Sur les intégrales de branchement des systèmes des équations différentielles ordinaires

par T. WAŻEWSKI (Kraków)

§ 1. Introduction. Le présent article se rapporte aux systèmes des équations différentielles ordinaires qui jouissent de l'unicité des intégrales et dont les deuxièmes membres sont continus dans un ensemble ouvert. Nous supposons que les intégrales d'un tel système soient prolongées à gauche et à droite autant que possible.

Une intégrale A de ce système sera dite *intégrale de branchement* s'il existe une suite d'intégrales $\{J_k\}$ qui se condense en même temps sur A et sur une intégrale B *disjointe* de A lorsque $k\to\infty$.

L'existence des intégrales de branchement, nous a servi antérieurement [1] dans la construction d'une équation $x'=f(t,x)$ satisfaisant aux propriétés suivantes: f a les dérivées partielles continues de tous les ordres dans un ensemble ouvert et simplement connexe W et chaque intégrale première $h(t,x)$ de cette équation, qui a les dérivées partielles du premier ordre continues dans W, est fixe. Ceci veut dire que chaque fonction $h(t,x)$ ayant les dérivées partielles continues du premier ordre et satisfaisant, dans W tout entier, à l'équation

$$h_t(t,x)+f(t,x)\,h_x(t,x)=0$$

est constante dans W. Certains résultats allant plus loin dans cette direction ont été acquis par J. Szarski [2] et Z. Szmydtówna [3].

Dans tous ces exemples l'ensemble K des points de W qui sont situés sur les intégrales de branchement est partout dense dans W. En relation avec ces exemples, le problème suivant se pose: quelle est la structure de l'ensemble K?

Nous prouverons que K est de première catégorie de Baire (théorème 3 du § 3). Il en résulte que l'ensemble $W-K$ composé des intégrales qui sont simples (c'est-à-dire qui ne sont pas intégrales de branchement) est de seconde catégorie de Baire (d'où il résulte que $W-K$ n'est pas vide). Ceci veut dire que les intégrales de branchement sont exceptionnelles en un certain sens.

Voici *l'idée directrice de la démonstration.* Introduisons la définition suivante:

Définition. *Nous désignerons par $r(P)$ et $s(P)$ les extrémités de l'intervalle maximal $r(P)<t<s(P)$ dans lequel est définie l'intégrale issue de P.*

On établit facilement les deux propriétés E_1 et E_2 suivantes:

(E_1) *En tout point $Q\in K$ au moins une des fonctions $r(P)$ et $s(P)$ est discontinue* (théorème 2 du § 3).

(E_2) *Les fonctions $r(P)$ et $s(P)$ sont semi-continues (supérieurement ou inférieurement) en tout point $P\in W$ au sens précisé dans le* § 2 (théorème 1 du § 3).

Or on sait que l'ensemble des points P où une fonction semi-continue est discontinue est de première catégorie de Baire [4]. Il en est donc ainsi de l'ensemble L composé des points où a moins une des fonctions $r(P)$ ou $s(P)$ est discontinue.

En raison de la propriété E_1, on a $K\subset L$, d'où il résulte que K est de première catégorie de Baire.

L'énoncé habituel du théorème cité sur les fonctions semi-continues se rapporte au cas où ces fonctions prennent *les valeurs finies*, tandis que $r(P)$ et $s(P)$ peuvent prendre respectivement les valeurs infinies $-\infty$ et ∞.

Le § 2 est consacré à combler cette lacune c'est-à-dire à étendre ce théorème au cas des fonctions pouvant prendre aussi les valeurs ∞ et $-\infty$.

Le § 3 est consacré aux détails de la démonstration esquissée plus haut.

§ 2. Extension de certaines notions et de certains théorèmes au cas des fonctions pouvant prendre les valeurs finies et les valeurs $-\infty$ et ∞. Introduisons la fonction $u(x)$ définie, pour tous les x finis ainsi que pour $x=-\infty$ et $x=\infty$, par les conditions suivantes:

$$u(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x \quad \text{pour} \quad -\infty<x<\infty,$$

$$u(-\infty)=-1, \qquad u(\infty)=1.$$

Designons par $[-\infty,\infty]$ la classe composée de tous les nombres réels et des nombres infinis ∞ et $-\infty$. Supposons que $a\in[-\infty,\infty]$, $a_n\in[-\infty,\infty]$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Nous dirons que $a_n\to a$ lorsque $u(a_n)\to u(a)$.

Soit maintenant une fonction $f(P)$ définie pour P variable dans un ensemble à plusieurs dimensions W, les valeurs de $f(P)$ étant finies ou égales à ∞ ou $-\infty$.

Posons

$$g(P)=u(f(P)).$$

Nous dirons que $f(P)$ est continue (semi-continue inférieurement ou supérieurement) au point P_0 si $g(P)$ a la même propriété au point P_0.

La fonction $f(P)$ sera dite de première classe de Baire dans W si $g(P)$ a la même propriété, c'est-à-dire s'il existe une suite de fonctions $g_k(P)$ (aux valeurs finies) continues dans W et telles que $g_k(P)\to g(P)$ lorsque $k\to\infty$.

On voit facilement que dans le cas des suites des nombres réels (finis) et des fonctions aux valeurs finies ces définitions sont compatibles avec les définitions habituelles.

On voit aussi que relativement à $f(P)$ restent justes les théorèmes suivants A et B énoncés habituellement exclusivement pour les fonctions aux valeurs finies.

Théorème A (de Baire). *L'ensemble D des points de discontinuité d'une fonction $f(P)$, qui est de première classe de Baire dans un ensemble ouvert W, est de première catégorie de Baire, c'est-à-dire D constitue la somme d'un nombre dénombrable d'ensembles dont chacun est nulle part dense dans W. L'ensemble des points de continuité de $f(P)$, c'est-à-dire l'ensemble $W-D$ est de seconde catégorie de Baire.*

Théorème B. *Chaque fonction semi-continue supérieurement (ou inférieurement) dans W, est de première classe de Baire* [4].

§ 3. I. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

que nous écrirons aussi sous la forme vectorielle

$$\frac{dX}{dt}=F(t,X)\quad \text{où}\quad X=(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{3.1}$$

Nous admettons, relativement à ce système, l'hypothèse suivante:

Hypothèse H. Les fonctions f_i sont continues et définies dans un ensemble ouvert W et dans cet ensemble seulement. Par chaque point

$$P=(t',x_1',x_2',\ldots,x_n') \tag{3.2}$$

situé dans W passe une intégrale localement unique de ce système, c'est-à-dire deux intégrales passant par P sont identiques dans l'intervalle $t'-g<t<t'+g$ lorsque $g>0$ est suffisamment petit.

Remarque 1. Dans cette hypothèse deux intégrales de (3.1) issues de P et définies dans un intervalle non nécessairement petit $a'<t<b'$ (où $a'<t'<b'$), sont, comme on le sait bien, identiques dans cet intervalle. Autrement dit l'unicité locale en chaque point $P\epsilon W$ entraîne l'unicité globale (*im Grossen*) des intégrales du système (3.1).

Dans l'hypothèse H les propriétés suivantes bien connues subsistent:

II. L'intégrale du système (3.1) issue d'un point quelconque $P\epsilon W$ peut être prolongée à droite et à gauche jusqu'à la frontière de W[1]. Soit

$$X=C(t,P), \tag{3.3}$$

l'équation de cette intégrale ainsi prolongée. Nous désignerons l'ensemble des points (t,X) situés sur cette intégrale par

$$J(P). \tag{3.4}$$

Cet ensemble sera aussi dit intégrale de (3.1) issue de P.

L'intervalle maximal $M(P)$ englobant tous les t, pour lesquels $C(t,P)$ est definie, est *ouvert*[1]. Ses extrémités gauche et droite seront désignées par $r(P)$ et $s(P)$

$$M(P)=(r(P),s(P)).$$

On a pour tout $P\epsilon W$: $-\infty\leqslant r(P)<s(P)\leqslant\infty$.

Les égalités $r(P)=-\infty$ et $s(P)=\infty$ ne sont pas exclues.

En vertu de l'hypothèse sur l'unicité des intégrales de (3.1), les intégrales $J(P)$ et $J(Q)$ sont soit identiques soit disjointes.

III. Soit

$$P_k\epsilon W,\quad Q\epsilon W,\quad P_k\to Q \tag{3.5}$$

et soient l et m deux nombres finis tels que

$$r(Q)<l<m<s(Q). \tag{3.6}$$

Cela posé[2]) les intégrales $C(t,P_k)$ sont, à partir d'un indice k_0, définies dans l'intervalle fermé

$$l\leqslant t\leqslant m,$$

d'où il résulte que

$$r(P_k)<l<m<s(P_k)\qquad \text{pour}\quad k\geqslant k_0. \tag{3.7}$$

[1]) Cf. [5], p. 135.

[2]) Cf. [5], p. 145, Satz 1.

Abstraction faite des indices $k<k_0$, on a

$$C(t,P_k)\to C(t,Q) \quad \text{lorsque} \quad k\to\infty,$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $[l,m]$.

IV. Théorème 1. *Dans l'hypothèse H la fonction $r(P)$ est semi-continue supérieurement et $s(P)$ semi-continue inférieurement dans W* (cf. les notations de II).

Supposons en effet que les relations (3.5) et (3.6) aient lieu. De la relation (3.7) il vient que (cf. les définitions du § 2)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, r(P_k)\leqslant l<m\leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, s(P_k). \tag{3.8}$$

Or l et m désignent deux nombres arbitraires satisfaisant à (3.6). On obtient donc en vertu de (3.8), en faisant tendre l vers $r(Q)$ et m vers $s(Q)$, l'inégalité

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, r(P_k)\leqslant r(Q)<s(Q)\leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, s(P_k).$$

Cette inégalité étant juste pour toute la suite $\{P_k\}$ satisfaisant à (3.5) il en vient que

$$\overline{\lim_{P\to Q}}\, r(P)\leqslant r(Q)<s(Q)\leqslant \underline{\lim_{P\to Q}}\, s(P),$$

ce qui veut dire que $r(P)$ est semi-continue supérieurement et $s(Q)$ est semi-continue inférieurement en chaque point $Q\in W$.

V. Corollaire 1. *Dans l'hypothèse H les fonctions $r(P)$ et $s(P)$ sont de première classe de Baire dans W* (c'est-à-dire chacune d'elles constitue la limite d'une suite de fonctions continues dans W).

Désignons par L_r et L_s les ensembles des points $P\in W$ en lesquels $r(P)$ et $s(P)$ sont respectivement discontinues. Les ensembles L_r et L_s, et par suite leur somme aussi sont de première catégorie de Baire.

Ce corollaire résulte du théorème précédent en vertu d'un théorème connu [4] et des théorèmes A et B (cf. § 2).

VI. Définition. *Nous dirons qu'une suite d'intégrales $\{J_k\}$ se condense sur un point Q s'il existe une suite de points P_k tels que*

$$P_k\in J_k, \qquad P_k\to Q.$$

Nous dirons qu'une suite d'intégrales se condense sur une intégrale J lorsque cette suite se condense sur chaque point $Q\in J$.

Voici une proposition qui résulte immédiatement de III.

VII. *Si une suite d'intégrales $\{J_k\}$ se condense sur un point Q appartenant à une intégrale J, cette suite $\{J_k\}$ se condense sur J.*

VIII. Définition des intégrales associées, de l'intégrale de branchement et de l'intégrale simple. On dira que *deux intégrales J'* et J'' sont *associées* si elles sont différentes

$$J'\neq J''$$

et s'il existe une suite d'intégrales $\{J_k\}$ qui se condense à la fois sur J' et sur J''.

On dira qu'une intégrale J' est *une intégrale de branchement* si elle admet au moins une intégrale associée Une *intégrale* sera dite *simple* si elle n'est pas une intégrale de branchement.

IX. Proposition 1. *Si*

$$J'=J(P'), \qquad J''=J(P'') \tag{3.9}$$

sont deux intégrales associées (cf. VIII), *leurs intervalles maximaux d'existence*

$$M(P')=\big(r(P'),s(P')\big) \quad \textit{et} \quad M(P'')=\big(r(P''),s(P'')\big)$$

sont disjoints c'est-à-dire on a

$$M(P')M(P'')=0. \tag{3.10}$$

Supposons le contraire. Il existe donc un t_0 et deux nombres l et m tels que

$$r(P')<l<t_0<m<s(P'),$$
$$r(P'')<l<t_0<m<s(P'').$$

J' et J'' étant associées, il existe une suite d'intégrales J_k qui se condense à la fois sur J' et J'' et, par suite, sur P' et P'' aussi. Il existe, par conséquent, deux suites de points $\{P'_k\},\{P''_k\}$ telles que

$$P'_k\in J_k, \quad P''_k\in J_k, \quad P'_k\to P', \quad P''_k\to P''. \tag{3.11}$$

On a

$$J_k=J(P'_k), \qquad J_k=J(P''_k). \tag{3.12}$$

En vertu de (3.11), (3.12) et de III les fonctions $C(t,P'_k)$ et $C(t,P''_k)$ sont définies, à partir d'un indice k_0, dans l'intervalle $[l,m]$ et l'on a dans cet intervalle

$$C(t,P'_k)\to C(t,P'), \qquad C(t,P''_k)\to C(t,P''). \tag{3.13}$$

Comme P'_k et P''_k sont situés sur la même intégrale J_k (cf. (3.11)), on a

$$C(t,P'_k)\equiv C(t,P''_k),$$

donc, en posant dans (3.13) $t=t_0$, on en conclut que

$$C(t_0,P')=C(t_0,P'').$$

Les points

$$(3.14)\qquad Q'=(t_0, C(t_0, P')),\qquad Q''=(t_0, C(t_0, P''))$$

sont donc identiques. Mais on a évidemment, en vertu de (3.14),

$$Q'\epsilon J(P')=J',\qquad Q''\epsilon J(P)''=J''.$$

Les intégrales J' et J'' ne sont donc pas disjointes, et sont, par suite, identiques, ce qui est impossible, car elles sont associées (cf. VIII).

X. Théorème 2. *En chaque point d'une intégrale de branchement au moins une des fonctions $r(P)$ et $s(P)$ est discontinue.* ($r(P)$ et $s(P)$ représentent les extrémités de l'intervalle d'existence de l'intégrale passant par P et prolongée à droite et à gauche autant que c'est possible.)

Soient en effet J' une intégrale de branchement et J'' son intégrale associée.

Soit P' un point quelconque de J' et soit $P''\epsilon J''$. On a

$$(3.15)\qquad J'=J(P'),\qquad J''=J''(P'').$$

Les intervalles $M(P')$ et $M(P'')$ étant disjoints (cf. 3.10), on a soit

$$(3.16)\qquad r(P')<s(P')\leqslant r(P'')<s(P'')$$

soit

$$(3.17)\qquad r(P'')<s(P'')\leqslant r(P')<s(P').$$

Nous prouverons que, dans le cas (3.16) la fonction $s(P)$ est discontinue au point P' et que dans le cas (3.17) la fonction $r(P)$ est discontinue au point P'. Soit $\{J_k\}$ une suite d'intégrales se condensant à la fois sur les intégrales associées J' et J''. Comme $P'\epsilon J'$ et $P''\epsilon J''$, il existe deux suites de points $\{P'_k\}$ et $\{P''_k\}$, telles que (cf. VI, VII, VIII)

$$P'_k\epsilon J_k,\qquad P'_k\to P',$$
$$P''_k\epsilon J_k,\qquad P''_k\to P''.$$

P'_k et P''_k étant situés sur la même intégrale J_k, on a

$$(3.18)\qquad s(P'_k)=s(P''_k)\qquad (k=1,2,\dots).$$

La fonction $s(P)$ étant semi-continue inférieurement au point P'', on a

$$\varliminf_{k\to\infty} s(P''_k)\geqslant s(P''),$$

d'où, en raison de (3.18)

$$\varliminf_{k\to\infty} s(P'_k)\geqslant s(P'');$$

de là, en raison de (3.16),

$$\varliminf_{k\to\infty} s(P'_k)> s(P').$$

Comme $P'_k\to P'$, il en résulte que la fonction $s(P)$ est discontinue au point P', lequel a été arbitrairement choisi sur J'.

On démontre pareillement que, dans le cas (3.17), la fonction $r(P)$ est discontinue au point P'.

Corollaire 2. *Désignons par L_r et L_s la classe des points $P\epsilon W$ en lesquels respectivement $r(P)$ et $s(P)$ sont discontinues. K désignant la totalité des points situés sur les intégrales de branchement on a, en vertu du théorème précédent,*

$$(3.19)\qquad K\subset L_r+L_s.$$

XI. Théorème 3. *Dans l'Hypothèse H l'ensemble K de tous les points situés sur les intégrales de branchement est de première catégorie de Baire. L'ensemble de tous les points situés sur les intégrales simples* (cf. VIII) *c'est-à-dire l'ensemble $W-K$, est de seconde catégorie de Baire.*

Ce théorème resulte de (3.19), car les ensembles L_r et L_s sont de première catégorie de Baire (cf. V).

XII. Remarque 1. Convenons d'écrire IaJ lorsque J est associée avec I au sens de l'alinéa VIII. Nous dirons que l'intégrale B est associée avec l'intégrale A au sens β et nous écrirons $A\beta B$ lorsqu'il existe une suite d'intégrales $I_1, I_2, \dots, I_n$ telle que $A=I_1$, $B=I_n$ et $I_\nu a I_{\nu+1}$ ($\nu=1,2,\dots,n-1$). Soit φ l'ensemble des points située sur les intégrales L telles que $I\beta L$ (où I désigne une certaine intégrale). L'ensemble φ sera dit intégrale de branchement au sens β lorsque cet ensemble n'est pas vide. On voit facilement que le théorème 3 reste vrai lorsque l'on désigne par K l'ensemble de tous les points situés sur les intégrales de branchement au sens β.

Publications citées

[1] T. Ważewski, *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation* $z_x(x,y)+Q(x,y)z_y(x,y)=0$, Mathematica 8 (1933) p. 103-116.

[2] J. Szarski, *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation* $Z_x(x,y)+Q(x,y)Z_y(x,y)=0$ *définie dans le plan tout entier*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1946), p. 106-132.

[3] Z. Szmydtówna, *Sur les intégrales premières de l'équation* $y'=f(x,y)$, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 167-182.

[4] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig 1927, p. 403, Satz 1.

[5] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.