Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung für homogene Funktionen

von M. Kucharzewski (Kraków)

§ 1. Einleitende Definitionen und Sätze

Definition 1. Den Grenzwert

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{f(x_0+k\tau)-f(x_0)}{\tau}$$

nenne ich *die partielle Ableitung* der Funktion $f(x)$[1]) von n Veränderlichen im Punkte x_0 in der Richtung des Einheitsvektors k und bezeichne ihn im folgenden mit $f'_k(x_0)$.

Definition 2. Unter dem *i-ten Einheitsvektor* $(i=1,2,\ldots,n)$ verstehe ich denjenigen Einheitsvektor e_i $(i=1,2,\ldots,n)$, welcher δ_i^k $(k=1,2,\ldots,n)$ als k-te Komponente besitzt[2]); er wird mit e_i bezeichnet.

Nach Definition 1, ist die partielle Ableitung einer Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 in der Richtung des i-ten Einheitsvektors e_i eine gewöhnliche partielle Ableitung von $f(x)$ in x_0 nach der i-ten Veränderlichen. Diese partielle Ableitung bezeichne ich mit $f'_{e_i}(x_0)=f'_i(x_0)=\partial f(x_0)/\partial\xi^i$. Auf Grund der Definitionen 1 und 2 kann man folgende, leicht beweisbare Sätze aussprechen:

Satz 1.1. *Existiert eine partielle Ableitung von $f(x)$ in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors k, so existiert auch die partielle Ableitung von $f(x)$ in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors $-k$ und*

$$f'_{-k}(x_0)=-f'_k(x_0).$$

[1]) In dieser Note wende ich dieselben Bezeichnungen an, die ich in meiner Arbeit, *Die Differenzierbarkeit der homogenen Funktionen und die geometrischen Eigenschaften der Indicatrix von Carathéodory* (Einleitung, dieser Band, S. 222 - 252), eingeführt habe.

[2]) δ_i^k bedeutet das Symbol von Kronecker.

Definition 3. Unter *der Richtungsableitung* von $f(x)$ in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors k verstehe ich den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{\tau\to +0}\frac{f(x_0+k\tau)-f(x_0)}{\tau}.$$

Ich bezeichne ihn mit $f_k(x_0)$ (ohne Strich).

Satz 1.2. *Dann und nur dann besitzt $f(x)$ in x_0 eine partielle Ableitung in der Richtung des Einheitsvektors k, wenn beide Richtungsableitungen von $f(x)$ in x_0 in der Richtung der Einheitsvektoren k und $-k$ existieren und*

$$f_{-k}(x_0)=-f_k(x_0).$$

Definition 4. Die partielle Ableitung in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors k, der partiellen Ableitung in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors l, nenne ich die partielle Ableitung der zweiten Ordnung von $f(x)$ in x_0 und bezeichne sie mit $f''_{kl}(x_0)$.

Satz 1.3. *Jede in $x\neq o(0,\ldots,0)$ definierte, positiv-homogene Funktion $f(x)$ der Ordnung μ besitzt in x_0 partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in der Richtung des Einheitsvektors $r_0=\overline{ox}_0/|ox_0|$. Eine solche Ableitung der Ordnung ν lässt sich durch folgende Formel ausdrücken:*

$$f^{(\nu)}_{r_0\ldots r_0}(x_0)=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{|x_0|^\nu}f(x_0). \tag{1}$$

In allgemeinen kann man nicht auf die Existenz der Richtungsableitung in x_0 in der Richtung eines von r_0 linear unabhängigen Einheitsvektor schließen. In folgenden Paragraphen bringe ich den Satz 2.1, der die Zusammenhänge zwischen den Richtungsableitungen der positiv-homogenen Funktionen bestimmt.

§ 2. Die Zusammenhänge zwischen den Richtungsableitungen der positiv-homogenen Funktionen

Satz 2.1. *Besitzt eine positiv-homogene Funktion $f(x)$ der Ordnung μ, im Punkte $x_0\neq o$ eine Richtunsableitung in der Richtung des von $r_0=\overline{ox}_0/|ox_0|$ linear unabhängigen Einheitsvektors l, so besitzt $f(x)$ auch die Richtungsableitung in x_0 in der Richtung jedes, durch die Formel*

$$k=\lambda l+ar_0\,{}^{3)} \tag{2}$$

definierten Einheitsvektors k, wobei $\lambda\geqslant 0$.

[3]) Aus der Voraussetzung, daß k ein Einheitsvektor sein soll, folgt, daß die reellen Zahlen λ und a folgende Gleichung $1=\lambda^2+a^2+2(\lambda a)lr_0$ erfüllen müssen.

Die Richtungsableitung $f_k(x_0)$ läßt sich durch die Formel

$$f_k(x_0)=f_{\lambda l+a r_0}(x_0)=\lambda f_l(x_0)+af_{r_0}(x_0) \tag{3}$$

ausdrücken.

Beweis. Da in den Fällen $\lambda=0$ und $a=0$ die Behauptung des Satzes offensichtlich erfüllt ist, so können wir voraussetzen

$$\lambda>0 \quad \text{und} \quad a\neq 0. \tag{4}$$

Um den Satz zu beweisen, nehme ich an, daß die Funktion $f(x)$ im Punkte $x_0\neq 0$ die Richtungsableitung in der Richtung eines Einheitsvektors l besitzt, der von r_0 linear unabhängig ist, d. h. es existiert im Sinne der Definition 2 der Grenzwert

$$f_l(x_0)=\lim_{\sigma\to+0}\frac{f(x_0+l\sigma)-f(x_0)}{\sigma}.$$

Es seien λ und a zwei reelle Zahlen, die den Ungleichungen (4) genügen, derart, daß der durch die Formel (2) bestimmte Vektor k ein Einheitsvektor ist. Nach Definition 2

$$f_k(x_0)=\lim_{\tau\to+0}\frac{f(x_0+k\tau)-f(x_0)}{\tau}. \tag{5}$$

Jetzt betrachten wir bei beliebig gewähltem, aber festgehaltenem $\tau>0$, folgendes System von n-linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ϑ und σ

$$\vartheta(x_0+k\tau)-l\sigma=x_0. \tag{6}$$

Ist $\tau>0$ hinreichend klein, so besitzt das System (6) genau eine Lösung nach ϑ und σ, da der Rang der einfachen[4]) Matrix und der Rang der erweiterten Matrix gleich 2 sind. Setzt man nämlich $x_0=\varrho_0 r_0$, so erhält man

$$\Delta=[x_0+k\tau,-l]=[\varrho_0 r_0+\lambda\tau l+a\tau r_0,-l]=-(\varrho_0+a\tau)[r_0,l]\,^{5}). \tag{7}$$

[4]) Die Begriffe der einfachen und der erweiterten Matrix sind im Sinne von Schreier-Sperner, *Analytische Geometrie*, Bd I, 1931, S. 38, zu verstehen.

[5]) Sind a und b zwei Vektoren des n-dimensionalen ($n\geqslant 2$) Raumes, so verstehe ich unter $[a,b]$ eine beliebige 2-reihige Determinante von möglichst hohem Range, die man aus der Matrix der Komponenten der Vektoren a und b erhalten kann. Trotz seiner Vieldeutigkeit kann das Symbol keine Mißverständnisse verursachen, weil man die entsprechenden Rechnungen immer mit Hilfe geeigneter Determinanten durchführen kann. Ähnlich ist das Symbol $[a,b,c]$ zu verstehen.

Aus (7) folgt, daß für jedes hinreichend kleine $\tau>0$, $\Delta\neq 0$, (τ so klein, daß $\varrho_0+a\tau\neq 0$) der Rang der einfachen Matrix des Gleichungensystems (6) gleich 2 ist.

Wir erhalten

$$[x_0+k\tau,-l,x_0]=[(\varrho_0+a\tau)r_0+\lambda\tau l,-l,\varrho_0 r_0]=0;$$

der Rang der erweiterten Matrix ist also gleich 2. Man kann das Gleichungssystem (6) eindeutig nach ϑ und σ auflösen:

$$\vartheta=\frac{\Delta_\vartheta}{\Delta}=\frac{[x_0,-l]}{-(\varrho_0+a\tau)[r_0,l]}=\frac{\varrho}{\varrho_0+a\tau}, \qquad \sigma=\frac{\Delta_\sigma}{\Delta}=\frac{[x_0+k\tau,x_0]}{-(\varrho_0+a\tau)[r_0,l]}=\frac{\varrho_0\lambda\tau}{\varrho_0+a\tau}. \tag{8}$$

Ist $\tau>0$ hinreichend klein, so kann man mit Hilfe der Beziehungen (6) den Differenzenquotient der rechten Seite von (5) in folgender Form darstellen, wobei ϑ und σ durch die Formeln (8) gegeben sind:

$$\frac{f(x_0+k\tau)-f(x_0)}{\tau}=\frac{f[\vartheta(x_0+k\tau)]-\vartheta^\mu f(x_0)}{\vartheta^\mu\tau} \tag{9}$$

$$=\frac{f(x_0+l\sigma)-f(x_0)}{\vartheta^\mu\tau}+f(x_0)\frac{1-\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu\tau}=\frac{\sigma}{\vartheta^\mu\tau}\cdot\frac{f(x_0+l\sigma)-f(x_0)}{\sigma}+f(x_0)\frac{1-\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu\tau}.$$

Aus (8) erhält man

$$\frac{\sigma}{\vartheta^\mu\tau}\to\lambda, \quad \text{wenn} \quad \tau\to+0, \qquad \frac{1-\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu\tau}\to\frac{a\mu}{\varrho}, \quad \text{wenn} \quad \tau\to+0. \tag{10}$$

Gehen wir auf beiden Seiten von (9) zur Grenze, mit $\tau\to+0$, über, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (10) und auf Grund des Satzes 1.3. die Formel (3), w. z. b. w.[6]).

[6]) Der Satz 2.1 stellt eine Verallgemeinerung nachstehender Bemerkung von T. Ważewski dar: „Besitzt die positiv-homogene Funktion $f(x)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen die partielle Ableitung im Punkte $x_0\neq 0$ in der Richtung eines Einheitsvektors $l\neq\pm r_0$, so besitzt $f(x)$ in diesem Punkte x_0 die partielle Ableitung in der Richtung eines beliebigen Einheitsvektors k". Die Methode des Beweises des Satzes 2.1 ist eine Verallgemeinerung derjenigen Methode, die S. Gołąb zum Beweis der Eulerschen Gleichung in seiner Arbeit [1] angewandt hat.

§ 3. Folgerungen aus Satz 2.1. Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung

Da $f_{r_0}(x_0)=\mu f(x_0)/|x_0|$ nach Formel (1) ist, so kann man den Satz 2.1 folgendermassen aussprechen:

SATZ 3.1. *$f(x)$ sei eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$). Besitzt $f(x)$ die Richtungsableitung (im Punkte $x_0\neq 0$) in der Richtung des Einheitsvektors l, so besitzt sie auch in x_0 die Richtungsableitung in der Richtung jedes Einheitsvektors k, welcher den Bedingungen*

(11) $$x_0=\varkappa_0 k+\lambda_0 l,\qquad \varkappa_0\neq 0,\qquad \varkappa_0\lambda_0\leqslant 0$$

genügt. Diese beiden Richtungsableitungen befriedigen die Gleichung

(12) $$\mu f(x_0)=\varkappa_0 f_k(x_0)+\lambda_0 f_l(x_0).$$

Wir betrachten jetzt den Fall $n=2$. Zu diesem Zweck nehmen wir an:

(13) der Punkt $x_0(\xi_0^1,\xi_0^2)$ gehöre zum ersten Quadranten des Koordinatensystems mit o als Anfangspunkt und mit e_1 und e_2 als Einheitsvektoren.

Dann ist

(14) $$\xi_0^1\xi_0^2\geqslant 0.$$

Nehmen wir noch

(15) $$\xi_0^1\neq 0,\qquad k=e_1,\qquad l=-e_2$$

an, so sind die Beziehungen (11) erfüllt, wenn man

(16) $$\varkappa_0=\xi_0^1\quad\text{und}\quad\lambda_0=-\xi_0^2$$

setzt. In diesem Falle nimmt der Satz 3.1 folgende Form an:

SATZ 3.2. *$f(x)$ sei eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von zwei unabhängigen Veränderlichen (ξ^1,ξ^2). Hat $f(x)$ in dem, den Bedingungen (14) und (15) genügenden Punkte (13), die Richtungsableitung in der Richtung des Einheitsvektors $-e_2$, so besitzt $f(x)$ in diesem Punkte die Richtungsableitung in der Richtung des Einheitsvektors e_1, und diese Richtungsableitungen erfüllen folgende Gleichung*

(17) $$\mu f(x_0)=\xi_0^1 f_{e_1}(x_0)-\xi_0^2 f_{-e_2}(x_0).$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Gleichung (17) bei beliebiger Lage des Punktes x_0 in Bezug auf das Koordinatensystem gilt.

Die Formel (12) ist eine Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung für homogene Funktionen. Die Verallgemeinerung wird hier in drei Richtungen gemacht; einerseits betrifft sie Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ($n\geqslant 2$); anderseits treten in der Formel (12) statt der partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen in der Richtung Einheitsvektoren auf, die durch die Gleichung (11) miteinander verbunden sind; endlich ist die Formel (12) schon richtig, wenn nur eine Richtungsableitung von $f(x)$ in $x_0\neq 0$ existiert (in unserem Falle $f_l(x_0)$). Ich mache hier darauf aufmerksam, daß die Eulersche Gleichung

(18) $$\sum_{i=1}^{n}\xi_0^i f_i'(x_0)=\mu f(x_0)$$

sich nicht auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen verallgemeinern läßt; sogar dann nicht, wenn $f(x)$ in x_0 stetig ist und alle partiellen Ableitungen $f_i'(x_0)$ für $i=1,2,\ldots,n$ besitzt. Dies zeigte S. Gołąb in seiner Arbeit, [1].

Der Satz 2.1, 3.1 und die Formel (15) beziehen sich auf das Verhalten der Richtungsableitungen einer positiv-homogenen Funktion. Wir wollen jetzt den Satz 2.1 durch eine Folgerung ergänzen, die die partiellen Ableitungen von $f(x)$ betrifft. Zuerst ziehe ich eine einfache Folgerung.

FOLGERUNG 1. *Besitzt eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) im Punkte $x_0\neq 0$ beide Richtungsableitungen in der Richtung der Einheitsvektoren l und $-l$, so besitzt sie auch, in x_0, die Richtungsableitung in der Richtung eines jeden Einheitsvektors k, der durch die Formel bestimmt ist*

(19) $$k=\lambda l+ar_0,$$

wobei λ und a im Sinne der Fußnote 3 beliebig sind.

Beweis. Ist in (19) $\lambda\geqslant 0$, so erhält man aus Satz 2.1

(20) $$f_k(x_0)=\lambda f_l(x_0)+af_{r_0}(x_0).$$

Ist dagegen $\lambda<0$, so kann man $k=-\lambda(-l)+ar_0$ setzen. Dann folgt aus Satz 2.1 und aus der Existenz der Richtungsableitung in der Richtung des Einheitsvektors $-l$:

$$f_k(x_0)=-\lambda f_{-l}(x_0)+af_{r_0}(x_0).$$

Aus der Folgerung 1 und aus dem Satz 1.1 erhalten wir:

FOLGERUNG 2. *$f(x)$ sei eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$). Besitzt $f(x)$ im Punkte $x_0\neq 0$ die partielle Ableitung (nicht nur die Richtungsableitung) in der Richtung des Einheitsvektors l, so besitzt $f(x)$ in x_0 auch die partielle Ableitung in der Richtung jedes Einheitsvektors k, der durch die Beziehung*

(21) $$k=\lambda l_0+ar_0$$

bestimmt ist. Diese Ableitung $f_k'(x_0)$ läßt sich durch die Formel ausdrücken

(22) $$f_k'(x_0)=\lambda f_l'(x_0)+af_{r_0}'(x_0).$$

Im folgenden gebe ich eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine positiv-homogene Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) in $x_0\neq 0$ die Eulersche Gleichung (18) erfüllt. Da der Fall $n=2$ in Folge des Satzes 3.1 erledigt ist, wird nur der Fall $n\geqslant 3$ interessant sein, obwohl besagte Bedingung ganz allgemein ist. Zuerst muß ich einige Vorbereitungen treffen.

FOLGERUNG 3. *$f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$), welche positiv-homogen von der Ordnung μ ist, und es sei ein Punkt $x_0\neq o$. Mit H_{n-1} bezeichne ich eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene, die nicht durch o geht. Erfüllt also H_{n-1} die Gleichung*

$$a(x-x_0)=0,$$

so muß $ax_0\neq 0$ sein. Besitzt $f(x)$ in x_0 die Richtungsableitung in der Richtung jedes Einheitsvektors l, der in H_{n-1} liegt, so besitzt $f(x)$ die Richtungsableitung in x_0 in der Richtung eines beliebigen Einheitsvektors k, und zwischen diesen Richtungsableitungen ist folgende Beziehung gültig:

$$f_k(x_0)=\frac{\sigma}{ar_0}f_l(x_0)+\frac{ak}{ar_0}f_{r_0}(x_0), \tag{23}$$

wobei

$$\sigma=\varepsilon\sqrt{[(ar_0)k-(ak)r_0]^2} \quad \textit{und} \quad \varepsilon=\pm 1$$

(ε soll so gewählt werden, daß die Ungleichung $\sigma/ar_0\geqslant 0$ gilt).

Beweis. Ich nehme an, daß die Funktion $f(x)$ im Punkte $x_0\neq 0$ alle Richtungsableitungen in der Richtung derjenigen Einheitsvektoren besitzt, die in H_{n-1} gelegen sind, d. h. die die Gleichung

$$al=0 \tag{24}$$

erfüllen. Es sei mit k ein beliebiger Einheitsvektor bezeichnet. Die Folgerung 3 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß $f_k(x_0)$ existiert und sich durch die Formel (23) ausdrücken läßt. Zu diesem Zweck genügt es, gemäß des Satzes 2.1 und der Voraussetzung der Folgerung 3, einen Einheitsvektor l zu finden, der in H_{n-1} liegt und der die Bedingungen

$$k=\lambda l+ar_0, \qquad \lambda\geqslant 0 \tag{25}$$

erfüllt. Wir setzen also jetzt voraus, daß l einen solchen Einheitsvektor darstellt. Dann genügt l den Bedingungen (24) und (25). Wenn wir beide Seiten der Gleichung (25) skalar mit a multiplizieren und die Ungleichung $ax_0\neq 0$ berücksichtigen, so erhalten wir

$$a=\frac{ak}{ar_0}. \tag{26}$$

Aus der Bedingung, daß l ein Einheitsvektor sein soll, ergibt sich weiter

$$\lambda^2 l^2=\lambda^2=(k-ar_0)^2=\left[\frac{(ar_0)k-(ak)r_0}{ar_0}\right]^2$$

und endlich

$$\lambda=\frac{\varepsilon\sqrt{[(ar_0)k-(ak)r_0]^2}}{ar_0}. \tag{27}$$

Umgekehrt ist es leicht nachzuprüfen, daß der durch (25), (26) und (27) definierte Vektor l den gesuchten Einheitsvektor darstellt, wenn nur ε so gewählt wird, daß die Ungleichung $\lambda\geqslant 0$ richtig ist. Nach dem Satz 2.1 folgt daraus, daß $f_k(x_0)$ existiert und die Beziehung (23) bei geeigneten Bezeichnungen besteht, w. z. b. w.

Um die Aussage nachstehender Folgerung zu erleichtern, gebe ich folgende Definition.

Definition 3. $f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$). Eine k-dimensionale ($1\leqslant k\leqslant n-1$) Hyperebene H_k nenne ich *ausgezeichnet* für $f(x)$ im Punkte x_0, wenn die Richtungsableitung von $f(x)$ im Punkte x_0 in der Richtung jedes in H_k liegenden Einheitsvektors existiert und gleich Null ist.

FOLGERUNG 4. *$f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$), die positiv-homogen von der Ordnung μ ist. Besitzt $f(x)$ eine in x_0 ausgezeichnete, $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1}, welche nicht durch o geht, so besitzt $f(x)$ im Punkte x_0 die partielle Ableitung in der Richtung eines jeden beliebigen Einheitsvektors k. Hat H_{n-1} die Gleichung $a(x-x_0)=0$, so kann man $f'_k(x_0)$ durch die Formel*

$$f'_k(x_0)=\frac{ak}{ar_0}f'_{r_0}(x_0) \tag{28}$$

darstellen.

Die Folgerung 4 ergibt sich unmittelbar aus der Folgerung 3 und dem Satz 1.2.

Bemerkung 1. Setzt man in Formel (28) $k=e_i$ ($i=1,2,\ldots,n$), so erhält man

$$f'_i(x_0)=\frac{a_i}{ar_0}f'_{r_0}(x_0) \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n,$$

wobei die Zahlen $a_1,a_2,\ldots,a_n$ die Komponenten des Vektors a bedeuten.

Bemerkung 2. Unter den Voraussetzungen der Folgerung 5 können wir mit Hilfe von (28), folgende Beziehungen aufstellen:

I. Ist $k=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i l_i$, so ist $f'_k=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f'_{l_i}(x_0)$.

Insbesondere ergibt sich aus I für $p=n$ und $l_i=e_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$:

II. Hat der Einheitsvektor k die Komponenten $(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_n)$, so ist

$$f'_k(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i f'_i(x_0). \tag{29}$$

III. Ersetzt man in (29) k durch $r_0=x_0/\varrho_0$, so erhält man, wegen I, die Eulersche Gleichung

$$\mu f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\xi_0^i f'_i(x_0). \tag{30}$$

Endlich kann man die erwähnte Bedingung dafür geben, daß die positiv-homogene Funktion $f(x)$ der Eulerschen Gleichung genügt.

Satz 3.3. *Es sei $f(x)$ eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen $(n\geqslant 2)$. Existiert in $x_0\neq 0$ eine $(n-1)$-dimensionale, für $f(x)$ ausgezeichnete Hyperebene H_{n-1}, die den Punkt o nicht enthält, so erfüllt $f(x)$ in x_0 die Eulersche Gleichung* (30).

Der Beweis folgt unmittelbar aus Folgerung 4 und III.

Bemerkung 3. Die in Satz 3.3 enthaltene hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ der Eulerschen Gleichung genügt, ist eine schwächere Voraussetzung, als die der Differenzierbarkeit von $f(x)$ im x_0. Ist $f(x)$ differenzierbar im Punkte x_0, so folgt aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz des totalen Differentials von S. Gołąb [2], daß $f(x)$ auch die betrachtete Bedingung erfüllt. Dagegen kann man aus der Existenz einer $(n-1)$-dimensionalen, für $f(x)$ im Punkte x_0 ausgezeichneten Hyperebene, welche nicht durch o geht, im allgemeinen nicht auf die Differenzierbarkeit, von $f(x)$ in x_0 schließen.

§ 4. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine positiv-homogene Funktion die Eulersche Gleichung erfüllt

Satz 4.1. *$f(x)$ sei eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen $(n\geqslant 3)$, mit $x_0(\xi_0^1,\ldots,\xi_0^n)$ sei derjenige Punkt bezeichnet, für welchen*

$$\xi_0^n\neq 0 \quad \textit{und} \quad \delta=\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_0^i)^2>0. \tag{31}$$

Überdies sei ein Einheitsvektor l

$$l\left(\frac{\xi_0^1}{\delta},\frac{\xi_0^2}{\delta},\ldots,\frac{\xi_0^{n-1}}{\delta},0\right) \tag{32}$$

gegeben. Dafür, daß $f(x)$ im Punkte x_0 der Eulerschen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_0^i f'_i(x_0)=\mu f(x_0) \tag{33}$$

genüge, ist es notwendig und hinreichend, daß die partiellen Ableitungen $f'_i(x_0)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ im Punkte x_0 existieren und daß die partielle Ableitung von $f(x)$ in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors (32) *die Form habe:*

$$f'_l(x_0)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\xi_0^i}{\delta}f'_i(x_0). \tag{34}$$

Beweis. Zuerst zeige ich, daß die Bedingung hinreichend ist. Ich setze also voraus, daß in dem den Bedingungen (31) genügenden Punkte x_0 die partiellen Ableitungen $f'_i(x_0)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ existieren und die Formel (34) gilt. Wir setzen

$$e_n=\lambda l+ar_0, \tag{35}$$

wobei

$$\lambda=-\frac{r_0 l}{r_0 e}=-\frac{\delta}{\xi_0^n},\qquad a=\frac{1}{r_0 e_n}=\frac{\varrho_0}{\xi_0^n}\qquad (\varrho_0=|ox_0|)\,^{6})$$

für die partielle Ableitung in der Richtung des Einheitsvektors e_n erhalten dann nach Formel (22)

$$f'_{e_n}(x_0)=f'_n(x_0)=-\frac{\delta}{\xi_0^n}f'_l(x_0)+\frac{\varrho_0}{\xi_0^n}f'_{r_0}(x_0). \tag{36}$$

Wenn man beide Seiten von (36) mit ξ_0^n multipliziert und die Formeln für λ und a berücksichtigt, so erhält man (33).

Nun zeige ich die Notwendigkeit der obigen Bedingung. Ich nehme also an, daß die Gleichung (33) in dem, den Bedingungen (31) genügenden Punkte x_0 gilt. Aus (35) ergibt sich wegen Folgerung 2, § 3, daß die partielle Ableitung $f'_l(x_0)$ existiert und die Beziehung (36) besteht.

Die Gleichung (35) kann man nämlich wegen (31) nach l auflösen. Durch Vergleichen von (33) und (36) erhalten wir (34), w. z. b. w.

[6]) Die Koeffizienten λ und a kann man ähnlich, wie im Beweise der Folgerung 4 berechnen.

Bemerkung 1. Ist unter der Voraussetzung (31)

(37) $$\delta=0,$$

so genügt $f(x)$ der Gleichung (33) dann und nur dann, wenn alle partiellen Ableitungen $f'_i(x_0)$ im betrachteten Punkte x_0 existieren. In der Tat, nehmen wir zum Beispiel an, daß

(38) $$\xi_0^n>0,$$

dann ist

(39) $$\sum_{i=1}^{n}\xi_0^i f'_i(x_0)=\xi_0^n f'_n(x_0)=\xi_0^n\frac{\mu f(x_0)}{\varrho_0}=\mu f(x_0),$$

denn $e_n=r_0$ und $\xi_0^n=\varrho_0$ infolge von (37).

Bemerkung 2. Die Voraussetzung $\xi_0^n\neq 0$ ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, da wenn wir nur die Punkte $x_0\neq o$ in Betracht ziehen, wenigstens eine der Zahlen $\xi_0^1,\xi_0^2,\ldots,\xi_0^n$ von Null verschieden sein muß.

§ 5. Die Eulersche Gleichung und die Stetigkeit der positiv-homogenen Funktion

Die im Satze 3.3 enthaltene Bedingung ist dafür hinreichend, daß die positiv-homogene Funktion $f(x)$ in $x_0\neq o$ die Gleichung von Euler erfüllt. Diese Bedingung ist aber keine notwendige Bedingung, d. h. $f(x)$ kann in einem Punkte $x_0\neq o$ der Gleichung von Euler genügen, obgleich keine für $f(x)$ in x_0 ausgezeichnete Hyperebene existiert. Dieser Fall tritt besonders dann auf, wenn $f(x)$ in der Richtung eines Einheitsvektors in x_0 nicht stetig ist. Jetzt gebe ich das Beispiel einer solchen Funktion.

Es sei $x_0(\xi_0^1,\xi_0^2,\ldots,\xi_0^n)$ ein Punkt des n-dimensionalen Raumes ($n\geqslant 3$), der folgenden Bedingungen genüge:

(40) $$\xi_0^n>0;\qquad \delta=\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_0^i)^2>0.$$

$f(x)$ sei eine positiv-homogene Funktion der Ordnung μ von n Veränderlichen ($n\geqslant 3$). Wir setzen voraus, daß

(41) $$f(x_0)\neq 0$$

ist. Die Funktionswerte von $f(x)$ werden im ganzen Halbraume $\xi_0^n>0$ eindeutig bestimmt sein, wenn wir $f(x)$ auf der $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene von der Gleichung

(42) $$e_n(x-x_0)=0$$

definieren. Auf H_{n-1} definieren wir $f(x)$ in folgender Weise

(43) $$f(x_0+\tau_i e_i)=\tau_i^2+f(x_0)\qquad \text{für}\quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

Ist $x'_0(\xi_0^1,\xi_0^2,\ldots,\xi_0^{n-1},0)$, so bezeichnen wir mit l den Einheitsvektor

$$l=\frac{\overline{ox'_0}}{|ox'_0|}$$

(wegen (40) darf man das). Im Punkte $x_0+\sigma l$ definieren wir unsere Funktion folgendermassen

(44) $$f(x_0+l\sigma)=\sigma^2+f(x_0).$$

Die positiv-homogene Funktion $f(x)$, welche durch (41), (43) und (44) definiert ist, genügt im x_0 der Eulerschen Gleichung, weil sie die dafür notwendige und hinreichende Bedingung, die im Satze 4.1 enthalten ist, erfüllt. $f(x)$ besitzt nämlich in x_0 die $n-1$ partiellen Ableitungen

$$f'_i(x_0)=\lim\frac{\tau_i^2}{\tau_i}=0$$

und die partielle Ableitung von $f(x)$ in x_0 in der Richtung des Einheitsvektors l genügt der Bedingung (34)

$$f'_l(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_0^i}{|x'_0|}f'_i(x_0)=0.$$

In den übrigen Punkten der Hyperebene H_{n-1} kann man $f(x)$ ganz beliebig definieren. Damit $f(x)$ im x_0 nicht stetig sei, genügt es $f(x_0+k\eta)=\eta$, $\eta\neq 0$ für $k\neq e_i$, $k\neq l$, $k\| H_{n-1}$ zu setzen. $f(x)$ ist in x_0 nicht stetig, weil

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x=x_0+k\eta}} f(x)=0\neq f(x_0).$$

Zitate

[1] S. Gołąb, *Sur les fonctions homogenes, I.* Équation d'Euler, Warszawa 1933.

[2] — *Sur une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle totale,* Ann. de la Soc. Polon. de Math. 16 (1937), S. 31-40.