Γ n'existe pas. Désignons enfin par Γ_Δ la caractéristique $X=X_\Gamma(t)$, où $t\in\Delta$, pour tout intérvalle Δ dont l'extrémité gauche a resp. l'extrémité droite β satisfait à la relation $|a-a_\Gamma|<\tau_0$ resp. $|\beta-\beta_\Gamma|<\tau_0$ au cas où $a_\Gamma>-\infty$ resp. $\beta_\Gamma<\infty$. En particulier $\Gamma_{(a_\Gamma,\beta_\Gamma)}=\Gamma$.

On a évidemment $\Phi(t,\Gamma)=\Gamma_{(a_\Gamma+t,\beta_\Gamma+t)}$, donc, en vertu de (31) et (35),

(36) $$G_t = \sum_{\Gamma\in R} \Gamma_{(a_\Gamma+t,\beta_\Gamma+t)} \qquad (0<t<\tau_0).$$

En s'appuyant sur les relations

$$(a,\beta) = (a,a+t](a,\beta) + [(a,\beta)-(a,a+t]],$$

$$(a+t,\beta+t) = [(a,\beta)-(a,a+t]] + [[\beta,\beta+t)-(a,a+t]],$$

suivant la formule $f(Z_1+Z_2)=f(Z_1)+f(Z_2)$ (f — une fonction, Z_1,Z_2 — des ensembles), on conclut que

(37) $$\Gamma = \Gamma_{(a_\Gamma,\beta_\Gamma)} = \Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)} + \Gamma_{(a_\Gamma,\beta_\Gamma)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]},$$

(38) $$\Gamma_{(a_\Gamma+t,\beta_\Gamma+t)} = \Gamma_{(a_\Gamma,\beta_\Gamma)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]} + \Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]}.$$

---

10) „$\underset{G}{\Rightarrow}$“ désigne la convergence uniforme dans G.

Les ensembles du second membre de (37) sont disjoints et il en est de même pour (38); car, si la caractéristique Γ n'est pas fermée, la fonction $X_\Gamma(t)$ est réversible dans (a_Γ, β_Γ) et dans $(a_\Gamma+t, \beta_\Gamma+t)$; au cas où la caractéristique Γ est fermée, on a $a_\Gamma = -\infty$, $\beta_\Gamma = \infty$, et, par conséquent, $\Gamma_{(a_\Gamma, a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)} = 0$, $\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]} = 0$. On a donc, d'après (35)-(38), la suivante décomposition de G et G_t en deux ensembles disjoints:

(39) $$G = Z_- + Z_0, \qquad G_t = Z_0 + Z_+,$$

où

(40) $$Z_- = \sum_{\Gamma \epsilon R} \Gamma_{(a_\Gamma, a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)},$$

(41) $$Z_+ = \sum_{\Gamma \epsilon R} \Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]},$$

(42) $$Z_0 = \sum_{\Gamma \epsilon R} \Gamma_{(a_\Gamma,\beta_\Gamma)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]}.$$

Posons pour $E \subset S$

(43) $$Z_-(E) = \sum_{P_\Gamma \epsilon E} \Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)}, \qquad Z_+(E) = \sum_{Q_\Gamma \epsilon E} \Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]}.$$

On voit que

(44) $$Z_-(E_1+E_2) = Z_-(E_1) + Z(E_2), \qquad Z_+(E_1+E_2) = Z_+(E_1) + Z_+(E_2).$$

Les extrémités gauches de deux caractéristiques différentes de R sont différentes et il en est de même pour leurs extrémités droites; on a donc

(45) $$Z_-(E_1)\cdot Z_-(E_2) = 0 \quad \text{et} \quad Z_+(E_1)\cdot Z_+(E_2) = 0, \quad \text{lorsque} \quad E_1 \cdot E_2 = 0.$$

On a

(46) $$Z_- = Z_-(S),$$

car $P_\Gamma \epsilon S$ (en tant qu'il existe) et si P_Γ n'existe pas, $a_\Gamma = -\infty$ et, par suite, l'ensemble $\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)}$ du deuxième membre de (40) est vide. On a pareillement

(47) $$Z_+ = Z_+(S).$$

Il résulte de (1) et (7) que

(48) $$S = C + X(\Omega).$$

Désignons par Ω_ε^* l'ensemble de points de Ω dont la distance de la frontière de Ω est $<\varepsilon$. L'ensemble $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon^*$ est fermé et on a, d'après (8),

(49) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^*} |F||A|\,dU = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} FA\,dU = \int_{\Omega} FA\,dU.$$

Soient

(50) $\Omega_-(\varepsilon)$ l'ensemble de points de Ω_ε pour lesquels $FA \leqslant -\varepsilon$,

(51) $\Omega_+(\varepsilon)$ l'ensemble de points de Ω_ε pour lesquels $FA \geqslant \varepsilon$,

(52) $\Omega_0(\varepsilon)$ l'ensemble de points de Ω_ε pour lesquels $|FA| < \varepsilon$.

On a donc

(53) $$\Omega_\varepsilon = \Omega_-(\varepsilon) + \Omega_0(\varepsilon) + \Omega_+(\varepsilon)$$

et par suite, selon (48),

$$S = C + X(\Omega_\varepsilon^*) + X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big) + X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big) + X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big),$$

d'où en vertu de (44)-(47) on obtient la décomposition de Z_- et Z_+ en ensembles disjoints:

$$Z_- = Z_-(C) + Z_-\big(X(\Omega_\varepsilon^*)\big) + Z_-\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big) + Z_-\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big) + Z_-\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big),$$

(54)

$$Z_+ = Z_+(C) + Z_+\Big(X(\Omega_\varepsilon^*)\Big) + Z_+\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big) + Z_+\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big) + Z_+\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big).$$

Puisque

$$\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t](a_\Gamma,\beta_\Gamma)} \subset \Gamma_{[a_\Gamma,a_\Gamma+t]} = \Phi([0,t],P_\Gamma),$$

$$\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)-(a_\Gamma,a_\Gamma+t]} \subset \Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t]} = \Phi([0,t],Q_\Gamma),$$

pourvu que P_Γ resp. Q_Γ existe, on a, d'après (43), $Z_-(C) \subset \Phi([0,t],C)$, $Z_+(C) \subset \Phi([0,t],C)$, d'où, selon (26)

(55) $$m\big(Z_-(C)\big) = m\big(Z_+(C)\big) = 0.$$

On a

(56) $$\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t]} = \Psi\big((0,t],U\big) \quad \text{lorsque} \quad P_\Gamma = X(U),$$
$$\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)} = \Psi\big([0,t),U\big) \quad \text{lorsque} \quad Q_\Gamma = X(U),$$

d'où, d'après (43),

(57) $$Z_-\big(X(\Omega_\varepsilon^*)\big) \subset \Psi\big((0,t],\Omega_\varepsilon^*\big), \qquad Z_+\big(X(\Omega_\varepsilon^*)\big) \subset \Psi\big([0,t),\Omega_\varepsilon^*\big),$$

(58) $$Z_-\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big) \subset \Psi\big((0,t],\Omega_0(\varepsilon)\big), \qquad Z_-\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big) \subset \Psi\big([0,t),\Omega_0(\varepsilon)\big).$$

$\Omega_-(\varepsilon) + \Omega_+(\varepsilon)$ étant un ensemble dans lequel $FA \neq 0$, fermé et contenu dans Ω, il existe, selon (18) (en posant $A = \Omega_-(\varepsilon) + \Omega_+(\varepsilon)$), un $\tau_1 \epsilon (0,\tau_0)$ tel que $\Phi\big(t, X(U)\big)$ non ϵS, lorsque $0 < |t| \leqslant \tau_1$ et $U \epsilon \Omega_-(\varepsilon) + \Omega_+(\varepsilon)$. Il en résulte que, si $P_\Gamma \epsilon X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)$ ou $P_\Gamma \epsilon X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)$, la caractéristique $\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+\tau_1)}$

n'a pas de points communs avec S, d'où il vient $a_\Gamma+\tau_1<\beta_\Gamma$ et, par conséquent (cf. (43)),

(59) $$Z_-\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)=\sum_{P_\Gamma\in X(\Omega_-(\varepsilon))}\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t]},\qquad Z_-\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big)=\sum_{P_\Gamma\in X(\Omega_+(\varepsilon))}\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t)}$$

lorsque $0<t<\tau_1$; pareillement

(60) $$Z_+\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)=\sum_{Q_\Gamma\in X(\Omega_-(\varepsilon))}\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)},\qquad Z_+\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big)=\sum_{Q_\Gamma\in X(\Omega_+(\varepsilon))}\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)},$$

lorsque $0<t<\tau_1$. Comme $FA<0$ pour $U\in\Omega_-(\varepsilon)$, le vecteur F est dirigé à l'intérieur de G, donc chaque point $X(U)$, où $U\in\Omega_-(\varepsilon)$, est l'extrémité gauche d'une caractéristique Γ de R: $X(U)=P_\Gamma$, et il n'est pas l'extrémité droite d'aucune caractéristique de R. Il s'ensuit, d'après (56), que

$$\sum_{P_\Gamma\in X(\Omega_-(\varepsilon))}\Gamma_{(a_\Gamma,a_\Gamma+t]}=\sum_{U\in\Omega_-(\varepsilon)}\Psi\big((0,t],U\big)\quad\text{et}\quad\sum_{Q_\Gamma\in X(\Omega_-(\varepsilon))}\Gamma_{[\beta_\Gamma,\beta_\Gamma+t)}=0.$$

On a donc, d'après (59) et (60),

(61) $$Z_-\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)=\Psi\big((0,t],\Omega_-(\varepsilon)\big),\qquad Z_+\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)=0.$$

On obient d'une façon analogue les relations

(62) $$Z_+\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big)=\Psi\big([0,t),\Omega_+(\varepsilon)\big),\qquad Z_-\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big)=0.$$

On a

$$m\Big(\Psi\big((0,t],\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)=\int_{(0,t]\times\Omega_-(\varepsilon)}\left|\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\right|dt\,dU=\int_0^t\left(\int_{\Omega_-(\varepsilon)}\left|\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\right|dU\right)dt,$$

car, d'après (19), Ψ est une homéomorphie dans $[0,\tau_1]\times\big(\Omega_-(\varepsilon)+\Omega_+(\varepsilon)\big)$. Puisque, selon (17) et (13) ($|\partial\Psi/\partial(t,U)|$ étant continue dans l'ensemble borné, fermé, $[0,\tau_0]\times\Omega_\varepsilon$),

(63) $$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\underset{\Omega_\varepsilon}{\rightrightarrows}FA\qquad\text{pour}\quad t\to0$$

et on a $FA<0$ dans $\Omega_-(\varepsilon)$, alors

(64) $$\frac{1}{t}\,m\Big(\Psi\big((0,t],\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big)\to-\int_{\Omega_-(\varepsilon)}FA\,dU,\qquad\text{lorsque}\quad t\to0.$$

D'une façon analogue, on prouve que

(65) $$\frac{1}{t}\,m\Big(\Psi\big([0,t),\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big)\to\int_{\Omega_+(\varepsilon)}FA\,dU,\qquad\text{lorsque}\quad t\to0.$$

Il existe un τ_2 tel que $0<\tau_2<\tau_1$ et

(66) $$m\Big(\Psi\big([0,t],\Omega_\varepsilon^*\big)\Big)\leqslant\int_0^t\left(\int_{\Omega_\varepsilon^*}\left|\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\right|dU\right)dt\leqslant2t\int_{\Omega_\varepsilon^*}|F|\,|A|\,dU$$

pour $0<t<\tau_2$[11]), car, en vertu de (17),

$$\left|\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\right|\leqslant\left|\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right|\left|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]^{-1}F\right||A|\quad\text{et}\quad\left|\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right|\left|\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right]^{-1}F\right|\leqslant2|F|$$

pourvu que t soit suffisamment petit. Enfin, d'après (52) et (63), il existe un τ_3, $0<\tau_3<\tau_2$, tel que

(67) $$m\Big(\Psi\big([0,t],\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big)\leqslant\int_0^t\left(\int_{\Omega_0(\varepsilon)}\left|\left|\frac{\partial\Psi}{\partial(t,U)}\right|\right|dU\right)dt\leqslant t\cdot2\varepsilon m\big(\Omega_0(\varepsilon)\big),$$

lorsque $0<t<\tau_3$. Posons

$$Z_-(\varepsilon)=Z_-\Big(X\big(\Omega_-(\varepsilon)\big)\Big),\qquad Z_+(\varepsilon)=Z_+\Big(X\big(\Omega_+(\varepsilon)\big)\Big),$$
$$B_-(\varepsilon)=Z_-(C)+Z_-\big(X(\Omega_\varepsilon^*)\big)+Z_-\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big),$$
$$B_+(\varepsilon)=Z_+(C)+Z_+\big(X(\Omega_\varepsilon^*)\big)+Z_+\Big(X\big(\Omega_0(\varepsilon)\big)\Big).$$

On a alors, selon (39), (54), (61), (62),

(68) $$G=Z_-(\varepsilon)+B_-(\varepsilon)+Z_0\qquad\text{et}\qquad G_t=Z_+(\varepsilon)+B_+(\varepsilon)+Z_0$$

(les ensembles des seconds membres étant disjoints), où, d'après (61), (62), (64), (65),

(69) $$\frac{1}{t}\,m\big(Z_-(\varepsilon)\big)\to-\int_{\Omega_-(\varepsilon)}FA\,dU,\qquad\frac{1}{t}\,m\big(Z_+(\varepsilon)\big)\to\int_{\Omega_+(\varepsilon)}FA\,dU,$$

lorsque $t\to0$ et, d'après (55), (57), (66), (67),

(70) $$\frac{1}{t}\,m_e\big(B_-(\varepsilon)\big),\ \frac{1}{t}\,m_e\big(B_+(\varepsilon)\big)\leqslant2\int_{\Omega_\varepsilon^*}|F|\,|A|\,dU+2\varepsilon m\big(\Omega_0(\varepsilon)\big),$$

lorsque $0<t<\tau_3$[12]). Il résulte de (68) (en s'appuyant sur la for-

[11]) Nous nous appuyons sur l'inégalité $m(T(Z))\leqslant\int_Z||\partial T/\partial X||\,dX$; cf. par exemple T. Ważewski [4], § 14, Corollaire 1.

[12]) „m_e" désigne la mesure extérieure au sens de Lebesgue.

mule $m(A)-m(B)=m(A-B)-m(B-A)$) que

$$m(G_t)-m(G)=m\big(Z_+(\varepsilon)\big)+m\big(B_+(\varepsilon)+Z_0\big)-m\big(Z_-(\varepsilon)\big)-m\big(B_-(\varepsilon)+Z_0\big)$$
$$=m\big(Z_+(\varepsilon)\big)-m\big(Z_-(\varepsilon)\big)+m\big(B_+(\varepsilon)-B_-(\varepsilon)\big)-m\big(B_-(\varepsilon)-B_+(\varepsilon)\big),$$

d'où, en vertu de (70).

$$\left|\frac{m(G_t)-m(G)}{t}-\frac{m\big(Z_+(\varepsilon)\big)-m\big(Z_-(\varepsilon)\big)}{t}\right|\leqslant 4\int_{\Omega_\varepsilon^*}|F|\,|A|\,dU+4\varepsilon m\big(\Omega_0(\varepsilon)\big).$$

En faisant tendre t vers 0 on obtient de (34) et (69), à la limite, l'inégalité

$$\left|\int_G \operatorname{div} F\,dX-\int_{\Omega_-(\varepsilon)+\Omega_+(\varepsilon)} FA\,dU\right|\leqslant 4\int_{\Omega_\varepsilon^*}|F|\,|A|\,dU+4\varepsilon m\big(\Omega_0(\varepsilon)\big).$$

Mais, selon (52),

$$\left|\int_{\Omega_0(\varepsilon)} FA\,dU\right|\leqslant \varepsilon m\big(\Omega_0(\varepsilon)\big),$$

donc, d'après (53),

$$\left|\int_G \operatorname{div} F\,dX-\int_{\Omega_\varepsilon} FA\,dU\right|\leqslant 4\int_{\Omega_\varepsilon^*}|F|\,|A|\,dU+5\varepsilon m(\Omega),$$

d'où, en vertu de (49), il vient

$$\int_G \operatorname{div} F\,dX=\int_\Omega FA\,dU, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 2. Nous désignerons respectivement par $\operatorname{Fr} E$ et $\operatorname{int} E$ la frontière et l'intérieur de E.

Conservons les hypothèses (1)-(4) sur G et admettons que

(71) $$|F|<M \quad \text{dans } G,$$

(72) $$\int_G |\operatorname{div} F|\,dX<\infty$$

et que F soit de la classe C^1 dans un ensemble ouvert $G_2\supset G+\sum S^{(\nu)}$ (alors F peut ne pas avoir de limite à aucun point de C).

Soit $\varepsilon>0$. Il existe des cubes $Q_1',Q_2',\dots,Q_{n_0}'$ de côtés $k_1',k_2',\dots,k_{n_0}'<\varepsilon$ tels que $C\subset\sum Q_i'$ et $\sum k_i'^{\,n-1}<\varepsilon/2^n nM$. Soit Q_i un cube fermé de même centre que Q_i', de côté $k_i>k_i'$ et $k_i<2k_i'$ et tel que l'ensemble $S\operatorname{Fr}Q_i$ soit de mesure à $n-1$ dimensions nulle (un tel cube existe, car en cas contraire l'ensemble S contiendrait des ensembles de mesure à $n-1$ dimensions positive, où la famille de ces ensembles aurait la puissance du continu; mais c'est impossible, puisque S est la somme finie ou dénombrable d'ensembles qui ont chacun la mesure à $n-1$ dimensions finie). Posons $F_\varepsilon=\sum_{i=1}^{n_0} Q_i$, $G_\varepsilon=G-F_\varepsilon$ et désignons par m_{n-1} l'aire d'une surface à $n-1$ dimensions. On a

(73) $$m_{n-1}(\operatorname{Fr} F_\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon}{M},$$

(74) $S\operatorname{Fr} F_\varepsilon$ est de mesure à $n-1$ dimensions nulle,

(75) $$C=\lim_{\nu\to\infty} F_{\varepsilon_\nu} \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon_\nu\to 0,$$

(76) $$\operatorname{Fr} G_\varepsilon=(S-F_\varepsilon)+G\operatorname{Fr}F_\varepsilon+C_\varepsilon\,{}^{13)},$$

où $S-F_\varepsilon$, $G\operatorname{Fr}F_\varepsilon$ sont ouverts relativement à $\operatorname{Fr}G_\varepsilon$, l'ensemble C_ε est fermé, contenu dans $S\operatorname{Fr}F_\varepsilon$ et, par conséquent (cf. (74)), de mesure à $n-1$ dimensions nulle. L'ensemble $S-F_\varepsilon$ étant ouvert relativement à $\sum S^{(\nu)}$, il est une somme finie ou dénombrable de surfaces, qui sont données par la représentation (7) dans un ensemble ouvert $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$. On a, d'après (75), $\lim_{\nu\to\infty}(S-F_{\varepsilon_\nu})=\sum S^{(\nu)}$ pour $\varepsilon_\nu\to 0$, d'où il résulte que

(77) $$\Omega=\lim_{\nu\to\infty}\Omega_{\varepsilon_\nu} \quad \text{et} \quad G=\lim_{\nu\to\infty}G_{\varepsilon_\nu} \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon_\nu\to 0.$$

On a $\operatorname{Fr}F_\varepsilon=\sum\Pi_j=\sum\Pi_j^0+C'$, où Π_j sont des pavés à $n-1$ dimensions, Π_j^0 leur intérieurs et C' est la somme de leur côtés, donc un ensemble de mesure à $n-1$ dimensions nulle. $G\Pi_j^0$ sont des surfaces ouvertes relativement à $G\operatorname{Fr}F_\varepsilon$ donc relativement à $\operatorname{Fr}F_\varepsilon$ et on a, en vertu de (71) et (73),

(78) $$\Big|\sum\int_{G\Pi_j^0} FN\,d\sigma\Big|\leqslant\sum\int_{G\Pi_j^0}|F|\,d\sigma\leqslant\varepsilon,$$

où N est un vecteur unité normal à Π_j. On obtient enfin

$$\operatorname{Fr}G_\varepsilon=(S-F_\varepsilon)+\sum G\Pi_j^0+GC'+C_\varepsilon,$$

où $(S-F_\varepsilon)+\sum G\Pi_j^0$ est une somme finie ou dénombrable de surfaces de la classe C^1, ouvertes relativement à $\operatorname{Fr}G_\varepsilon$ et $GC'+C_\varepsilon$ est un ensemble de mesure à $n-1$ dimensions nulle; F est de la classe C^1 dans $G_2\supset\overline{G}_\varepsilon$ et on a, selon (8) et (78),

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|F|\,|A|\,dU+\sum\int_{G\Pi_j^0}|F|\,d\sigma<\infty.$$

[13]) Nous nous appuyons sur la formule: $\operatorname{Fr}AB=\operatorname{Fr}A\operatorname{int}B+\operatorname{Fr}B\operatorname{int}A+(\overline{A}\overline{B}-\operatorname{int}A-\operatorname{int}B)$ dans laquelle $\operatorname{Fr}A\operatorname{int}B$ et $\operatorname{Fr}B\operatorname{int}A$ sont ouverts relativement à $\operatorname{Fr}AB$ et $\overline{AB}-\operatorname{int}A-\operatorname{int}B\subset\operatorname{Fr}A\operatorname{Fr}B$.

On a donc
$$\int_{G_\varepsilon} \operatorname{div} F\, dX = \int_{\Omega_\varepsilon} FA\, dU + \sum \int_{G\Pi_j^0} FN\, d\sigma.$$
D'après (5), (72) et (78), en faisant tendre ε_ν vers zéro, en obtient à la limite[14])
$$\int_G \operatorname{div} F\, dX = \int_\Omega FA\, dU,$$
et alors la formule de Green reste vraie.

Supprimons maintenant l'hypothèse que F soit de la classe C^1 dans $G_2 \supset G + \sum S^{(\nu)}$ et supposons que F soit de la classe C^1 dans G et continue dans $G + \sum S^{(\nu)}$.

Nous démontrerons les lemmes suivants:

Lemme I. *Si $g(U)$ est une fonction semi-continue inférieurement et positive dans un ensemble ouvert et borné Ω, il existe une fonction $\lambda(U)$ de la classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ telle que $\lambda = 0$ dans* $\operatorname{Fr}\Omega$, $0 < \lambda < g$ *et* $|\partial\lambda/\partial u_i| < g$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *dans* Ω.

Démonstration. On a

(79) $$\varrho(U) = \varrho(U, \operatorname{Fr}\Omega) \leqslant d = \sup_{U \in \Omega} \varrho(U, \operatorname{Fr}\Omega) < \infty \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Il existe une fonction φ de la classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ telle que $\varphi = 0$ dans $\operatorname{Fr}\Omega$ et

(80) $$0 < \varphi(U) < \varrho(U) \quad \text{dans} \quad \Omega^{15}).$$

Posons
$$\gamma(\varrho) = \inf_{\varrho \leqslant \varrho(U)} g(U),$$

(81)
$$M(\varrho) = 1 + d + \sup_{\varrho \leqslant \varrho(U)} \max\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\right|\right)$$
pour $\varrho \in (0, d]$. Les fonctions $\gamma(\varrho)$, $1/M(\varrho)$ étant croissantes et positives, il en est de même avec la fonction $\gamma(\varrho)/M(\varrho)$. Il existe donc une fonction $\alpha(\varrho)$ continue et strictement croissante dans $[0, d]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $0 < \alpha < \gamma/M$ dans $(0, d]$. En posant $\beta(\varrho) = \int_0^\varrho \alpha(t)\, dt$, on a d'après (79) et (80), $\beta(\varrho) \leqslant \varrho\alpha(\varrho) \leqslant \gamma(\varrho)$. Maintenant il suffit de poser $\lambda(U) = \beta(\varphi(U))$;

[14]) L'hypothèse (72) peut être remplacée par la condition que $\int_\sigma \operatorname{div} F\, dX$ existe (par exemple il suffit qu'on ait $\operatorname{div} F \geqslant 0$).

[15]) A cet effet il suffit de modifier la construction de E. Kamke ([2], p. 303), en effectuant sur le réseau $\mathfrak{A}_n$ la translation correspondant a un vecteur $(q_n, \ldots, q_n)$, où q_n/q_m est un nombre irrationel pour $n \neq m$, et en multipliant la fonction construite par une constante convenable.

car cette fonction est de la classe C^1 dans $\bar{\Omega}$, elle s'annule dans $\operatorname{Fr}\Omega$ et enfin, d'après (80) et (81), on a
$$0 < \lambda(U) < \beta(\varrho(U)) \leqslant \gamma(\varrho(U)) \leqslant g(U),$$
$$\left|\frac{\partial\lambda}{\partial u_i}\right| = |\alpha(\varphi(U))| \cdot \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right| < \gamma(\varphi(U)) \leqslant \gamma(\varrho(U)) \leqslant g(U).$$

Lemme II. *Soit $g(U)$ une fonction continue dans un ensemble ouvert, borné Ω et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $\varphi(U)$ de la classe C^1 dans Ω telle que $|g(U) - \varphi(U)| < \varepsilon$ dans Ω.*

Démonstration. Soit $\delta(U)$ la borne supérieure des nombres positifs δ pour lesquels on a $|g(V) - g(U)| < \varepsilon$, lorsque $|u_i - v_i| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$. On voit que $\delta(U)$ est une fonction positive et semi-continue inférieurement dans Ω; il en est de même avec la fonction
$$\min(\delta(U),\ \varrho(U, \operatorname{Fr}\Omega)).$$

En vertu du lemme I existe une fonction λ de la classe C^1 dans Ω telle que $0 < \lambda(U) < \min(\delta(U), \varrho(U, \operatorname{Fr}\Omega))$. On a donc $|g(V) - g(U)| < \varepsilon$, lorsque $|v_i - u_i| < \lambda(U)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Il suffit de poser
$$\varphi(U) = \int_{|v_i - u_i| < \lambda(U)} g(V)\, dV \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

D'après le lemme II il existe une fonction vectorielle
$$B(U) = (b_1(U), \ldots, b_n(U))$$
de la classe C^1 dans Ω telle que
$$\left|b_i(U) - \frac{a_i(U)}{|A(U)|}\right| < \frac{1}{3\sqrt{n}}.$$
On a donc

(82) $$\left|B - \frac{A}{|A|}\right| < \frac{1}{3}, \qquad |B| < \frac{4}{3}, \qquad AB > 0.$$

Puisque $A/|A|$ est un vecteur normal à S et l'ensemble $\sum S^{(\nu)}$ est ouvert relativement à S, on montre facilement que
$$\frac{1}{|t|}\varrho\left(X(U) - t\frac{A(U)}{|A(U)|},\ S\right) \to 1 \quad \text{pour} \quad U \to U_0 \in \Omega \quad \text{et} \quad t \to 0.$$

D'après (82), on a $\varrho(X - tA/|A|, X - tB) < t/3$, donc si U est donné et si $|t|$ est suffisamment petit, on a $X - tB \in G$ lorsque $t > 0$ et $X - tB \in -\bar{G}$ lorsque $t < 0$. De même, il en résulte que

(83) $$\limsup_{t \to 0,\ U \to U_0} \frac{1}{|t|}\varrho(X(U) - tB(U), S) \geqslant \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \qquad \text{lorsque} \quad U_0 \in \Omega.$$

Considérons la transformation

$$X = T(t, U) = X(U) - tB(U).$$

Puisque

$$\left|\frac{\partial T}{\partial(t, U)}\right|_{t=0,\, U=U_0} = -A(U_0)B(U_0) < 0,$$

la transformation T est une homéomorphie au voisinage de $(0, U_0)$. Désignons par $\varphi_0(U_0)$ la borne supérieure des nombres η tels que $\varrho(X-tB, S)/|t| > 1/2$ et T soit une homéomorphie avec le jacobien <0, dans le pavé $|t|<\eta$, $|U-U_0|<\eta$. On a donc

(84) $$\varrho(X-tB, S) > \frac{1}{2}|t| \quad \text{lorsque} \quad |t| < \varphi_0(U),$$

(85) $$X - tB \in G \quad \text{lorsque} \quad 0 < t < \varphi_0(U),$$
$$X - tB \in -\bar{G} \quad \text{lorsque} \; -\varphi_0(U) < t < 0.$$

En vertu de (83) la fonction $\varphi_0(U)$ existe, est positive et semi-continue inférieurement dans Ω. D'après le lemme I il existe une fonction continue λ_0 telle que $0 < \lambda_0 < \varphi_0$ dans Ω. T est donc une homéomorphie et $\varrho(X-tB, S) > 1/2$ dans un ensemble ouvert contenant la fermeture du pavé P_{U_0}: $|U-U_0| < \lambda_0(U_0)$, $|t| < \lambda_0(U_0)$. Il en résulte que

(86) $$\varphi(U) = \min\left(\frac{\varrho(X(U), \operatorname{Fr} T(P_U))}{5|B(U)|}, \lambda_0(U)\right)$$

est une fonction continue et positive dans Ω.

Nous affirmons que T est une homéomorphie dans l'ensemble $|t| < \varphi(U)$, $U \in \Omega$. En effet, supposons par impossible qu'il existe deux points $(t_1, U_1), (t_2, U_2)$ tels que

(87) $$|t_1| < \varphi(U_1), \qquad |t_2| < \varphi(U_2),$$
$$X(U_1) - t_1 B(U_1) = X(U_2) - t_2 B(U_2) \quad \text{et} \quad (t_1, U_1) \neq (t_2, U_2).$$

T étant une homéomorphie dans P_{U_1}, on a $|U_2 - U_1| < \lambda_0(U_1)$ et $|t_2| \geqslant \lambda_0(U_1)$, ou $|U_2 - U_1| \geqslant \lambda_0(U_1)$; dans le premier cas

$$X(U_2) + \lambda_0(U_1)\, B(U_2) \in \operatorname{Fr} T(P_{U_1}),$$

dans le second cas $X(U_2) = T(0, U_2)$ non $\in T(P_{U_1})$, donc, parce qu'on a (cf. (86) et (87)), $X(U_2) - t_2 B(U_2) = T(t_1, U_1) \in T(P_{U_1})$, le segment aux extrémités $X(U_2)$ et $X(U_2) - t_2 B(U_2)$ et l'ensemble $\operatorname{Fr} T(P_{U_1})$ possèdent un point commun, d'où il résulte que

$$\varrho(X(U_2) - t_2 B(U_2), \operatorname{Fr} T(P_{U_1})) \leqslant |t_2|\,|B(U_2)|.$$

D'après (86), (87), on a

$$\varrho(X(U_1), X(U_1) - t_1 B(U_1)) \leqslant \frac{1}{5}\varrho(X(U_1), \operatorname{Fr} T(P_{U_1})),$$

donc

$$\varrho(X(U_1) - t_1 B(U_1), \operatorname{Fr} T(P_{U_1})) \geqslant \frac{4}{5}\varrho(X(U_1), \operatorname{Fr} T(P_{U_1}))$$

et, par conséquent, en vertu de (82),

$$\varrho(X(U_2) - t_2 B(U_2), S) \leqslant \varrho(X(U_1) - t_1 B(U_1), X(U_1))$$
$$\leqslant \frac{1}{5}\varrho(X(U_1), \operatorname{Fr} T(P_{U_1})) \leqslant \frac{1}{4}\varrho(X(U_1) - t_1 B(U_1), \operatorname{Fr} T(P_{U_1}))$$
$$\leqslant \frac{1}{4}|t_2|\,|B(U_2)| < \frac{1}{2}|t_2|.$$

Mais c'est impossible, car, d'après (84) et (87), on a

$$\varrho(X(U_2) - t_2 B(U_2), S) > \frac{|t_2|}{2}.$$

On a donc

(88) *la transformation T est une homéomorphie avec le jacobien <0 dans l'ensemble $|t| < \varphi(U)$, $U \in \Omega$;*

$$X(U) - tB(U) \in \begin{cases} G & \textit{lorsque} \quad 0 < t < \varphi(U), \\ -\bar{G} & \textit{lorsque} \quad -\varphi(U) < t < 0. \end{cases}$$

D'après le lemme I il existe une fonction $\lambda(U)$ de la classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ telle que

(89) $$\lambda = 0 \quad \text{dans} \quad \operatorname{Fr}\Omega \quad \text{et} \quad 0 < \lambda(U) < \varphi(U) \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Soit $0 < \tau < 1$. Désignons par $S_\tau^{(\nu)}$ la surface de la classe C^1

$$X = X(U) - \tau\lambda(U)B(U), \quad \text{où} \quad U \in D^{(\nu)},$$

et par H_τ l'ensemble ouvert $X = X(U) - tB(U)$, où $U \in \Omega$, $0 < t < \lambda(U)\tau$.

On voit que l'ensemble $C + \sum_\nu S_\tau^{(\nu)} + H_\tau + \sum_\nu S^{(\nu)}$ est fermé, donc l'ensemble

$$G_\tau = G - \left(C + \sum_\nu S_\tau^{(\nu)} + H_\tau + \sum_\nu S^{(\nu)}\right)$$

est ouvert. $H_\tau + \sum S^\nu$ étant contenu dans l'ensemble ouvert $X = X(U) - tB(U)$, où $U \in \Omega$ et $|t| < \lambda(U)\tau$, qui est disjoint avec G_τ, on a $\operatorname{Fr} G_\tau \subset C + \sum S_\tau^{(\nu)}$. D'autre part, on voit que chaque point de $C + \sum_\nu S_\tau^{(\nu)}$ appartient à $\operatorname{Fr} G_\tau$. On a donc $\operatorname{Fr} G_\tau = C + \sum_\nu S_\tau^{(\nu)}$. On vérifie que G_τ satisfait aux hypothèses (1)-(4); si A_τ est le vecteur normal à $S_\tau^{(\nu)}$, donné par (4) (en remplaçant $X^{(\nu)}$ par $X-\tau\lambda B$), l'expression $-\lambda\tau A_\tau B$ est égale au jacobien de T, d'où, d'après (88), on a $A_\tau B>0$; puisque $X-\tau\lambda B+tB\in H_\tau$ pour t suffisamment petit et positif, le vecteur B est dirigé à l'extérieur de G_τ et, par conséquent, il en est de même avec le vecteur A_τ. Les hypothèses (71) et (72) étant satisfaites par G elles sont satisfaites par G_τ. En outre, F est de la classe C^1 dans $G\supset G_\tau+\sum_\nu S_\tau^{(\nu)}$. Il reste à montrer que G_τ satisfait à l'hypothèse (5) aussi.

On a

$$|A_\tau|\cdot|F(X-\tau\lambda B)|=\Phi\left(U,\tau\lambda,\tau\frac{\partial\lambda}{\partial u_1},\ldots,\tau\frac{\partial\lambda}{\partial u_{n-1}}\right), \tag{90}$$

où $\Phi(U,\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1})$ est une fonction continue pour $U\in\Omega$, $0\leqslant\xi<\varphi(U)$ et $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1}$ quelconques. Soit $\psi(U)$ la borne supérieure des nombres ζ tels que $\zeta<\varphi(U)$ et

$$|\Phi(V,\xi,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})-\Phi(U,0,0,\ldots,0)|<1$$

lorsque $|V-U|<\zeta$, $0\leqslant\xi<\zeta$ et $|\eta_i|<\zeta$, $(i=1,2,\ldots,n-1)$. On vérifie facilement que $\psi(U)$ est une fonction semi-continue inférieurement et telle que $0<\psi(U)\leqslant\varphi(U)$ dans Ω. D'après le lemme I, on peut choisir une fonction λ de façon qu'on ait $0<\lambda<\psi$, $|\partial\lambda/\partial u_i|<\psi$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ dans Ω. On a alors, d'après (90),

$$\big||A_\tau|\cdot|F(X-\tau\lambda B)|-|A|\cdot|F|\big|<1,$$

d'où il résulte que

$$|F(X-\tau\lambda B)A_\tau|\leqslant|F||A|+1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega(|F||A|+1)\,dU<\infty. \tag{91}$$

L'hypothèse (5) est donc satisfaite et

$$\int_{G_\tau}\operatorname{div}F\,dX=\int_\Omega F(X-\tau\lambda B)A_\tau\,dU.$$

Lorsque $\tau_n\to 0$, on a $G_{\tau_n}\to G$, et $F(X-\tau_n\lambda B)A_{\tau_n}\to F(X)A$ dans Ω, d'où d'après (72) et (91), on obtient à la limite

$$\int_G\operatorname{div}F\,dX=\int_\Omega FA\,dU.$$

On a donc

THÉORÈME. *Soit G un ensemble ouvert, borné, satisfaisant aux hypothèses (1)-(4) de § 1. Supposons qu'un champ vectoriel F soit de la classe C^1, borné dans G, continu dans $G+\sum S^{(\nu)}$ et qu'on ait*

$$\int_G|\operatorname{div}F|\,dX<\infty, \qquad \sum_\nu\int_{D^{(\nu)}}[|F(X^{(\nu)})||A^{(\nu)}|\,dU<\infty.$$

Ceci étant admis on a

$$\int_G\operatorname{div}F\,dX=\int_\Omega FA\,dU.$$

Remarque. L'hypothèse $\int_G|\operatorname{div}F|\,dX<\infty$ peut être remplacée par la condition que $\int_\Omega\operatorname{div}F\,dX$ existe (cf. renvoi (14)).

Publications citées

[1] F. Hausdorff, *Dimension und äußeres Maß*, Math. Ann. 79 (1919), p. 157-179.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[3] S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne 7, Warszawa 1937.

[4] T. Ważewski, *Sur les jacobiens asymptotiques et le changement de variables dans les intégrales multiples*, Bull. Acad. Polon. des Sc. et Lettres, Classe des Sc. Math. et Nat. Sér. A: Sc. Math. (1930), p. 249-299.