It is interesting to answer the question when $m=S_m$. The necessary condition is $m\equiv 0 \pmod 2$, *e. g.*

$$m=2^\alpha,\qquad m=2^\alpha\cdot 3^\beta,\qquad m=2^\alpha 5^\beta\ (\alpha\geqslant 2),\qquad m=2^\alpha 3^\beta 7^\gamma\ \text{ etc.}$$

for all these cases $S_m=m$.

It means that the number

$$\varphi(m)\prod_{l=1}^{k} p_l$$

given on the first page as the period, may be divided by

$$2^{a_1+\sum_{l=1}^{k}\gamma_l-\max(\gamma_i;a_i)}\qquad \text{when}\quad p_1=2$$

and by

$$2^{\sum_{l=1}^{k}\gamma_l-\max\gamma_i}\qquad \text{when}\quad p_1\geqslant 3\qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

where

$$p_i-1=2^{\gamma_i}c_i,\qquad c_i\not\equiv 0 \pmod 2\qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

and possibly by other (necessarily odd) divisors of the numbers c_i.

The period is proper if $p_i\geqslant a_i$, $i=1,2,\ldots,k$, and mixed if this is not the case. If we denote

$$n_{a_i,p_i}=1-p_i\left[1+\mathrm{E}\left(-\frac{a_i}{p_i}\right)\right],$$

the period begins in both cases from $n=\max(n_{a_ip_i})$, $i=1,2,\ldots,k$.

Problème du mouvement stationnaire dans une couche gazeuse rayonnante

par W. Pogorzelski (Warszawa)

Introduction. L'étude de l'équilibre ou du mouvement dans un grand milieu gazeux, comme l'atmosphère d'une planète ou d'une étoile, doit tenir compte du rayonnement intérieur en négligeant l'influence de la conductibilité.

K. Schwarzschild [4] le premier et ensuite R. Emden [2] ont étudié l'équilibre d'une couche gazeuse en tenant compte du rayonnement mais sous la supposition inexacte des courants d'énergie dans deux directions seulement.

C. Białobrzeski [1] a étudié le premier l'équilibre d'une sphère gazeuse en tenant compte de la pression de radiation.

W. Pogorzelski [3] a étudié l'équilibre d'une couche gazeuse en tenant compte du rayonnement polychromatique dans toutes les directions. Le problème conduit à un système d'équations intégrales non linéaires, assez compliquées; l'auteur a démontré l'existence de la solution si l'épaisseur de la couche est suffisamment petite.

Dans ce travail nous démontrerons l'existence d'un état stationnaire du mouvement dans une couche gazeuse en tenant compte du rayonnement polychromatique dans toutes les directions. Le problème consiste en l'étude d'un système d'équations intégrales non linéaires.

Les grandeurs et les équations fondamentales. Soit au point intérieur M d'un milieu gazeux un élément de surface $d\sigma$ avec la normale Mn. On admet que la quantité d'énergie, qui passe par l'élément $d\sigma$ dans le temps dt grâce au rayonnement de longueur d'onde dans l'intervalle $(\lambda,\lambda+d\lambda)$ dans la direction MR d'un angle solide $d\omega$, a pour valeur principale le produit

$$X\cos\Theta\, d\sigma\, d\lambda\, dt\, d\omega, \tag{1}$$

Θ étant l'angle que fait la direction MR avec la normale Mn. La grandeur X s'appelle l'intensité de rayonnement de longueur d'onde λ, au point M et dans la direction MR.

Soient maintenant au point M un élément de volume dv et un angle solide élémentaire $d\omega$ au sommet M et de direction arbitraire. On admet que l'énergie émise par l'élément dv dans la direction de l'angle solide $d\omega$, dans le temps dt, et grace au rayonnement de longueur d'onde dans l'intervalle $(\lambda, \lambda+d\lambda)$, a pour valeur principale

$$E\,dv\,d\omega\,dt\,d\lambda. \tag{2}$$

On appelle E l'intensité d'émission au point M de longueur d'onde λ. On admet, d'après la théorie du rayonnement (en négligeant la réfraction), que l'intensité du rayonnement X dans la direction d'une droite MR varie le long de cette droite suivant une équation différentielle

$$\frac{\partial X}{\partial r}=-aX+E, \tag{3}$$

où r désigne la longueur M_0M comptée à partir d'un point arbitraire M_0 de la droite MR; a est dite *coefficient d'absorption* du gaz au point M. Le coefficient positif a pour le gaz dépend de la longueur d'onde d'une manière très nette (les bandes d'absorption).

D'après la loi de Kirchhoff, on a

$$E=aJ(\lambda, T), \tag{4}$$

J étant l'intensité de rayonnement du corps noir, donnée par la fonction de Planck de la longueur d'onde λ et de la température absolue T:

$$J(\lambda, T)=\frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T}-1} \tag{5}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse du gaz au point de coordonnées rectangulaires x, y, z au moment t. Ces trois fonctions de quatres variables x, y, z, t satisfont en tout point du gaz et pour tout moment t au système d'équations d'Euler:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+F_x,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+F_y,\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+F_z,\\
&\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0,
\end{aligned} \tag{6}$$

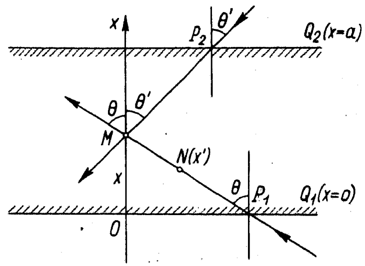
F_x, F_y, F_z étant les composantes de l'intensité du champ de gravitation donnée, ϱ — la densité, p — la pression liée avec la densité et la température T par l'équation des gaz parfaits $p=R\varrho T$. On a négligé le frottement intérieur.

Les équations (6) forment un système de quatre équations aux dérivées partielles avec cinq fonctions inconnues u, v, w, ϱ, T de variables x, y, z, t. Au système (6) on doit ajouter une cinquième équation dite équation d'énergie qu'on obtient en calculant la perte et le gain d'énergie de l'élément de volume du gaz rayonnant. On démontre que cette équation est la suivante:

$$\begin{aligned}
&c\varrho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\\
&\qquad=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} aX\sin\Theta\,d\lambda\,d\Theta\,d\varphi-4\pi\int_0^{\infty}E\,d\lambda,
\end{aligned} \tag{7}$$

c étant la chaleur spécifique au volume constant, (Θ, φ) étant les coordonnées sphériques de la direction de laquelle dépend l'intensité du rayonnement $X(\Theta, \varphi, \lambda)$ au point (x, y, z) et au moment t. Dans l'équation (7) on a négligé l'influence du frottement intérieur du gaz et de la conductibilité.

Les équations du problème de la couche rayonnante. Soit une couche gazeuse comprise entre deux plans parallèles Q_1 et Q_2, on admet que les grandeurs p, ϱ, T ne dépendent que d'une coordonnée x le long de l'axe perpendiculaire aux plans Q_1 et Q_2.



Le problème que nous proposons de résoudre consiste en la recherche d'un mouvement stationnaire dans la direction perpendiculaire aux plans Q_1 et Q_2 si le champ des forces parallèles à Ox et les valeurs de l'intensité du rayonnement X aux plans limites Q_1 et Q_2 de la couche pour tout λ et pour les directions qui importent l'énergie à l'intérieur de la couche sont données. Nous avons donc à déterminer les trois fonctions $u(x), \varrho(x), T(x)$, d'une coordonnée x dans l'intervalle $(0, a)$, qui caractérisent l'état du gaz. On donne a priori les valeurs u_0, ϱ_0, T_0 de ces fonctions pour le plan limite $x=0$, en supposant que $\varrho_0>0$, $T_0>0$, $u_0\neq 0$. D'après les équations (6) et (7) dans l'état stationnaire, les fonctions u, ϱ, T doivent vérifier les équations suivantes

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dx} + g(x), \qquad \frac{d(\varrho u)}{dx} = 0, \qquad p = R\varrho T$$

(8)

$$c\varrho u\frac{dT}{dx} + p\frac{du}{dx} = 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} aX(\lambda,\Theta)\sin\Theta\, d\lambda\, d\Theta - 4\pi\int_0^{\infty} E\, d\lambda,$$

$g(x)$ étant l'intensité du champ de gravitation, donnée dans l'intervalle $(0, a)$. On admet pour le gaz la relation $a(x,\lambda) = \varrho(x)\nu(\lambda)$, $\nu(\lambda)$ étant une fonction donnée de longueur d'onde bornée et positive dans l'intervalle $(0,\infty)$.

D'après les équations (3) et (4), l'intensité du rayonnement $X_M(\lambda,\Theta)$ au point intérieur $M(x)$, pour la direction que fait l'angle Θ avec l'axe Ox, est liée avec l'intensité donnée $X_1(\lambda,\Theta)$, pour la même direction, au plan limite Q_1 $(x=0)$ par la formule

$$X_M(\lambda,\Theta) = X_1(\lambda,\Theta)\exp\left(-\int_0^{|MP_1|} a_N\, dr\right) + \int_0^{|MP_1|} a_N J_N \exp\left(-\int_N^M a\, ds\right) dr$$
$$(0 < \Theta < \pi/2).$$

P_1 étant un point du plan $x=0$ et $N(x')$ un point courant sur le segment P_1M, on a $r = (P_1N)$.

On aura donc, pour l'intervalle $0 < \Theta < \pi/2$,

$$(9) \quad X_M(\lambda,\Theta) = X_1(\lambda,\Theta)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}\int_0^x \varrho(s)\, ds\right)$$
$$+ \int_0^x \nu(\lambda)\varrho(x')J[\lambda, T(x')]\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}\left|\int_{x'}^x \varrho(s)\, ds\right|\right)\frac{dx'}{\cos\Theta}.$$

De même on obtiendra, pour l'intervalle $\pi/2 < \Theta < \pi$,

$$(10) \quad X_M(\lambda,\Theta) = X_2(\lambda,\Theta')\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta'}\int_x^a \varrho(s)\, ds\right)$$
$$+ \int_x^a \nu(\lambda)\varrho(x')J[\lambda, T(x')]\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta'}\left|\int_x^{x'} \varrho(s)\, ds\right|\right)\frac{dx'}{\cos\Theta'}$$

où $X_2(\lambda,\Theta')$ est l'intensité du rayonnement, donnée au point du plan Q_2 $(x=a)$, dans la direction que fait l'angle $\Theta = \pi - \Theta'$ avec l'axe Ox.

On admet que:

1° la fonction donnée $\nu(\lambda)$ est définie, non négative, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0,\infty)$,

2° les fonctions données $X_1(\lambda,\Theta)$, $X_2(\lambda,\Theta)$ sont définies, non négatives, bornées et intégrables dans les intervalles

$$0 < \lambda < \infty, \qquad 0 < \Theta < \frac{\pi}{2}.$$

En substituant les expressions (9) et (10) dans la troisième des équations (8), on aura l'équation suivante:

$$(11) \quad 4\pi\int_0^{\infty}\nu(\lambda)J[\lambda, T(x)]\, d\lambda$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} X_1(\lambda,\Theta)\nu(\lambda)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}\int_0^x \varrho(s)\, ds\right)\sin\Theta\, d\Theta\, d\lambda$$
$$+ 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} X_2(\lambda,\Theta')\nu(\lambda)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta'}\int_x^a \varrho(s)\, ds\right)\sin\Theta'\, d\Theta'\, d\lambda$$
$$+ 2\pi\int_0^a\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} \nu^2(\lambda)\varrho(x')J[\lambda, T(x')]\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}\left|\int_x^{x'} \varrho(s)\, ds\right|\right)\operatorname{tg}\Theta\, d\Theta\, d\lambda\, dx'$$
$$- c\varrho u\frac{dT}{dx} - p\frac{du}{dx}.$$

Cette équation a la forme de l'équation intégro-différentielle suivante:

$$(12) \quad F[T(x)] = f_1\left[\int_0^x \varrho(s)\, ds\right] + f_2\left[\int_x^a \varrho(s)\, ds\right]$$
$$+ \int_0^a \Phi\left[T(x')\left|\int_x^{x'} \varrho(s)\, ds\right|\right]\varrho(x')\, dx' - c\varrho u\frac{dT}{dx} - p\frac{du}{dx},$$

où $F(T)$ est fonction d'une variable, définie dans l'intervalle $(0,\infty)$ par l'expression

$$(13) \quad F(T) = 4\pi\int_0^{\infty}\nu(\lambda)J(\lambda, T)\, d\lambda.$$

D'après l'expression de Planck (5), cette fonction et sa dérivée sont monotones, continues et croissent de zéro à l'infini si T croît de zéro à l'infini.

Les fonctions d'une variable $f_1(w)$ et $f_2(w)$ sont définies pour toute valeur positive de l'argument w par les intégrales

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
f_1(w) &= 2\pi \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} X_1(\lambda,\Theta)\nu(\lambda)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w\right)\sin\Theta\, d\Theta\, d\lambda,\\
f_2(w) &= 2\pi \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} X_2(\lambda,\Theta)\nu(\lambda)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w\right)\sin\Theta\, d\Theta\, d\lambda,
\end{aligned}
$$

et elles sont bornées dans l'intervalle $(0,\infty)$.

La fonction de deux variables $\Phi(T,w)$ est définie pour toutes les valeurs positives des arguments T,w par l'intégrale

$$
(15)\quad \Phi(T,w) = 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} \nu^2(\lambda)J(\lambda,T)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w\right)\operatorname{tg}\Theta\, d\Theta\, d\lambda.
$$

Les fonctions (14) sont dérivables pour toute valeur positive w, étudions leurs dérivées lorsque w tend vers zéro. Il suffit de considérer l'une d'elle:

$$
(16)\quad f_1'(w) = -2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} X_1(\lambda,\Theta)\frac{\nu^2(\lambda)}{\cos\Theta}\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w\right)\sin\Theta\, d\Theta\, d\lambda
$$

$$
= -2\pi\int_0^{\infty}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_{\nu w}^{\infty} Y(\lambda,t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt,
$$

où on a posé

$$
t = \frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w;\qquad Y(\lambda,t) = X_1\left[\lambda, \arccos\frac{\nu(\lambda)w}{t}\right].
$$

Décomposons l'intégrale (16) en deux parties

$$
(17)\quad f_1'(w) = -2\pi\int_0^{\infty}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_{\nu w}^{1} Y(\lambda,t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt - 2\pi\int_0^{\infty}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_1^{\infty} Y(\lambda,t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt
$$

en supposant que $\nu w<1$.

On aura pour la première partie

$$
(18)\quad \int_0^{\lambda_0}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_{\nu w}^{1} Y(\lambda,t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^{\lambda_0}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_{\nu w}^{1} Y(\lambda,t)\left[\frac{1}{t}+\psi(t)\right]dt
$$

$$
< k\int_0^{\lambda_0}\nu^2(\lambda)|\log\nu(\lambda)|\,d\lambda + k|\log w|\int_0^{\lambda_0}\nu^2(\lambda)\,d\lambda + kk'\int_0^{\lambda_0}\nu^2(\lambda)\,d\lambda,
$$

λ_0 étant un nombre positif quelconque, k — la borne supérieure de la fonction X, k' — la borne supérieure de la fonction $|\psi|$ dans l'intervalle $(0,1)$.

D'après l'existence de l'intègrale $\int_0^{\infty} X_1\,d\lambda$ et la raison physique, supposons que, pour λ_0 suffisamment grand, la fonction Y satisfasse à l'inégalité

$$
0 \leqslant Y < \frac{c}{\lambda^{\beta}} \qquad (\beta>1)
$$

dans l'intervalle (λ_0,∞), c et β étant des constantes.

On a donc

$$
(19)\quad \int_{\lambda_0}^{\infty}\nu^2(\lambda)\,d\lambda\int_{\nu w}^{1} Y(\lambda,t)\frac{dt}{t} < \int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{c\nu^2(\lambda)}{\lambda^{\beta}}\,d\lambda\left[\int_{\nu(\lambda)w}^{1}\frac{dt}{t}\right]
$$

$$
< \int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{c\nu^2(\lambda)|\log\nu(\lambda)|}{\lambda^{\beta}}\,d\lambda + c|\log w|\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\nu^2(\lambda)}{\lambda^{\beta}}\,d\lambda.
$$

La fonction $\nu(\lambda)$ étant bornée dans l'intervalle $(0,\infty)$, on conclut, d'après (18) et (19), que la dérivée $f_1'(w)$ vérifie l'inégalité

$$
(20)\quad |f_1'(w)| < c'|\log w| + c''
$$

dans l'intervalle fini $(0,\delta)$, c' et c'' étant des constantes positives; dans l'intervalle (δ,∞) la dérivée $f_1'(w)$ est évidemment bornée. La même conclusion est vraie pour la fonction $f_2(w)$.

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale (15). Cette intégrale ayant la même forme que l'intégrale (16), on conclut immédiatement, d'après l'expression (5) de la fonction $J(\lambda,T)$, que la fonction (15) augmente logarithmiquement si $w\to 0$, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'inégalité

$$
(21)\quad 0 < \Phi(T,w) < c_1'|\log w| + c_1''
$$

dans l'intervalle fini $0<w<\delta$ et dans l'intervalle arbitrairement choisi $0<T<T_1$; c_1' et c_1'' sont des constantes positives déterminées. Dans le domaine $\delta<w<\infty$, $0<T<T_1$ la fonction (15) est bornée. D'après l'expression de Planck (5), la dérivée de la fonction (15) par rapport à la variable T vérifie l'inégalité analogue

$$
(22)\quad 0 < \Phi_T'(T,w) < c_2'\log|w| + c_2'' \qquad (0<w<\delta;\ 0<T<T_1).
$$

Considérons maintenant la dérivée

$$
(23)\quad \Phi_w'(T,w) = -2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\nu^3(\lambda)J(\lambda,T)\exp\left(-\frac{\nu(\lambda)}{\cos\Theta}w\right)\frac{\operatorname{tg}\Theta}{\cos\Theta}\,d\Theta\,d\lambda,
$$

la même substitution $t=\big(\nu(\lambda)/\cos\Theta\big)w$ donne

$$
\Phi_w'(T,w) = -2\pi\int_0^{\infty}\nu^3(\lambda)J(\lambda,T)\Big[\int_{\nu(\lambda)w}^{\infty}e^{-t}dt\Big]\,d\lambda = \frac{2\pi}{w}\int_0^{\infty}\nu^3(\lambda)J(\lambda,T)e^{-\nu(\lambda)w}\,d\lambda.
$$

Donc, pour toute valeur positive w, la dérivée $\Phi'_w(T,w)$ vérifie l'inégalité

(24) $$|\Phi'_w(T,w)| < \frac{\varkappa}{w}$$

dans l'intervalle choisi $0 < T < T_1$; $\varkappa$ est une constante.

Résolution du problème. Pour résoudre le problème nous transformons les équations (8).

Remarquons que, d'après les conditions initiales ($u=u_0$, $\varrho=\varrho_0$, $T=T_0$ pour $x=0$), on a

(25) $$u\varrho = u_0\varrho_0$$

et qu'on peut écrire

$$\frac{u_0\varrho_0}{\varrho}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{u_0\varrho_0}{\varrho}\right] = -\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d(R\varrho T)}{dx} + g(x),$$

d'où

(26) $$R\varrho^2\frac{dT}{dx} + (RT\varrho^2 - u_0^2\varrho_0^2)\frac{d\varrho}{dx} = g(x)\varrho^3.$$

L'équation (12) donne la seconde relation linéaire entre les dérivées dT/dx et $d\varrho/dx$:

(27) $$cu_0\varrho_0\varrho\frac{dT}{dx} - Ru_0\varrho_0 T\frac{d\varrho}{dx} = \varrho\hat{\Omega}[x,T,\varrho],$$

où $\hat{\Omega}$ désigne, pour abréger, l'opération fonctionnelle suivante

(28) $$\hat{\Omega}[x,T,\varrho] = f_1\Big[\int_0^x \varrho(s)\,ds\Big] + f_2\Big[\int_x^a \varrho(s)\,ds\Big] + \int_0^a \Phi\Big[T(x'),\Big|\int_x^{x'}\varrho(s)\,ds\Big|\Big]\varrho(x')\,dx' - F[T(x)].$$

Des équations (26) et (27), on tire les équations équivalentes

(29) $$\frac{dT}{dx} = \frac{Ru_0\varrho_0 g(x)T\varrho^2 + (RT\varrho^2 - u_0^2\varrho_0^2)\hat{\Omega}(x,T,\varrho)}{R(R+c)u_0\varrho_0\varrho^2T - cu_0^3\varrho_0^3},$$
$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{cu_0\varrho_0 g(x)\varrho^3 - R\varrho^3\hat{\Omega}(x,T,\varrho)}{R(R+c)u_0\varrho_0\varrho^2T - cu_0^3\varrho_0^3}$$

en supposant que

(30) $$R(R+c)u_0\varrho_0\varrho^2T - cu_0^3\varrho_0^3 \neq 0.$$

Remarque faite sur les conditions initiales

$$T=T_0;\qquad \varrho=\varrho_0;\qquad \text{si}\quad x=0,$$

on voit que notre problème est amené à la résolution du système de deux équations intégrales non linéaires à deux fonctions inconnues $T(x),\varrho(x)$ suivant:

(31) $$T(x) = T_0 + \int_0^x \frac{Ru_0\varrho_0\varrho(y)T(y)\varrho^2(y) + [RT(y)\varrho^2(y) - u_0^2\varrho_0^2]\hat{\Omega}(y,T,\varrho)}{R(R+c)u_0\varrho_0T(y)\varrho^2(y) - cu_0^3\varrho_0^3}\,dy,$$
$$\varrho(x) = \varrho_0 + \int_0^x \frac{cu_0\varrho_0 g(y)\varrho^3(y) - R\varrho^3(y)\hat{\Omega}(y,T,\varrho)}{R(R+c)u_0\varrho_0T(y)\varrho^2(y) - cu_0^3\varrho_0^3}\,dy.$$

Nous résoudrons le système (31) par la méthode des approximations successives. Formons deux suites de fonctions

(32) $$T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots\qquad \varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_n(x), \ldots$$

suivant les relations de récurrence

(33) $$T_{n+1}(x) = T_0 + \int_0^x \frac{Ru_0\varrho_0 g(x)T_n(y)\varrho_n^2(y) + [RT_n(y)\varrho_n^2(y) - u_0^2\varrho_0^2]\Omega(y,T_n,\varrho_n)}{R(R+c)u_0\varrho_0T_n(y)\varrho_n^2(y) - cu_0^3\varrho_0^3}\,dy,$$
$$\varrho_{n+1}(x) = \varrho_0 + \int_0^x \frac{cu_0\varrho_0 g(y)\varrho_n^3(y) - R\varrho_n^3(y)\hat{\Omega}(y,T_n,\varrho_n)}{R(R+c)u_0\varrho_0T_n(y)\varrho_n^2(y) - cu_0^3\varrho_0^3}\,dy.$$

Pour démontrer l'existence des suites (32), supposons d'abord que le dénominateur sous les intégrales soit différent de zéro pour $T=T_0$, $\varrho=\varrho_0$:

$$R(R+c)u_0T_0\varrho_0^3 - cu_0^3\varrho_0^3 \neq 0.$$

Il existe donc une constante positive η, suffisamment petite, pour que l'inégalité

(34) $$|R(R+c)u_0\varrho_0T_n(x)\varrho_n^2(x) - cu_0^3\varrho_0^3| > \frac{1}{2}|R(R+c)T_0 - cu_0^2||u_0\varrho_0^3| \neq 0$$

soit vérifiée par toutes les fonctions réelles $T_n(x)$, $\varrho_n(x)$ satisfaisant aux inégalités

(35) $$|T_n(x) - T_0| < \eta,\qquad |\varrho_n(x) - \varrho_0| < \eta,$$

en outre on choisit η de manière que

(35) $$\eta < T_0,\qquad \eta < \varrho_0.$$

Supposons que les fonctions $T_n(x)$, $\varrho_n(x)$, des suites (32), soient positives, continues et qu'elles vérifient les inégalités (35) dans l'intervalle $(0,a)$. Cherchons alors la condition pour laquelle les fonctions suivantes $T_{n+1}(x)$, $\varrho_{n+1}(x)$ vérifient aussi ces inégalités.

Cherchons d'abord la borne supérieure du terme $\widehat{\Omega}(y,T_n,\varrho_n)$ sous la supposition (35). D'après les expressions (28), (13), (14), (15) et la propriété (21), on conclut que le résultat de l'opération $\widehat{\Omega}$ satisfait à l'inégalité

$$|\widehat{\Omega}(y,T_n,\varrho_n)|<\varkappa_a, \tag{36}$$

$\varkappa_a$ étant la borne supérieure de l'expression

$$f_1(0)+f_2(0)+(\varrho_0+\eta)\int_0^a c_1'|\log[(x-x')(\varrho_0\pm\eta)]|\,dx' \tag{37}$$
$$+c_1''(\varrho_0+\eta)a+F(T_0+\eta) \qquad (0\leqslant x\leqslant a).$$

La constante positive $\varkappa_a$ diminue et tend vers la valeur

$$f_1(0)+f_2(0)+F(T_0+\eta) \qquad \text{si} \quad a\to 0.$$

D'après les inégalités (34), (35), (35'), (36), les fonctions $T_{n+1}(x)$, $\varrho_{n+1}(x)$, données par les intégrales (33), sont continues et vérifient dans l'intervalle $(0,a)$ les inégalités:

$$|T_{n+1}(x)-T_0|$$
$$<\frac{Ru_0\varrho_0\bar{g}(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)^2+[R(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)^2+u_0^2\varrho_0^2]\varkappa_a}{\frac{1}{2}|R(R+c)T_0-cu_0^2||u_0\varrho_0^3|}a=A_1a,$$

(38)

$$|\varrho_{n+1}(x)-\varrho_0|<\frac{cu_0\varrho_0\bar{g}(\varrho_0+\eta)^3+R(\varrho_0+\eta)^3\varkappa_a}{\frac{1}{2}|R(R+c)T_0-cu_0^2||u_0\varrho_0^3|}a=A_2a,$$

$\bar{g}$ étant la borne supérieure de la fonction $|g(x)|$.

On voit donc que les fonctions $T_{n+1}(x)$, $\varrho_{n+1}(x)$ seront positives et vérifieront les inégalités

$$|T_{n+1}(x)-T_0|<\eta; \qquad |\varrho_{n+1}(x)-\varrho_0|<\eta$$

si l'épaisseur a de la couche est suffisamment petite pour qu'on ait à la fois

$$A_1a\leqslant\eta; \qquad A_2a\leqslant\eta. \tag{39}$$

On conclut de là, par induction, que si les fonctions initiales $T_1(x)$, $\varrho_1(x)$, arbitrairement choisies, sont positives, continues et vérifient les inégalités (35), toutes les fonctions des suites (32) existent, sont positives, continues et vérifient les inégalités (35), l'épaisseur a étant suffisamment petite.

Nous allons démontrer maintenant la convergence des suites (32). Nous étudierons à cet effet les différences $T_{n+1}-T_n$ et $\varrho_{n+1}-\varrho_n$ entre les termes consécutifs des suites (32). Remarquons que la différence de deux fractions vérifie l'inégalité

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\left|\frac{P_{n+1}-P_n}{Q_{n+1}}\right|+\left|\frac{(Q_{n+1}-Q_n)P_n}{Q_nQ_{n+1}}\right|;$$

alors, d'après les relations de récurrence (33) et en utilisant les inégalités (34), (35), (35'), (36), on conclut que les différences entre les termes consécutifs des suites (32) vérifient les inégalités

$$|T_{n+1}(x)-T_n(x)|$$
$$<\frac{2}{|R(R+c)T_0-cu_0^2||u_0\varrho_0^3|}\int_0^x\{R(\varrho_0+\eta)^2(|u_0|\varrho_0\bar{g}+\varkappa_a)|T_n-T_{n+1}|$$
$$+2(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)R(\varkappa_a+|u_0|\varrho_0\bar{g})|\varrho_n-\varrho_{n-1}|$$
$$+[R(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)^2+u_0^2\varrho_0^2]|\widehat{\Omega}(y,T_n,\varrho_n)-\widehat{\Omega}(y,T_{n-1},\varrho_{n-1})|\}\,dy$$
$$+\frac{4R|u_0|\varrho_0\bar{g}(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)^2+[R(T_0+\eta)(\varrho_0+\eta)+u_0^2\varrho_0^2]\varkappa_a}{[R(R+c)T_0-cu_0^2]^2|u_0|\varrho_0^5}\times$$
$$\times\int_0^x R(R+c)(\varrho_0+\eta)[(\varrho_0+\eta)|T_n-T_{n-1}|+2(T_0+\eta)|\varrho_n-\varrho_{n-1}|]\,dy,$$

(40)

$$|\varrho_{n+1}(x)-\varrho_n(x)|$$
$$<\frac{2}{[R(R+c)T_0-cu_0^2]|u_0\varrho_0^3|}\int_0^x\{(c|u_0|\varrho_0\bar{g}+R\varkappa_a)3(\varrho_0+\eta)^2|\varrho_n-\varrho_{n-1}|$$
$$+(\varrho_0+\eta)^3|\widehat{\Omega}(y,T_n,\varrho_n)-\widehat{\Omega}(y,T_{n-1},\varrho_{n-1})|\}\,dy$$
$$+\frac{R(R+c)(\varrho_0+\eta)^4(4c|u_0|\varrho_0\bar{g}+R\varkappa_a)}{(R(R+c)T_0-cu_0^2)^2|u_0|\varrho_0^5}\times$$
$$\times\int_0^x[(\varrho_0+\eta)|T_n-T_{n-1}|+2(T_0+\eta)|\varrho_n-\varrho_{n-1}|]\,dy.$$

Pour trouver la borne supérieure de la différence concernant l'opération $\hat{\Omega}$ donnée par la formule (28), on se base sur les propriétés (20), (21), (22), (24) des fonctions f_1, f_2, Φ et on remarque que les fonctions ϱ_n sont bornées inférieurement, notamment on a

$$\int_0^x \varrho_n(s)\,ds \geqslant (\varrho_0 - \eta)\,x.$$

Il s'ensuit qu'il existe des constantes positives $k, k_1, k_2, k_1', k_2', \delta_1, \delta_2, \delta$ telles que l'inégalité suivante soit vraie dans l'intervalle $(0, a)$ pour toute valeur n

$$(41)\quad |\hat{\Omega}(y, T_n, \varrho_n) - \Omega(y, T_{n-1}, \varrho_{n-1})| < [k_1|\log y| + k_2]\int_0^y |\varrho_n(s) - \varrho_{n-1}(s)|\,ds$$
$$+ [k_1'|\log(a-y)| + k_2']\int_0^a |\varrho_n(s) - \varrho_{n-1}(s)|\,ds + k|T_n(y) - T_{n-1}(y)|$$
$$+ \int_0^a [\delta_1 \log|y - x'| + \delta_2]\,[|T_n(x') - T_{n-1}(x')| + |\varrho_n(x') - \varrho_{n-1}(x')]\,dx'$$
$$+ \int_0^a \frac{\delta_3}{|y - x'|}\left|\int_y^{x'} |\varrho_n(s) - \varrho_{n-1}(s)|\,ds\right| dx'.$$

Le produit $y\log y$ étant borné dans l'intervalle $(0, a)$, on conclut, d'après les inégalités (40) et (41), qu'il existe une constante positive K, bornée si $a \to 0$, telle que les inégalités

$$(42)\quad \begin{aligned} &|T_{n+1}(x) - T_n(x)| < Ka\,[\text{borne sup}\,|T_n - T_{n-1}| + \text{borne sup}\,|\varrho_n - \varrho_{n-1}|],\\ &|\varrho_{n+1}(x) - \varrho_n(x)| < Ka\,[\text{borne sup}\,|T_n - T_{n-1}| + \text{borne sup}\,|\varrho_n - \varrho_{n-1}|] \end{aligned}$$

soient vraies dans l'intervalle $(0, a)$ pour toute valeur n. Il en résulte que les suites (32) convergent absolument et uniformément dans l'intervalle $(0, a)$ vers les limites

$$(43)\qquad T(x) = \lim T_n(x), \qquad \varrho(x) = \lim \varrho_n(x)$$

si l'épaisseur a de la couche est suffisamment petite pour qu'on ait $Ka < 1/2$. Les fonctions (43) et la fonction $u(x) = u_0\varrho_0/\varrho(x)$ présentent la solution de notre problème.

On démontre l'unicité de la solution comme d'habitude, en étudiant les différences $T_n(x) - T^*(x)$, $\varrho_n(x) - \varrho^*(x)$ entre les termes des suites (32) et une autre solution $T^*(x), \varrho^*(x)$. On constatera que ces différences tendent vers zéro donc que $T^* = T$, $\varrho^* = \varrho$ et la solution est unique.

Publications citées

[1] C. Białobrzeski, *Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre*, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, série A (1913), p. 264-290.

[2] R. Emden, *Strahlungsgleichgewicht*, Sitzungsberichte der mathematisch--physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München (1913), p. 55-142.

[3] W. Pogorzelski, *Équilibre d'une masse gazeuse rayonnante*, Comptes Rendus des Séanees de la Société Polonaise de Physique 1 (1920-21), p. 78-85.

[4] K. Schwarzschild, *Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.--phys. Klasse (1906), p. 41-53.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES