Sur l'approximation uniforme avec des noeuds

par S. Paszkowski (Wrocław)

Dans ce travail[1]), je généralise le problème de l'approximation uniforme qui comble, dans un certain sens, la lacune existant entre les polynômes de la meilleure approximation et les polynômes d'interpolation.

J'emploierai les notations et définitions suivantes:

1. La suite $\{p_n(t)\}$ de fonctions continues dans l'intervalle I' sera appelée *suite* $\mathcal{M}$ dans cet intervalle si l'expression

$$k_1 p_1(t) + k_2 p_2(t) + \ldots + k_n p_n(t),$$

pour tout n et $|k_1| + \ldots + |k_n| > 0$ a au plus $n-1$ racines distinctes dans I'[2]).

Comme exemples de suites $\mathcal{M}$ on a $1, t, t^2, \ldots$ (dans un intervalle arbitraire), $t, t^2, \ldots$ (dans un intervalle ne contenant pas 0). Dans la suite, on considérera les suites $\mathcal{M}$ dans les intervalles fermés.

2. On appellera *polynôme de degré* n toute combinaison linéaire des fonctions $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ de la suite $\mathcal{M}$.

Comme exemples de tels polynômes peuvent servir les polynômes algébriques de degré non supérieur à $n-1$.

3. $$d(t; s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}) = \begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_j(t) \\ p_1(s_1) & p_2(s_1) & \ldots & p_j(s_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1(s_{j-1}) & p_2(s_{j-1}) & \ldots & p_j(s_{j-1}) \end{vmatrix}.$$

La fonction $d(t; s_1, s_2, \ldots, s_{j-1})$ est un polynôme de degré j.

---

[1]) Présenté aux séances de la section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique les 19 mars et 4 mai 1954.

[2]) Dans l'oeuvre de N. I. Achiezer [1] une telle suite est appelée suite de Markoff, p. 94. Si la propriété dont il est question dans la définition, est vérifiée pour un certain n, le système $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ est appelé *système de Tchebycheff* ou *système T* (loc. cit. p. 85). Les théorèmes de ce travail sont justes pour les systèmes T et n convenable. En se limitant aux suites $\mathcal{M}$ on avait uniquement pour but la simplicité d'expression dans certains cas.

4. Soit un système de points $t_1, t_2, \ldots, t_m$ appartenant à l'intervalle fermé I' qui contient l'intervalle fixe $I = [a, b]$. Désignons ce système par $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Les points de T seront dits *noeuds*.

5. $\mathcal{C}_n$ désignera la classe des fonctions continues dans l'intervalle I, définies dans l'intervalle I', qui ne sont pas simultanément des polynômes de degré n.

6. Pour $x(t) \in \mathcal{C}_n$, $\mathcal{W}_n(x; T)$ désignera la classe des polynômes de degré n qui admettent aux noeuds les mêmes valeurs que la fonction $x(t)$, c'est-à-dire si $v(t) \in \mathcal{W}_n(x; T)$, $v(t_i) = x(t_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dans la suite on étudiera les propriétés de l'approximation uniforme de la fonction continue $x(t) \in \mathcal{C}_n$ dans l'intervalle I par des polynômes de la classe $\mathcal{W}_n(x; T)$. On supposera toujours que $n > m$ (le degré du polynôme est plus grand que le nombre de noeuds).

7. La distance entre les fonctions continues $x(t)$ et $y(t)$ sera le nombre

$$\delta(x, y) = \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|.$$

8. La distance de la fonction $x(t)$ à la classe $\mathcal{W}_n(x; T)$ sera le nombre

$$\varepsilon_n(x; T) = \inf_{v \in \mathcal{W}_n(x; T)} \delta(x, v).$$

9. On appellera *polynôme de la meilleure approximation de la fonction* $x(t) \in \mathcal{C}_n$ *dans la classe* $\mathcal{W}_n(x; T)$, le polynôme $w(t) \in \mathcal{W}_n(x; T)$ tel que $\delta(x, w) = \varepsilon_n(x; T)$.

10. Partout, où il n'y aurait pas confusion, on écrira $\mathcal{W}_n$ au lieu de $\mathcal{W}_n(x; T)$, et ε_n au lieu de $\varepsilon_n(x; T)$.

Dans ce travail je démontre l'existence du polynôme de la meilleure approximation et j'examine certaines de ses propriétés pour n fixé. Ces problèmes ont été étudiés par Bernstein ([3], p. 5-6) mais au cas seulement, où $T \cap \mathrm{Int} I = 0$[3]). Il obtient de cette manière une entière analogie — également dans les démonstrations des théorèmes à l'approximation sans noeuds. Comme il s'avérera (voir par exemple le théorème 2), on ne peut obtenir cette analogie dans le cas général. Je n'examine pas les problèmes aux limites comme par exemple: l'évaluation de ε_n pour diverses classes de fonctions continues, la convergence de la suite de polynômes de la meilleure approximation etc. Des théorèmes que j'ai démontrés sont en partie analogues à des théorèmes connus, entre autres de Bernstein sur l'approximation des fonctions continues par des polynô-

---

[3]) Le symbole $A \cap B$ désigne le produit des ensembles A et B, le symbole $A \cup B$, leur somme.

mes, et constituent une généralisation des résultats classiques de Tchebycheff, Borel et de la Vallée Poussin.

THÉORÈME 1. *Pour toute fonction* $x(t)\in\mathcal{C}_n$ *et tout* T, *il existe dans* $\mathcal{W}_n(x;T)$ *un polynôme de la meilleure approximation.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer avant tout que la classe $\mathcal{W}_n$ n'est pas vide. Or ceci résulte du théorème démontré par Achiezer[4]) que pour m $(m<n)$ points distincts $t_1,t_2,\ldots,t_m$ la matrice

$$\begin{Vmatrix} p_1(t_1) & p_2(t_1) & \ldots & p_n(t_1) \\ p_1(t_2) & p_2(t_2) & \ldots & p_n(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1(t_m) & p_2(t_m) & \ldots & p_n(t_m) \end{Vmatrix}$$

est d'ordre m. Donc, si par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1(t_1) & p_2(t_1) & \ldots & p_m(t_1) \\ p_1(t_2) & p_2(t_2) & \ldots & p_m(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1(t_m) & p_2(t_m) & \ldots & p_m(t_m) \end{vmatrix} \neq 0,$$

on calculera $k_1,k_2,\ldots,k_m$ du système d'équations

$$\begin{aligned} k_1p_1(t_1) + k_2p_2(t_1) + \ldots + k_mp_m(t_1) &= x(t_1), \\ k_1p_1(t_2) + k_2p_2(t_2) + \ldots + k_mp_m(t_2) &= x(t_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_1p_1(t_m) + k_2p_2(t_m) + \ldots + k_mp_m(t_m) &= x(t_m), \end{aligned}$$

on admettra $k_{m+1},\ldots,k_n$ égaux à 0 et $\sum_{i=1}^{n} k_ip_i(t)\in\mathcal{W}_n(x;T)$. Comme dans le théorème de Borel[5]), la démonstration de l'existence du polynôme de la meilleure approximation consiste à prouver que la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes de degré donné (dans ce cas, de polynômes de la classe $\mathcal{W}_n$) doit être un polynôme du même degré (un polynôme appartenant à $\mathcal{W}_n$). Je ne donnerai pas cette démonstration en raison de son entière analogie à celle du théorème de Borel.

Remarquons qu'en se limitant à l'approximation des fonctions $x(t)$ qui ne sont pas des polynômes, on avait pour but d'éliminer le cas banal où $\varepsilon_n=0$. Ainsi donc, pour toute fonction $x(t)\in\mathcal{C}_n$ et tout système de noeuds T, $\varepsilon_n(x;T)>0$.

[4]) Voir N. I. Achiezer [1], p. 81.

[5]) Voir E. Borel [4], p. 82. Voir également I. P. Natanson [6], p. 48.

La continuité de la fonction $x(t)\in\mathcal{C}_n$ et du polynôme $v(t)\in\mathcal{W}_n$ implique l'existence, dans l'intervalle I, d'un point dans lequel $|v(t)-x(t)|$ atteint le maximum égal à $\delta(x,v)$.

11. Un tel point est appelé (e) *point*; en particulier on l'appelle $(+)$ *point* si

$$v(t)-x(t)=\delta(x,v),$$

et $(-)$ *point* si

$$v(t)-x(t)=-\delta(x,v).$$

12. L'ensemble de tous les (e) points porte le nom *d'alternance de Tchebycheff du polynôme* $v(t)$[6]).

13. Tout intervalle fermé est appelé (e) *intervalle* s'il contient un (e) point. Dans le cas contraire on l'appelle (f) *intervalle.*

Le théorème ci-après qui constitue une généralisation du théorème de Tchebycheff, élargi plus tard par Bernstein sur les suites $\mathcal{M}$[7]), exprime un caractère de l'alternance du polynôme de la meilleure approximation.

THÉORÈME 2. *Si* $w(t)$ *est le polynôme de la meilleure approximation de la fonction* $x(t)\in\mathcal{C}_n$ *dans la classe* $\mathcal{W}_n(x;T)$, *il existe, dans l'intervalle* I, *un système* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}$ *de* l (e) *points* $(a_1<a_2<\ldots<a_l)$ *tel qu'avec les notations*

1º $y(t)=w(t)-x(t)$,

2º $S=A\cup T=\{s_1,s_2,\ldots,s_{l+m}\}$, *où* $s_1<s_2<\ldots<s_{l+m}$,

3º $a_1=s_p$,

4º $\eta_0=(-1)^p\operatorname{sign}y(s_p)$, $\quad\eta_j=\operatorname{sign}y(s_j)+\eta_{j-1}(\operatorname{sign}|y(s_j)|-1)$

pour $j=1,2,\ldots,l+m$, *le nombre de changements de signe dans la suite* $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{l+m}$ *ne soit pas moindre que* n.

Démonstration. Soit à l'intérieur de I un système de noeuds $t_1,t_2,\ldots,t_{m_1}$ $(t_1<t_2<\ldots<t_{m_1})$ et soit

$$I_0=[a,t_1], \qquad I_1=[t_1,t_2], \quad \ldots, \quad I_{m_1}=[t_{m_1},b].$$

Il résulte de la continuité de la fonction $y(t)$ dans l'intervalle I que chacun des intervalles I_j peut être représenté sous la forme

$$I_j=I_{j1}\cup I_{j2}\cup\ \ldots\ \cup I_{jk_j},$$

où $I_{j1},I_{j2},\ldots,I_{jk_j}$ sont des intervalles fermés, aux intérieurs disjoints, numérotés suivant la grandeur des extrémités et tels que

[6]) Voir I. P. Natanson [6], p. 51.

[7]) Voir S. Bernstein [3], p. 3 et 5.

1° chacun d'eux ne peut contenir qu'un genre de (e) points tout au plus ($(+)$ points ou $(-)$ points) et seulement en son intérieur (à l'exception peut-être des points a et b qui peuvent être des (e) points et ne se trouvant à l'intérieur d'aucun des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_{m_1}$),

2° deux intervalles voisins ne sont pas simultanément (e) intervalles ni (f) intervalles,

3° des (e) intervalles du même genre, c'est-à-dire des (e) intervalles qui contiennent le même genre de (e) points, ne sont pas limitrophes d'un (f) intervalle dans l'intervalle I_j,

4° chacun des intervalles $I_{01}, I_{0k_0}, I_{11}, \ldots, I_{m_1k_{m_1}}$, n'est pas (e) intervalle si son extrémité est un noeud.

Parmi les intervalles $I_{j1}, I_{j2}, \ldots, I_{jk_j}$ distinguons les (e) intervalles $E_{j1}, E_{j2}, \ldots, E_{jl_j}$. Il résulte de la division ci-dessus de I_j que

$$E_{j1} \cap E_{j2} = \ldots = E_{jl_j-1} \cap E_{jl_j} = 0$$

et que E_{jk} et $E_{j,k+1} (k=1,2,\ldots,l_j-1)$ ne sont pas des (e) intervalles du même genre.

Définissons le système A comme contenant exactement un (e) point de chacun des intervalles $E_{01}, E_{02}, \ldots, E_{m_1 l_{m_1}}$ (en dehors de ces intervalles il n'y a pas de (e) points). Il faut démontrer que le nombre de changements de signe dans la suite $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{l+m}$ (on la désignera dès lors par (η)) correspondant au système A ainsi défini n'est pas moindre que n.

Dans chaque intervalle I_j, on choisit un point entre tous les deux (e) intervalles consécutifs, ce qu'on peut inscrire en symboles

$$E_{j1} < q_{j1} < E_{j2} < \ldots < q_{jl_j-1} < E_{jl_j} \qquad (j=0,1,\ldots,m_1)$$

et on introduit une numération uniforme de ces points dans tout l'intervalle I. Etablissons que ces points sont $q_1, q_2, \ldots, q_{l'}$. Considerons à présent les noeuds. Soit $t_k \in T$ et $t_k = s_{k'}$. Si $s_{k'+1} \in A$ et $\eta_{k'}\eta_{k'+1} = -1$, au noeud t_k on fait correspondre le point appartenant à l'intervalle I_{k1} (qui par la quatrième propriété de la division I_k — n'est pas un (e) intervalle). On a ainsi les points $r_1, r_2, \ldots, r_{m'}$.

Soit

$$u(t) = \vartheta \cdot d(t; q_1, q_2, \ldots, q_{l'}, t_1, t_2, \ldots, t_m, r_1, r_2, \ldots, r_{m'}),$$

$|\vartheta| = 1$ et on choisit le signe ϑ de manière à ce que dans le (e) point $a_1 = s_p$ appartenant à l'intervalle E_{01}, le signe de $u(t)$ soit le même que celui de $y(t)$.

A présent en examinera le signe de $u(t)$ dans tous les autres (e) points en profitant de la remarque que les seules racines de $u(t)$ sont les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_{l'}, t_1, t_2, \ldots, t_m, r_1, r_2, \ldots, r_{m'}$ et que $u(t)$ change de signe au passage de t par chacun de ces nombres, s'il se trouve à l'intérieur de l'intervalle I' [8]). A chacun des points $q_1, q_2, \ldots, q_{l'}$ correspond un changement de signe dans la suite (η), car ce point se trouve entre les (e) intervalles de gerre divers, c'est-à-dire entre deux points A dans lesquels les signes de la fonction $y(t)$ sont opposés. On profite ici de nouveau du fait que pour $s_i \in A$, $\eta_i = \operatorname{sign} y(s_i)$.

Par contre si $s_i \in T$, $\eta_i = -\eta_{i-1}$, ainsi donc à chacun des noeuds $t_1, t_2, \ldots, t_m$ correspond un changement de signe dans la suite (η).

Enfin, il resulte de la définition des points $r_1, r_2, \ldots, r_{m'}$, qu'à chacun d'eux correspond également un changement de signe dans (η). Inversement, à chaque changement de signe dans cette suite correspond une autre racine du polynôme $u(t)$, notamment lorsque

$$s_i \in A, \quad s_{i+1} \in A \quad \text{— un des points } q_1, q_2, \ldots, q_{l'},$$
$$s_i \in T, \quad s_{i+1} \in A \quad \text{— un des points } r_1, r_2, \ldots, r_{m'},$$
$$s_{i+1} \in T \quad \text{— un des points } t_1, t_2, \ldots, t_m.$$

Donc le nombre de racines du polynôme $u(t)$ est égal à celui des changements de signe dans la suite (η). On le désignera par la lettre z.

De plus le nombre de racines de $u(t)$ dans chaque sous-intervalle de l'intervalle I est égal à celui des changements de signe dans la partie de (η) correspondant aux nombres du système S qui appartiennent à ce sous-intervalle. C'est pourquoi entre les intervalles E_{01} et E_{jk} il y a autant de racines de $u(t)$ et autant de fois $u(t)$ change de signe, qu'il y a de changements de signe dans la partie correspondante de la suite (η).

Considérons la suite

$$(1) \qquad 0 \neq \operatorname{sign} y(s_p),\ \operatorname{sign} y(s_{p+1}),\ \ldots,\ \operatorname{sign} y(s_{p'}) \neq 0,$$

où $s_p = a_1 \in E_{01}$, $s_{p'} \in E_{jk}$. Si dans la suite (1) il n'y avait pas de zéro, c'est-à-dire si dans la suite $s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{p'}$ il n'y avait pas de noeud, il est clair que le nombre de changements de signe dans la suite (1) serait le même que dans la suite $\eta_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_{p'}$, et les signes de $u(s_{p'})$ et $y(s_{p'})$ seraient identiques.

En plaçant un noeud entre les points s_i, s_{i+1} de la suite $s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{p'}$ on ne modifie pas le nombre de changements de signe dans la suite (1) et on provoque dans la suite $\eta_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_{p'}$ soit un supplément de 2 changements de signe (lorsque $\eta_i = \eta_{i+1}$), soit le maintien de la même quantité de changements de signe (lorsque $\eta_i = -\eta_{i+1}$).

C'est pourquoi dans le cas général, lorsque parmi les nombres $s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{p'}$ se trouvent des noeuds, le nombre de changements de signe dans la suite (1) et celui dans la suite $\eta_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_{p'}$ diffèrent d'un nombre

[8]) Voir N. I. Achiezer [1], p. 85-86.

pair, d'où les signes de $u(s_{\nu'})$ et $y(s_{\nu'})$ sont égaux. Ainsi donc les signes des fonctions $y(t)$ et $u(t)$ sont conformes dans tous les (e) points.

Soit $E=\bigcup_{j=0}^{m_1}\bigcup_{k=1}^{l_j}E_{jk}$. Le polynôme $u(t)$ ne s'annulle dans aucun (e) intervalle et c'est pourquoi (E est un ensemble fermé)

$$\min_{t\in E}|u(t)|=u_1>0.$$

En outre, soit

$$\max_{t\in I}|u(t)|=u_2,\qquad \max_{t\in \overline{I-E}}|y(t)|=y_1<\varepsilon_n,$$

car dans les (f) intervalles dont la somme est l'ensemble $\overline{I-E}$ il n'y pas de (e) points. Il résulte de la première propriété de la division I_j que

$$\max_{j,k}\max_{t',t''\in I_{jk}}|y(t')-y(t'')|=y_2<2\varepsilon_n. \tag{2}$$

Posons $g=\min\big((\varepsilon_n-y_1)/2u_2,(2\varepsilon_n-y_2)/2u_2\big)$ et considérons la fonction $y(t)-gu(t)$. Si E_{jk} est un (e) intervalle contenant des $(+)$ points, il résulte de la formule (2) pour $t\in E_{jk}$

$$\varepsilon_n-y_2\leqslant y(t)\leqslant\varepsilon_n,$$

et en même temps (les signes des fonctions $u(t)$ et $y(t)$ sont les mêmes dans les (e) points) $u_1\leqslant u(t)$. C'est pourquoi

$$-\varepsilon_n<-\frac{1}{2}y_2\leqslant\varepsilon_n-y_2-gu_2\leqslant y(t)-gu(t)\leqslant\varepsilon_n-gu_1<\varepsilon_n.$$

De même, si E_{jk} contient des $(-)$ points,

$$-\varepsilon_n\leqslant y(t)\leqslant y_2-\varepsilon_n,\qquad u(t)\leqslant -u_1,$$

$$-\varepsilon_n<-\varepsilon_n+gu_1\leqslant y(t)-gu(t)\leqslant y_2-\varepsilon_n+gu_2\leqslant\frac{1}{2}u_2<\varepsilon_n.$$

C'est pourquoi dans l'ensemble E

$$|y(t)-gu(t)|<\varepsilon_n. \tag{3}$$

Par contre pour $t\in I-E$

$$|y(t)-gu(t)|\leqslant|y(t)|+g|u(t)|\leqslant y_1+\frac{1}{2}(\varepsilon_n-y_1)<\varepsilon_n,$$

d'où l'inégalité (3) est juste dans tout l'intervalle fermé I. On peut également l'écrire sous la forme

$$|w(t)-gu(t)-x(t)|<\varepsilon_n. \tag{4}$$

Puisque

$$w(t_i)-gu(t_i)=w(t_i)=x(t_i)\quad\text{pour}\quad i=1,2,\ldots,m$$

et le degré du polynôme $u(t)$ est égal à $z+1$ (z désigne la quantité de changements de signe dans la suite (η)), alors

$$w(t)-gu(t)\in\mathcal{W}_{z+1}(x;T).$$

De (4) et de la définition de ε_n, il resulte que $z+1>n$, c'est-à-dire $z\geqslant n$, ce qu'il fallait démontrer.

Deux corollaires résultent du théorème 2.

Corollaire 1. *L'alternance de Tchebycheff du polynôme de la meilleure approximation $x(t)\in\mathcal{C}_n$ dans la classe $\mathcal{W}_n$ contient au moins $n-m+1$ points.*

En effet, puisque dans la suite (η) on a, en vertu du théorème 2, n changements de signe, elle se compose — et par la même l'ensemble S également — d'au moins $n+1$ nombres. Dans l'ensemble S il y a m noeuds, donc au moins $n+1-m$ (e) points.

Corollaire 2. *Pour $n>m+m_1$, l'alternance de Tchebycheff du polynôme de la meilleure approximation $x(t)\in\mathcal{C}_n$ dans la classe $\mathcal{W}_n$ contient des $(+)$ et $(-)$ points.*

m_1 désigne, comme dans le théorème 2, le nombre de noeuds contenus à l'intérieur de l'intervalle I. De la démonstration du théorème 2 on sait au sujet du système A que a_j et a_{j+1} appartenant à A ne sont pas des (e) points du même genre s'il n'y a pas de noeuds entre eux. Soit $n>m+m_1$. La quantité d'éléments dans la suite (η) égale à $l+m$ ne doit pas être inférieure à $n+1$. D'où $l+m\geqslant n+1>m+m_1+1$ et $l>m_1+1$, c'est-à-dire $l\geqslant m_1+2$. C'est pourquoi dans l'intervalle I il y a au moins 2 (e) points non separés par un noeud — donc l'un d'eux est un $(+)$ point, l'autre un $(-)$ point.

Il est facile de citer des exemples prouvant que l'on ne peut renforcer le théorème 2, c'est-à-dire plus strictement, qu'on ne peut en général borner à gauche le nombre de changements de signe dans la suite (η) par un nombre plus grand que n. Considérons notamment la suite $\mathcal{M}: 1,t,t^2,\ldots$ Soit $I=I'=[-1,1]$ et $T=\{1/2\}$. Pour la fonction

$$x(t)=\max\left(0,\frac{1}{2}-|t|\right) \tag{5}$$

le polynôme de la meilleure approximation dans la classe $\mathcal{W}_3(x;\{1/2\})$ est le suivant:

$$w(t)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(t+\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

$|w(t)-x(t)|$ atteint un maximum égal à $(1+\sqrt{2})/8$ aux points $a_1=-1/\sqrt{2}$, $a_2=0, a_3=1$. Et $-1/\sqrt{2}$ est un $(+)$ point tandis que 0 et 1 sont des $(-)$ points. On a ici $S=\{-1/\sqrt{2},0,1/2,1\}, \eta_0=-1, \eta_1=1, \eta_2=-1, \eta_3=1, \eta_4=-1$, et il y a 3 changements de signe dans la suite (η), c'est-à-dire que l'alternance se compose de $n-m+1=3-1+1=3$ points; on ne peut donc également renforcer le corollaire 1. Considérons encore le polynôme de la meilleure approximation de la fonction (5) dans la classe $\mathcal{W}_4^2(x;\{-1/2,1/2\})$ et dans l'intervalle $I=[-1,1]$

(6) $$w(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-t^2\right).$$

On a ici $n=4$, $n=m_1=2$, $n=m+m_1$. Puisque l'alternance du polynôme (6) ne se compose que de $(-)$ points, on ne peut également renforcer le corollaire 2.

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction $x(t)\in\mathcal{C}_n$, tout $n>m$ et tout système de noeuds T il existe exactement un polynôme de la meilleure approximation dans la classe $\mathcal{W}_n^m(x;T)$.*

Démonstration[9]). Supposons que $w_1(t)$ et $w_2(t)$ sont des polynômes de la meilleure approximation de $x(t)\in\mathcal{C}_n$ dans la classe $\mathcal{W}_n^m$

$$|w_1(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon_n, \qquad |w_2(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon_n.$$

De là également

$$|w(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon_n,$$

où $w(t)=[w_1(t)+w_2(t)]/2$. La fonction $w(t)$ est donc aussi un polynôme de la meilleure approximation, car évidemment $w(t)\in\mathcal{W}_n^m$. Il résulte du corollaire 1 que le polynôme $w(t)$ possède une alternance composée de $n+1-m$ points $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1-m}$, dans lesquels

$$|w(a_j)-x(a_j)|=\varepsilon_n \qquad (j=1,2,\ldots,n+1-m);$$

et l'inégalité

$$|w_1(a_j)-x(a_j)|\leqslant\varepsilon_n$$

implique que

$$\begin{aligned}|w_2(a_j)-x(a_j)|&=|2[w(a_j)-x(a_j)]-[w_1(a_j)-x(a_j)]|\\&\geqslant 2\varepsilon_n-|w_1(a_j)-x(a_j)|\geqslant\varepsilon_n;\end{aligned}$$

de là

$$|w_1(a_j)-x(a_j)|=\varepsilon_n \quad \text{et} \quad |w_2(a_j)-x(a_j)|=\varepsilon_n.$$

[9]) La méthode de démonstration comme dans le travail de I. P. Natanson [6], p. 55 (théorème 3).

C'est pourquoi les (e) points du polynôme $w(t)$ sont en même temps ceux des polynômes $w_1(t)$ et $w_2(t)$ et du même genre, car si par exemple

$$w_1(a_j)-x(a_j)=\varepsilon_n \quad \text{et} \quad w_2(a_j)-x(a_j)=-\varepsilon_n,$$

alors $w(a_j)-x(a_j)=0$. Donc

$$w_1(a_j)-w_2(a_j)=0 \quad \text{pour} \quad j=1,2,\ldots,n+1-m.$$

En outre

$$w_1(t_i)-x(t_i)=w_2(t_i)-x(t_i)=0 \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Il en résulte que le polynôme $w_1(t)-w_2(t)$ possède en tout $n+1$ racines, et de la définition de la suite $\mathcal{M}$ il est identiquement égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

On démontrera à présent une certaine propriété de la suite $\mathcal{M}$. Mais donnons auparavant quelques définitions.

14. On appellera t_0 *racine simple* du polynôme

$$v(t)=k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+\ldots+k_np_n(t),$$

où $|k_1|+\ldots+|k_n|>0$, si $v(t_0)=0$ et $v(t)$ change de signe au passage de t par t_0. On appellera t_0 *racine double* du polynôme $v(t)$ si $v(t_0)=0$ et $v(t)$ ne change pas de signe au passage de t par t_0. En cherchant le nombre de racines du polynôme $v(t)$, on compte une fois les racines simples et deux fois les racines doubles.

THÉORÈME 4. *Tout polynôme $v(t)$ de degré n possède dans l'intervalle I' au plus $n-1$ racines en tenant compte de leur multiplicité définie dans* 14[10]).

Démonstration. Supposons que le polynôme $v(t)$ de degré n n'ayant dans l'intervalle I' plus que $n-1$ différentes racines ait en même temps $n'\geqslant n$ racines en tenant compte de leurs multiplicités (on voit que $n'\leqslant 2n-2$).

Ainsi donc le polynôme $v(t)$ a $n'-2$ racines simples et une racine double, ou $n'-4$ racines simples et 2 racines doubles, ..., ou $n'-2[n'/2]$ racines simples et $[n/2]$ racines doubles[11]).

Dans l'entourage de chaque racine double le polynôme $v(t)$ est non positif ou non-négatif. Soient $q_1,q_2,\ldots,q_{n''}$ les racines distinctes du polynôme $v(t)$ $(q_1<q_2<\ldots<q_{n''})$. Soient $q_{k_1},q_{k_2},\ldots,q_{k_l}$ les racines doubles (également ordonnées selon la grandeur). A chaque couple de racines consécuti-

[10]) Pendant que ce travail était imprimé, j'ai trouvé que le théorème 4 est connu. Il a été trouvé par S. Bernstein ([2], p. 8, lemme 1). La preuve donnée dans ce travail est un peu différente et le théorème est necessaire pour obtenir les autres résultats de ce travail.

[11]) $[t]$ désigne une partie entière de t.

ves doubles, dans l'entourage desquelles le polynôme $v(t)$ a des signes différents on fait correspondre un point situé entre eux. Appelons ces points $r_1, r_2, \dots, r_k$. Puisqu'il y a au plus $[n'/2]$ racines doubles, $k \leqslant [n'/2] - 1 \leqslant [n-1] - 1 = n-2$. Soit

$$u(t) = \vartheta\, d(t; r_1, r_2, \dots, r_k),$$

où ϑ égale 1 ou -1. On choisit ϑ de manière que le signe de $u(q_{k_1})$ soit le même que le signe du polynôme $v(t)$ dans l'entourage q_{k_1}. Posons $a' = q_0$, $b' = q_{n''+1}$ (intervalle $I' = [a', b']$) et soit

$$h = \min_{0 \leqslant i \leqslant n''} \max_{t \in [q_i, q_{i+1}]} |v(t)|, \qquad u = \max_{t \in I'} |u(t)|, \qquad g = \frac{h}{2u}.$$

Le polynôme $u(t)$ est de degré $k+1 \leqslant n-1$, donc le polynôme $v(t) - g u(t)$ est de degré n. En vertu du lemme d'Achiezer, cité dejà dans [8]), le polynôme $u(t)$ change de signe au passage de t par chacun des points $r_1, r_2, \dots, r_k$, et c'est pourquoi dans des entourages suffisamment petits des racines doubles de $v(t)$ $(q_{k_1}, q_{k_2}, \dots, q_{k_l})$ le polynôme $u(t)$ a le même signe que le polynôme $v(t)$. Calculons le nombre des différentes racines du polynôme $v(t) - g u(t)$. Soit d'abord q_i une racine simple de $v(t)$. Dans les intervalles (q_{i-1}, q_i), (q_i, q_{i+1}) existent respectivement des points q_i', q_i'', tels que $|v(q_i')| = |v(q_i'')| = h$ (ceci résulte de la définition de h) et $v(q_i') v(q_i'') < 0$. Puisque

$$v(q_i')[v(q_i') - g u(q_i')] \geqslant h^2 - gh\, u(q_i') \geqslant h^2 - \frac{h^2}{2} > 0$$

et analogiquement

$$v(q_i'')[v(q_i'') - g u(q_i'')] > 0,$$

alors

$$[v(q_i') - g u(q_i')][v(q_i'') - g u(q_i'')] < 0$$

et la racine du polynôme $v(t) - g \cdot u(t)$ se trouve entre q_i' et q_i''.

Soit maintenant q_j une racine double du polynôme $v(t)$, et que dans un entourage de q_i, les valeurs du polynôme $v(t)$ soient, par exemple, non-négatives. Dans les intervalles (q_{j-1}, q_j), (q_j, q_{j+1}) existent des points q_j', q_j'' tels que $v(q_j') = v(q_j'') = h$.

On a successivement

$$u(q_j) > 0, \qquad v(q_j) - g u(q_j) = -g u(q_j) < 0,$$

$$v(q_j') - g u(q_j') = h - g u(q_j') \geqslant \frac{h}{2} > 0,$$

$$v(q_j'') - g u(q_j'') = h - g u(q_j'') \geqslant \frac{h}{2} > 0.$$

C'est pourquoi dans l'intervalle (q_j', q_j'') se trouvent deux différentes racines du polynôme $v(t) - g u(t)$. Ainsi donc à chaque racine simple du polynôme $v(t)$ correspond une autre racine du polynôme $v(t) - g u(t)$; à chaque racine double de $v(t)$ correspondent 2 racines de $v(t) - g u(t)$ (différentes — il est clair — pour chaque racine de $v(t)$) et le polynôme $v(t) - g u(t)$ a n' différentes racines, c'est-à-dire d'après la définition de la suite $\mathcal{M}$

$$v(t) = g u(t).$$

Ceci est cependant impossible, du fait que $u(t)$ n'a pas de racines doubles et $v(t)$ en a au moins une. Ainsi donc le polynôme $v(t)$ a réellement au plus $n-1$ racines en tenant compte de leur multiplicité.

Le théorème 4 montre comment les polynômes examinés dans ce travail sont une généralisation naturelle des polynômes algébriques et sert à démontrer le théorème suivant. La première partie de ce dernier constitue une généralisation du théorème de la Vallée Poussin [12]), la deuxième généralise le théorème de Tchebycheff et est la réciprocité du théorème 2.

THÉORÈME 5. *Soient une fonction $x(t) \epsilon \mathcal{C}_n$ et un polynôme $v(t) \epsilon \mathcal{W}_n$. Soit $y(t) = v(t) - x(t)$. Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ un système de points appartenant à l'intervalle I, dans lesquels $y(t)$ est non nul $(a_1 < a_2 < \dots < a_l)$.*

Soit $S = A \cup T = \{s_1, s_2, \dots, s_{l+m}\}$, où $s_1 < s_2 < \dots < s_{l+m}$. Soit enfin $a_1 = s_p$,

$$\eta_0 = (-1)^p \operatorname{sign} y(s_p),$$

$$\eta_j = \operatorname{sign} y(s_j) + \eta_{j-1}(\operatorname{sign}|y(s_j)| - 1) \quad \textit{pour} \quad j = 1, 2, \dots, l+m.$$

Si

1⁰ $y(s_j) y(s_{j+1}) \leqslant 0$ *pour* $j = 1, 2, \dots, l+m-1$,

2⁰ *le nombre de changements de signe dans la suite* $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l+m}$ *n'est pas moindre que* n,

alors

$$\varepsilon_n(x; T) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant l} |y(a_i)|.$$

Si en outre

3⁰ $|y(a_i)| = \delta(x, v)$ *pour* $i = 1, 2, \dots, l$,

alors $\delta(x, v) = \varepsilon_n(x; T)$, *c'est-à-dire* $v(t)$ *est un polynôme de la meilleure approximation de* $x(t)$ *dans la classe* $\mathcal{W}_n$.

[12]) Voir C. de la Vallée Poussin [7] et S. Bernstein [3], p. 4-5.

Démonstration[13]. Supposons — en dépit du théorème — que $\varepsilon_n(x;T) < \min_{1\leqslant i\leqslant l} |y(a_i)|$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $u(t)\epsilon\mathcal{W}_n$, pour lequel $\delta(x,u) < \min_{1\leqslant i\leqslant l} |y(a_i)|$. Soit $z(t)=v(t)-u(t)$. De là

$$z(a_i)=v(a_i)-u(a_i)=y(a_i)-[u(a_i)-x(a_i)]$$

et puisque $|u(a_i)-x(a_i)|\leqslant\delta(x,u)$, le signe de $z(a_i)$ est conforme au signe de $y(a_i)$. La suite $\operatorname{sign} y(s_1)$, $\operatorname{sign} y(s_2),\ldots,\operatorname{sign} y(s_{l+m})$ sera désignée par (y) et la suite $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{l+m}$ par (η) — comme dans le théorème 2. Examinons plus en détails la méthode de formation de la suite (η).

Si $s_j\epsilon A$, alors $\eta_j=\operatorname{sign} y(s_j)$ et si $s_j\epsilon T$, alors $\eta_j=-\eta_{j-1}$. Donc la suite (η) est issue de la suite (y) en laissant dans cette dernière les nombres différents de zéro sans changement et en y changeant les zéros en nombres 1 et -1 de manière que le zéro figurant dans (y) après $\operatorname{sign} y(s_j)\neq 0$ devienne $\eta_{j+1}=-\operatorname{sign} y(s_j)$, le zéro suivant (s'il existe) devienne $\eta_{j+2}=-\eta_{j+1}=\operatorname{sign} y(s_j)$ etc. Si $a_1=s_1$, alors

$$\eta_1=\operatorname{sign} y(s_1).$$

Si $p>1$, c'est-à-dire $s_1=t_1,\ldots,s_{p-1}=t_{p-1}$, alors

$$\eta_0=(-1)^p\operatorname{sign} y(s_p),\qquad \eta_1=-\eta_0,\quad \ldots,\quad \eta_{p-1}=-\eta_{p-2},$$

$$\eta_p=-\eta_{p-1}=\operatorname{sign} y(s_p),$$

c'est-à-dire les nombres $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p$ ont tour à tour les valeurs 1 et -1.

Ainsi par exemple de la suite (y) aux signes $0,0,-,+,0,0,+,0,+$ découle une suite (η) aux signes $-,+,-,+,-,+,+,-,+$.

Remarquons encore que l'hypothèse 1° n'est pas très nécessaire mais elle a été faite pour simplifier les considérations ultérieures. On peut rayer du système A certains points de manière que la première hypothèse soit remplie sans diminuer le nombre de changements de signe dans la suite (η).

La première partie du théorème (avec les hypothèses 1°, 2°) sera établie si on démontre que la fonction $z(t)$ a au moins autant de racines qu'il y a de changements de signe dans la suite (η).

Considérons tous les genres possibles de successions de signes dans la suite (y).

[13] La méthode de démonstration comme dans le travail [6], p. 56 (théorème 4).

Les cas suivants peuvent avoir lieu:

1.	$+,-$	(ou $-,+$),
2a.	$+,0,+$	(ou $-,0,-$),
2b.	$+,0,0,-$	(ou $-,0,0,+$),
2c.	$+,0,0,0,+$	(ou $-,0,0,0,-$),
. . . . . .		
3a.	$+,0,-$	(ou $-,0,+$),
3b.	$+,0,0,+$	(ou $-,0,0,-$),
3c.	$+,0,0,0,-$	(ou $-,0,0,0,+$),
. . . . . .		

à la fin de la suite

4a.	$+,0$	(ou $-,0$),
4b.	$+,0,0$	(ou $-,0,0$),
. . . . . .		

au début de la suite

5a.	$0,+$	(ou $0,-$),
5b.	$0,0,+$	(ou $0,0,-$),
. . . . . .		

Pour leur examen on profite du fait que $\operatorname{sign} z(a_i)=\operatorname{sign} y(a_i)$. Dans le cas 1 au changement de signe dans la suite (η) correspond une racine de la fonction $z(t)$, car les nombres $z(s_j)$ et $z(s_{j+1})$ sont de signes différents.

Dans le cas 2a (on examine analogiquement 2b, 2c, ...)

$$\operatorname{sign} y(s_{j-1})=1,\qquad \operatorname{sign} y(s_j)=0,\qquad \operatorname{sign} y(s_{j+1})=1.$$

Lorsque t passe par s_j, la fonction $z(t)$ ou bien ne change pas de signe et s_j est une racine double, ou bien elle change de signe et dans l'intervalle (s_{j-1},s_{j+1}) existe une racine $z(t)$ différente de s_j. Puisque

$$\eta_{j-1}=1,\qquad \eta_j=-1,\qquad \eta_{j+1}=1,$$

ici aussi à chaque changement de signe correspond une racine $z(t)$. Dans le cas 3a, lorsque

$$\operatorname{sign} y(s_{i-1})=1,\qquad \operatorname{sign} y(s_i)=0,\qquad \operatorname{sign} y(s_{i+1})=-1$$

et

$$\eta_{i-1}=1,\qquad \eta_i=-1,\qquad \eta_{i+1}=-1,$$

au changement de signe qui survient dans cette partie de (η), correspond une racine s_i de la fonction $z(t)$. Dans le cas 4a aux signes $+,0$

dans la suite (y) correspondent les signes $+,-$ dans la suite (η) et au changement de signe correspond une racine de $z(t)$, car cette fonction en tant que différence de polynômes de la classe $\mathcal{W}_n$ s'annulle dans les noeuds. Enfin dans le cas 5 il y a au moins autant de racines que de changements de signe dans (η), car si par exemple (cas 5a)

$$\operatorname{sign} y(s_1)=0, \qquad \operatorname{sign} y(s_2)=1,$$

il découle de la définition de la suite (η)

$$\eta_1=-1, \qquad \eta_2=1.$$

D'après l'hypothèse 2^0, la fonction $z(t)$ a donc n racines en tenant compte de leur multiplicité définie dans 14, donc $z(t)$, en vertu du théorème 4, est identiquement égal à zéro et $v(t)=u(t)$, ce qui conduit à une contradiction, car $\delta(x,u)<\min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}|y(a_i)|$ et évidemment $\delta(x,v)\geqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}|y(a_i)|$.

Si de plus (hypothèse 3^0) $|y(a_i)|=\delta(x,v)$ pour $i=1,2,\ldots,l$, alors $\varepsilon_n(x;T)\geqslant\delta(x,v)$. De là et de la définition $\varepsilon_n(x;T)$ on obtient l'égalité demandée $\varepsilon_n(x;T)=\delta(x,v)$.

Le théorème 3 garantit en outre que $v(t)$ est le seul polynôme de la meilleure approximation de $x(t)$ dans $\mathcal{W}_n^2$.

Le théorème 5 est pratiquement important car avec le théorème 2 il permet toujours d'établir si le polynôme examiné $v(t)$ est celui de la meilleure approximation de la fonction $x(t)$ ou non—naturellement lorsqu'on peut étudier la différence $y(t)=v(t)-x(t)$. En outre de l'étude du polynôme remplissant les hypothèses 1^0 et 2^0 du théorème 5, on obtient certaines informations sur $\varepsilon_n(x;T)$.

Utilisons ce théorème comme exemple pour la construction de polynômes algébriques, de degré n sans terme libre, avec le coefficient de t^n égal à 1, rapprochant le mieux uniformément 0 dans l'intervalle $[0,1]$. Considérons la suite $\mathcal{M}$: $1,t,t^2,\ldots$

THÉORÈME 6. *Le polynôme algébrique de degré n rapprochant le mieux 0 dans l'intervalle $[0,1]$, avec le coefficient de t^n égal à 1, s'exprime comme suit:*

$$w_n(t)=2^{1-n}(1-q_n)^{-n}\cos\left[n\arccos\left((1-q_n)t+q_n\right)\right], \tag{7}$$

où $q_n=\cos\left((2n-1)\pi/2n\right)$.

Démonstration. Considérons le polynôme de Tchebycheff $2^{1-n}\cos(n\arccos t)$ rapprochant le mieux uniformément 0 dans $[-1,1]$ parmi les polynômes de degré n avec le coefficient de t^n égal à 1[14]). On change l'intervalle $[q_n,1]$, c'est-à-dire l'intervalle à partir de la plus petite racine de ce polynôme à 1, en intervalle $I=[0,1]$. En divisant par $(1-q_n)^n$ pour maintenir le coefficient de t^n on obtient le polynôme (7). De la définition de q_n, on obtient tout de suite

$$w_n(0)=2^{1-n}(1-q_n)^{-1}\cos(n\arccos q_n)=0.$$

Pour appliquer le théorème 5 remarquons que la solution du problème posé equivaut à trouver un polynôme algébrique de degré $n-1$ de la meilleure approximation de la fonction t^n pour $I=I'=[0,1]$ et $T=\{0\}$, c'est-à-dire un polynôme, au sens de la définition 2, de degré n. On approxime donc t^n dans la classe $\mathcal{W}'_n(t^n;\{0\})$.

L'alternance du polynôme (7) se compose de n points $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(0<a_1<\ldots<a_n)$, car l'alternance du polynôme de Tchebycheff se compose de $n+1$ points et la transformation de l'intervalle n'a éliminé qu'un d'eux, notamment -1. C'est pourquoi $S=\{0,a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Puisque les points de l'alternance sont tour à tour des $(+)$ et $(-)$ points, la suite (η) prend la forme

$$\vartheta,-\vartheta,\vartheta,\ldots,(-1)^n\vartheta \qquad (\vartheta=1 \quad \text{ou} \quad -1)$$

et les changements de signe dans cette suite sont au nombre de n. C'est pourquoi en vertu du théorème 5, le polynôme (7) est celui de la meilleure approximation de zéro dans l'intervalle $[0,1]$.

Du théorème 6 il résulte que

$$\varepsilon_n(t^n;\{0\})=2^{1-n}(1-q_n)^{-n}=2^{1-2n}[\cos(\pi/4n)]^{-2n}.$$

Puisque 2^{1-2n} est la distance du zéro du polynôme de Tchebycheff dans l'intervalle I, l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}2^{2n-1}\varepsilon_n(t^n;\{0\})=1$$

montre que pour des n suffisamment grands, l'approximation de zéro au sens ordinaire et l'approximation de zéro avec un noeud donne pratiquement la même erreur.

Et voici les polynômes (7) pour $n=1,2,3,4$:

$$w_1(t)=t,$$

$$w_2(t)=t^2-(2\sqrt{2}-2)t\approx t^2-0{,}828427124\,7\,t,$$

$$w_3(t)=t^3-3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})t^2+6(7-4\sqrt{3})t$$
$$\approx t^3-1{,}392304845\,4\,t^2+0{,}430780618\,3\,t,$$

$$w_4(t)=t^4+\left[12+8\sqrt{2}-(8+4\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}+2}\right]t^3+$$
$$+\left[178+126\sqrt{2}-(96+68\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}+2}\right]t^2+$$
$$+\left[740+524\sqrt{2}-(400+284\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}+2}\right]$$
$$\approx t^4-1{,}920867740\,2\,t^3+1{,}113475393\,7\,t^2-0{,}183483375\,3\,t;$$

[14]) Voir I. P. Natanson [6], p. 63.

les distances respectives sont de

$$\varepsilon\left(t_1;\{0\}\right)=1 \qquad (2^{1-2\cdot 1}=0{,}5),$$
$$\varepsilon_2\left(t^2;\{0\}\right)\approx 0{,}172 \qquad (2^{1-2\cdot 2}=0{,}125),$$
$$\varepsilon_3\left(t^3;\{0\}\right)\approx 0{,}0385 \qquad (2^{1-2\cdot 3}\approx 0{,}0313),$$
$$\varepsilon_4\left(t^4;\{0\}\right)\approx 0{,}00912 \qquad (2^{1-2\cdot 4}\approx 0{,}00781).$$

Dans l'exemple sus-cité d'application du théorème 5 on a profité des polynômes de la meilleure approximation sans noeuds. C'est une méthode non typique car la transformation de l'intervalle d'approximation provoque un changement de la fonction approchée. Du reste, on sait bien que c'est uniquement pour les fonctions très simples qu'on parvient à trouver le polynôme de la meilleure approximation sans noeuds, et d'autant plus avec des noeuds.

C'est pourquoi le théorème 5 permet de vérifier si un polynôme est celui de la meilleure approximation, et non pas de chercher ce dernier.

En ce qui concerne le théorème 6 remarquons que A. Markoff a donné [15]) les conditions nécessaires et suffisantes, pour que le polynôme algébrique, dont les coefficients vérifient une relation linéaire — en particulier le polynôme admettant une valeur donnée en un point donné — approxime le mieux zéro dans l'intervalle $[a,b]$.

Cependant ces conditions ne conviennent pas pour la recherche effective d'un tel polynôme, en outre leur portée est très restreinte puisqu'elles ne se limitent qu'aux polynômes algébriques et à l'approximation de zéro. C'est pourquoi les théorèmes contenus dans ce travail sont pratiquement à mon avis meilleurs.

Travaux cités

[1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации,* Москва-Ленинград 1947.

[2] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной,* ч. I, Москва-Ленинград 1937.

[3] S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, Paris 1926.

[4] E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Paris 1905.

[15]) Voir A. A. Markoff [5], p. 282 et 285.

[5] А. А. Марков, *Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля,* Москва-Ленинград 1948.

[6] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций,* Москва-Ленинград 1949.

[7] C. de la Vallée Poussin, *Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle*, Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique 12 (1910).