Les transformations unifoliées

par

K. Tatarkiewicz (Lublin)

En 1945 M. T. Ważewski a posé le problème de caractériser les transformations différentiables qui conservent l'univalence des intégrales d'une équation différentielle.

L'image géométrique d'une fonction univalente est un ensemble dont deux points différents ont des projections différentes sur „l'axe" X de la variable indépendante. On appelle *ensemble à projection simple* tout ensemble qui est l'image d'une fonction univalente définie sur X. (C'est une définition équivalente à la Définition 1).

Une transformation biunivoque qui transforme les ensembles à projection simple sur X en ensembles à projection simple sur X^* sera dite *transformation unifoliée*. Elle transforme donc une fonction définie dans un sous-ensemble A de X en une autre fonction définie dans un sous-ensemble B de X^*. A l'aide de cette notion on peut généraliser le problème de M. Ważewski, en posant la question: *quelle est la forme analytique des transformations unifoliées?*

Le Théorème 1 nous donne une condition très simple (*condition* $\boldsymbol{W}$) suffisante pour qu'une transformation soit unifoliée. On peut demander si cette condition est nécessaire. Le Théorème 2 donne la solution de ce dernier problème pour une classe d'ensembles de structure spéciale. Les exemples 1^0, 2^0, 4^0, 5^0 et 7^0 montrent que dans le cas général on ne peut supprimer aucune des hypothèses qui caractérisent cette structure.

Le Théorème 3 et le Théorème 4 élargissent cette classe d'ensembles, mais ils ne le font que pour la projection simple sur la droite. Les exemples 8^0 et 9^0 montrent que ces deux théorèmes sont en défaut pour les ensembles à projection simple sur un hyperplan à $n \geqslant 2$ dimensions.

Le Théorème 5 fournit un criterium pour ces ensembles. Les exemples 10^0 et 11^0 sont des applications de ce criterium.

Du Théorème 1 on voit que, pour les classes d'ensembles qui vérifient les suppositions des Théorèmes 2-5, la *condition* $\boldsymbol{W}$ est nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit unifoliée.

Le Théorème 6 montre qu'on peut joindre deux points à projections différentes par un arc formant un ensemble à projection simple, ce qui — avec le Théorème 1 et le Théorème 2 — permet de résoudre le problème de M. Ważewski, même dans des hypothèses plus faibles (Théorème 7).

L'exemple 3^0 montre qu'on rencontre des difficultés sérieuses si l'on veut sortir au-delà des espaces euclidiens. Je me bornerai donc à eux.

Je remercie M. J. Szarski d'avoir bien voulu m'aider dans la rédaction définitive de ce travail.

1. Soient deux espaces euclidiens X, Y à n et m dimensions respectivement. Soit $M \subset X \times Y$ (où $X \times Y$ désigne le produit cartésien de X et de Y). Nous désignerons dans la suite par x les éléments de X et par y les éléments de Y.

Désignons par $S[M,x_0]$ l'intersection de l'hyperplan (dans les cas particuliers d'une droite ou d'un plan) $x=x_0$ et de l'ensemble M.

Définition 1. *Un ensemble A est dit ensemble à projection simple sur X si, pour tout $x \in X$, l'ensemble $S[A,x]$ contient un point au plus.*

Définition 2. *Un ensemble M est dit connexe sur X si, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $S[M,x]$ est connexe (ou vide).*

Envisageons la transformation Φ définie dans l'ensemble M par les équations

$$(1) \qquad x^* = g(x,y), \qquad y^* = h(x,y).$$

Désignons par U^* l'image de l'ensemble U, c'est-à-dire l'ensemble $U^* \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(U)$. Introduisons la définition suivante:

Définition 3. *Une transformation biunivoque Φ, qui transforme chaque ensemble $A \subset M$ à projection simple sur X en un ensemble $A^* \subset M^*$ à projection simple sur X^*, sera dite transformation unifoliée dans M.*

Appelons *condition* $\boldsymbol{W}$ la condition suivante: *$g(x,y)$ ne dépend pas de y, c'est-à-dire que*

$$(2) \qquad g(x,y) \equiv s(x)$$

et $x^* = s(x)$ est une transformation biunivoque.

On a alors

Théorème 1. *Pour que la transformation Φ soit une transformation unifoliée, il suffit que la condition $\boldsymbol{W}$ soit vérifiée.*

Démonstration. Admettons la *condition* $\boldsymbol{W}$. Soit A un ensemble à projection simple. Si

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$$

et $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ on aura $x_1 \neq x_2$. $s(x)$ étant biunivoque, l'on a que $x_1^* \neq x_2^*$ — les points à projections différentes sont transformés en points ayant la même propriété. Donc A^* est à projection simple sur X^* et la transformation de A en A^* est biunivoque. La transformation Φ est une transformation unifoliée, c. q. f. d.

THÉORÈME 2. *M étant un ensemble ouvert et connexe sur X et g étant une fonction continue, pour que la transformation Φ soit une transformation unifoliée il faut que la condition* **W** *soit verifiée.*

Démonstration. Admettons que Φ soit une transformation unifoliée. Nous allons montrer qu'il existe alors pour chaque x_0 un x_0^* tel que, pour chaque $(x_0,y)\in S[M,x_0]$,

(3) $$g(x_0,y)=x_0^*.$$

Prenons un point $(x_0,y_0)\in S[M,x_0]$ et soit $x_0^*=g(x_0,y_0)$. Désignons par $K[x_0^*]$ l'ensemble

$$K[x_0^*]=\underset{(x,y)\in S[M,x_0]}{E}[g(x,y)=x_0^*].$$

On a $K[x_0^*]\subset S[M,x_0]$.
Nous allons démontrer que

(4) $$K[x_0^*]=S[M,x_0]$$

ce qui est équivalent à la formule (3).
Soit

$$U[x_0]=S[M,x_0]-K[x_0^*]$$

et supposons que $U[x_0]\neq 0$. Or $K[x_0^*]\subset S[M,x_0]$, donc

$$S[M,x_0]=K[x_0^*]+U[x_0].$$

M étant, par hypothèse, connexe sur X, $S[M,x_0]$ est connexe. Puisque $K[x_0^*]\neq 0$, $U[x_0]\neq 0$ et $K[x_0^*]\cdot U[x_0]=0$, on doit avoir $U[x_0]\cdot K[x_0^*]'\neq 0$ ou bien $U[x_0]'\cdot K[x_0^*]\neq 0$.

1. Si $U[x_0]\cdot K[x_0^*]'\neq 0$, il existe une suite $(x_0,y_n)\in K[x_0^*]$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}(x_0,y_n)=(x_0,\bar{y}_0)\in K[x_0^*]\subset S[M,x_0].$$

Nous avons supposé que g soit continue, donc $g(x_0,y_n)\to g(x_0,\bar{y}_0)$. Or $(x_0,y_n)\in K[x_0^*]$, donc $g(x_0,y_n)=x_0^*$. Il s'ensuit que $g(x_0,\bar{y}_0)=x_0^*$ et, par conséquent, $(x_0,\bar{y}_0)\in K[x_0^*]$. Il y a contradiction avec $U[x_0]\cdot K[x_0^*]=0$.

2. Si $U[x_0]'\cdot K[x_0^*]\neq 0$, il existe un point $(x_0,\hat{y}_0)$ qui appartient à ce produit. Désignons par V l'intersection de l'ensemble M et de l'hyperplan $y=\hat{y}_0$. M étant, par hypothèse, ouvert, l'ensemble V est ouvert dans l'hyperplan $y=\hat{y}_0$ (qui est un ensemble à projection simple sur X) et contient le point $(x_0,\hat{y}_0)$. Φ étant une transformation unifoliée, la transformation $x^*=g(x,\hat{y}_0)$ est biunivoque et continue puisque g est continue par hypothèse. La transformation g étant continue et biunivoque, $g(V)$ est un ensemble ouvert dans X qui contient le point x_0^* puisque $(x_0,\hat{y}_0)\in V\cdot K[x_0^*]$.

Comme $(x_0,\hat{y}_0)\in U[x_0]'$, il existe une suite $(x_0,y_n)\to(x_0,\hat{y}_0)$ où $(x_0,y_n)\neq(x_0,\hat{y}_0)$ et $(x_0,y_n)\in U[x_0]$, donc $g(x_0,y_n)\neq x_0^*$. Or g est continue, donc

$$x_n^*=g(x_0,y_n)\to g(x_0,\hat{y}_0)=x_0^*$$

et

$$x_n^*\neq x_0^*.$$

Cela veut dire que dans chaque voisinage de x_0^* — donc aussi dans $g(V)$ — sont contenus presque tous les éléments x_n^*. Par conséquent, il existe un point $(x_n',\hat{y}_0)\in V$ tel que $x_n^*=g(x_n',\hat{y}_0)$. On a en outre $x_n'\neq x_0$ puisque $g(x_0,\hat{y}_0)=x_0^*$ et $x_0^*\neq x_n^*$. L'ensemble $A=\{(x_n',\hat{y}_0),(x_0,y_n)\}$ est donc à projection simple sur X et se transforme par Φ en A^* contenu dans l'hyperplan $x^*=x_n^*$. On arrive à une contradiction avec l'hypothèse que Φ soit une transformation unifoliée.

L'hypothèse que $U[x_0]\neq 0$ conduit ainsi à une contradiction. On a donc $U[x_0]=0$, c'est-à-dire la formule (4), ou — ce qui revient au même — la formule (3). Par conséquent, pour chaque point $(x_0,y)\in S[M,x_0]$, on a $x_0^*=g(x_0,y)$, c'est-à-dire que $g(x,y)$ ne dépend pas de y — on peut donc poser $x^*=s(x)$.

Nous avons supposé que Φ soit une transformation unifoliée. Il s'ensuit que, si $x_1\neq x_2$, on a $x_1^*\neq x_2^*$, donc $x^*=s(x)$ est une transformation biunivoque, ce qui achève la démonstration.

2. Les exemples suivants montrent que dans le cas le plus général toutes les hypothèses du Théorème 2 sont indispensables.

1° *La continuité de g.* Soit M l'intérieur d'un carré. Prenons la transformation

(5) $$x^*=k(x,y),\qquad y^*=h(x,y),$$

où h est une fonction quelconque de deux variables, et $k(x,y)$ est la fonction de Cantor qui transforme biunivoquement le carré en un segment.

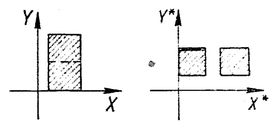

Fig. 1

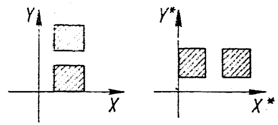

Fig. 2

Bien que (5) n'ait pas la forme (2), elle est une transformation unifoliée. Cette fonction k est partout discontinue. Mais il suffit que g ait seulement une ligne de discontinuité pour que la *condition* **W** cesse d'être nécessaire (voir fig. 1), où l'arête mince désigne qu'elle n'appartient pas à l'ensemble, l'arête grasse qu'elle lui appartient).

2° *La biunivocité de la transformation* des ensembles A à projection simple sur X en ensembles A^* à projection simple sur X^*. Soit

$$x^* = y, \qquad y^* = y$$

une transformation du carré $(0,1)\times(0,1)$. (C'est une projection du carré, parallèle à l'axe Ox, sur sa diagonale). Elle transforme chaque ensemble à projection simple sur l'axe Ox univoquement (mais non biunivoquement) en ensemble à projection simple sur Ox^*, quoiqu'elle n'ait pas la forme (2).

La transformation Φ peut ne pas être biunivoque. La transformation du carré

$$x^* = x, \qquad y^* = x$$

qui vérifie le Théorème 2 en est un exemple.

3° La théorie ne peut pas être élargie au-delà des espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions $\boldsymbol{R}_n$. Pour l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ le Théorème 2 est en défaut. Soit

$$x = (x^1, x^2, \ldots) \in X = \mathfrak{H}, \qquad y = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in Y = \boldsymbol{R}_n.$$

Alors la transformation continue et biunivoque

$$x^* = g(x,y) = (y^1, y^2, \ldots, y^n, x^1, x^2, \ldots),$$
$$y^* = h(x,y),$$

où h est une fonction continue quelconque, transforme chaque ensemble $A \subset M$ à projection simple sur X en ensemble A^* à projection simple sur X^*, quoique g dépende d'une manière essentielle de y et de x.

Les contre-exemples qui montrent que la connexité de M sur X ne peut pas être omise (voir l'exemple 4° et la fig. 3) ainsi que ceux qui montrent que M doit être ouvert (voir les exemples 7° et 8°) seront donnés ultérieurement. Pourtant, comme on le verra, en vertu du Théorème 4, *la condition* $\boldsymbol{W}$ reste nécessaire pour certains ensembles fermés.

3. Si l'on ne considère que les ensembles à projection simple sur une droite, on peut omettre dans l'énoncé du Théorème 2 l'hypothèse que M soit connexe sur elle.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

LEMME. *Soient M_1 et M_2 deux domaines (c'est-à-dire ensembles ouverts et connexes) tels que $U = M_1 \cdot M_2 \neq 0$ et soit X l'axe Ox. Supposons que la condition $\boldsymbol{W}$ soit nécessaire pour qu'une transformation Φ avec g continue soit une transformation unifoliée dans M_i $(i=1,2)$.*

Alors la même condition $\boldsymbol{W}$ est nécessaire pour qu'une transformation Φ avec g continue soit une transformation unifoliée dans $M_1 + M_2$.

Démonstration. Soit Φ une transformation unifoliée dans M_1+M_2 avec g continue. D'après les hypothèses on a donc

$$g(x,y) \overset{\mathrm{df}}{=} s_i(x) \quad \text{dans} \quad M_i, \qquad i=1,2.$$

Désignons par d_i la projection du domaine M_i sur X et posons $d = d_1 \cdot d_2$. Pour démontrer notre lemme il suffit de prouver que

(6) $$s_1(x) = s_2(x) \quad \text{pour} \quad x \in d.$$

Or d_i est un intervalle ouvert étant la projection sur X d'un domaine. La fonction $x^* = s_i(x)$ est donc monotone dans d_i puisque elle est continue dans d_i et établit une relation biunivoque. Soit d_0 la projection de U sur X. Il est $0 \neq d_0 \subset d$. On a évidemment

(7) $$s_1(x) = s_2(x) \quad \text{pour} \quad x \in d_0.$$

Il en résulte que $s_1(x)$ et $s_2(x)$ sont toutes les deux des fonctions croissantes ou bien décroissantes à la fois. Pour fixer les idées admettons qu'elles soient croissantes.

Supposons que (6) ne soit pas vrai. Il existe donc un $x_1 \in d$ tel que $s_1(x_1) \neq s_2(x_1)$. Pour fixer les idées, supposons que $s_1(x_1) > s_2(x_1)$ et prenons un $x_0 \in d_0$. D'après (7), on a $x_1 \notin d_0$, donc $x_1 \neq x_0$. Soit par exemple $x_1 > x_0$. On a alors

$$s_1(x_1) > s_2(x_1) > s_2(x_0) = s_1(x_0);$$

il en résulte, étant donné que $s_1(x)$ est continue dans $\langle x_0, x_1 \rangle$, qu'il existe un $x_2 \in (x_0, x_1)$ tel que

(8) $$s_1(x_2) = s_2(x_1).$$

Comme $x_2 \neq x_1$, la relation (8) est en contradiction avec l'hypothèse que la transformation Φ soit une transformation unifoliée dans $M_1 + M_2$. La relation (6) est donc vérifiée, ce qui achève la démonstration de notre lemme.

THÉORÈME 3. *M étant un domaine, g étant continue dans M et X étant l'axe Ox, pour que la transformation* (1) *soit une transformation unifoliée dans M il faut que la condition $\boldsymbol{W}$ soit vérifiée.*

Démonstration. Soit Φ une transformation unifoliée dans M avec g continue. On doit démontrer que $g(x,y)$ ne dépend pas de y dans M, c'est-à-dire que, pour deux points $(x_0, y_1) \neq (x_0, y_2)$ appartenant à M, on a

(9) $$g(x_0, y_1) = g(x_0, y_2).$$

M étant un domaine, les points (x_0, y_1) et (x_0, y_2) peuvent être joints par une ligne polygonale $L \subset M$ formée d'un nombre fini de segments $L_1, \ldots, L_k$. Chaque segment L_i est évidemment contenu dans un domaine

$M_i \subset M$ qui est connexe sur X. En vertu du Théorème 2 la fonction $g(x,y)$ est de la forme (2) dans chaque M_i. Comme $L_1 \cdot L_2 \neq 0$, on a $M_1 \cdot M_2 \neq 0$. D'après notre Lemme, la fonction $g(x,y)$ est donc de la forme (2) dans M_1+M_2. On a ensuite $(M_1+M_2)\cdot M_3 \neq 0$, d'où, en vertu du Lemme, il suit que $g(x,y)$ est de la forme (2) dans $M_1+M_2+M_3$. En répétant ce raisonnement $k-1$ fois on voit que la fonction $g(x,y)$ ne dépend pas de y dans $M_1+M_2+\ldots+M_k$. La relation (9) est donc vérifiée, c. q. f. d.

4° La fig. 2 nous montre que sans l'hypothèse de la connexité de M le Théorème 3 serait faux.

5° Ce théorème peut être faux lorsque la dimension de X dépasse 1. On le voit aisément sur la fig. 3.

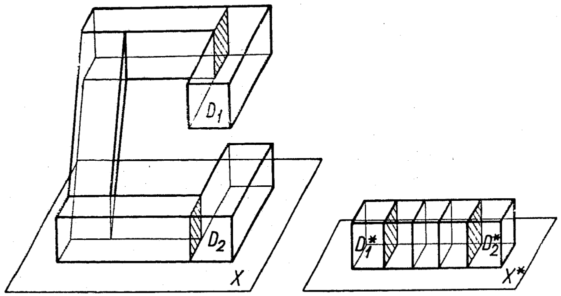

Fig. 3

Quoique D_1 soit situé au dessus de D_2 les projections de D_1^* et de D_2^* sont différentes — donc $g(x,y)$ dépend d'une manière essentielle de y.

4. Théorème 4. *Soit $\overline{M}$ la fermeture d'un domaine M et X l'axe Ox. Supposons que g soit continue sur $\overline{M}$. Pour que la transformation* (1) *soit unifoliée sur $\overline{M}$ il faut que la condition* $\boldsymbol{W}$ *soit verifiée dans $\overline{M}$.*

Démonstration. Supposons que $\overline{M}$ soit une fermeture du domaine M. Soit Φ une transformation unifoliée dans $\overline{M}$. Φ est alors à plus forte raison unifoliée dans M. Il en résulte d'après le Théorème 3 que g est de la forme (2) dans M, et que la transformation $x^*=s(x)$ est biunivoque dans la projection de M sur l'axe Ox. Or, M étant un domaine, cette projection est un intervalle d.

On sait déjà que g ne dépend pas de y dans M. Pour achever notre démonstration il suffit de montrer qu'il en est de même dans M' (puisque $M'=\overline{M}$ pour tout M ouvert). Soit donc $(x_0,y_0)\in M'$. Il existe alors une suite de points $(x_n,y_n)\in M$ telle que $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. On a donc

$$g(x_n,y_n)=s(x_n), \qquad x_n \in d, \qquad x_n \to x_0 \in \overline{d},$$

et, g étant continue dans $\overline{M}$,

$$g(x_0,y)=\lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} s(x_n).$$

Or $s(x)$ est continue et monotone dans d, la limite de la suite $s(x_n)$ ne dépend donc que de x_0 et, par conséquent, $g(x_0,y_0)$ ne dépend pas de y_0. La fonction $g(x,y)$ est donc de la forme (2) dans $M'=\overline{M}$. La transformation $x^*=s(x)$ est en outre biunivoque dans $\overline{M}$ puisque dans le cas contraire la transformation Φ ne serait pas unifoliée dans $\overline{M}$, c. q. f. d.

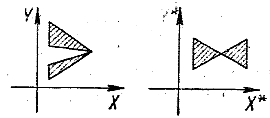

Fig. 4

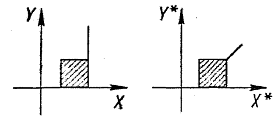

Fig. 5

Ce théorème resterait vrai si M était un ensemble contenu entre un domaine et sa fermeture. Mais les exemples qui suivent montrent que pour d'autres ensembles M ce théorème peut être en défaut.

6° Un exemple analogue à celui de la fig. 2 nous montre qu'on ne peut pas omettre des hypothèses du Théorème 4 la connexité de l'ensemble M. La connexité de l'ensemble $\overline{M}$ ne suffit pas — voir la fig. 4.

7° On voit sur la fig. 5 que si l'on prend un ensemble M fermé, connexe et connexe sur l'axe Ox, la *condition* $\boldsymbol{W}$ peut ne pas être remplie. (Plus spécialement la condition (2)).

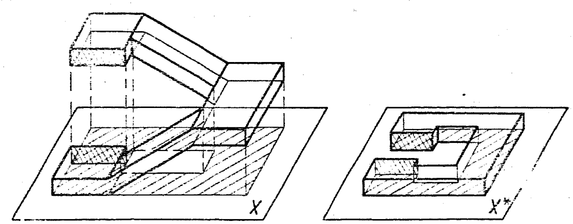

Fig. 6

On peut démontrer pour les ensembles M connexes et connexes sur Ox que, si $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont les extrémités de la projection de M sur Ox et les ensembles $S[M,\underline{x}]$ et $S[M,\overline{x}]$ sont contenus dans les ensembles dérivés de $M-S[M,\underline{x}]$ et de $M-S[M,\overline{x}]$ respectivement, la *condition* $\boldsymbol{W}$ est nécessaire pour qu'une transformation soit une transformation unifoliée.

8⁰ On peut demander si le Théorème 4 peut être généralisé aux fermetures des ensembles M connexes et connexes sur des hyperplans à n dimensions ($n>1$). L'ensemble représenté sur la fig. 6 nous montre que ceci n'est pas possible.

Pour l'intérieur de cet ensemble la *condition* $\boldsymbol{W}$ est nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit une transformation unifoliée, tandis qu'elle n'est pas nécessaire pour sa fermeture. Cela est dû au fait que la limite de $s(x)$ dépend du chemin pour lequel on la calcule.

5. Un théorème analogue au Théorème 3 et valable pour la projection simple sur des ensembles à n dimensions ($n>1$) serait beaucoup plus compliqué. Dans le Théorème 5 nous ne donnerons donc qu'*un criterium* qui permettra l'étude de la question si, pour un ensemble donné, la *condition* $\boldsymbol{W}$ est nécessaire (et suffisante). Pour la démonstration du Théorème 4 nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME. *Si $B\subset \boldsymbol{R}_n$ est un domaine et ψ_1 et ψ_2 sont deux transformations continues et biunivoques telles que*

$$\psi_1(B)+\psi_2(B)\subset \boldsymbol{R}_n,$$

$$\psi_1(B)\psi_2(B)\overset{\mathrm{df}}{=}U\neq 0,$$

et, si à deux points différents $p_1\neq p_2$ correspondent deux points différents

$$\psi_1(p_1)\neq\psi_2(p_2), \tag{10}$$

alors $\psi_1(p)=\psi_2(p)$ pour tous les $p\in B$.

Démonstration. L'ensemble U étant l'intersection d'ensembles ouverts, est ouvert. Évidemment il est aussi ouvert dans $\psi_i(B)$. On a

$$\psi_1^{-1}(q)=\psi_2^{-1}(q)$$

pour $q\in U$. En effet, si l'on suppose qu'il existe un $q\in U$ tel que $\psi_1^{-1}(q)\neq\psi_2^{-1}(q)$, alors (10) donne

$$q=\psi_1[\psi_1^{-1}(q)]\neq\psi_2[\psi_1^{-1}(q)]=q,$$

ce qui est absurde.

À plus forte raison, on a

$$\psi_1^{-1}(U)=\psi_2^{-1}(U)\overset{\mathrm{df}}{=}V.$$

(10) implique même plus

$$\psi_1(p)=\psi_2(p)\qquad\text{pour}\quad p\in V. \tag{11}$$

Supposons que $\psi_1(p)\neq\psi_2(p)$ pour un $p\in V$. Alors $\psi_1(p)\in U$, donc il existe un $p\neq p'\in V$ qui vérifie l'équation $\psi_1(p)=\psi_2(p')$ — ce qui est en contradiction avec (10).

Je vais montrer que $B=V$. Soit une suite de points $q_k\in U$ et soit $\lim\limits_{k\to\infty}q_k=q_0\in\psi_1(B)$. Il existe alors une suite de points $r_k\in V$ tels que $\psi_1(r_k)=\psi_2(r_k)=q_k$ et un point $r_0\in B$ tel que $q_0=\psi_1(r_0)$. Comme $\psi_1(r_k)\to q_0=\psi_1(r_0)$ et la transformation inverse ψ_1^{-1} est continue dans $\psi_1(B)$, on a $r_k\to r_0$. Il en résulte que $\psi_2(r_n)\to\psi_2(r_0)$, et, par conséquent, $\psi_1(r_0)=\psi_2(r_0)$ $\big($puisque $\psi_1(r_n)=\psi_2(r_2)\big)$. Ceci veut dire que $q_0=\psi_1(r_0)\in U$.

Il s'ensuit que U est fermé dans $\psi_1(B)$. Si U est à la fois fermé et ouvert dans l'ensemble connexe $\psi_1(B)$, alors $U=\psi_1(B)$ et cela signifie que $B=V$.

Mais alors (11) entraîne

$$\psi_1(p)=\psi_2(p)\qquad\text{pour}\quad p\in B,\qquad\qquad \text{c. q. f. d.}$$

THÉORÈME 5. *Si*

1. *D_1, D_2 et D_3 sont trois ensembles deux à deux disjoints.*
2. *D_1 et D_2 sont des domaines.*
3. *$D_1+D_2+D_3=M$ est un domaine.*
4. *Projection de D_1 sur $X=$projection de D_2 sur $X\overset{\mathrm{df}}{=}B$.*
5. *L'intersection de B et de la projection de D_3 sur X est vide.*
6. *Chaque transformation Φ unifoliée dans M et de la forme* (1), *où g est continue, transforme D_1 et D_2 en ensembles qui ont l'intersection de leurs projections sur X^* non vide.*
7. *Dans chaque ensemble D_i ($i=1,2,3$) pris séparément la condition $\boldsymbol{W}$ est nécessaire pour qu'une transformation soit dans ce même D_i une transformation unifoliée.*

Alors, pour qu'une transformation avec g continue soit unifoliée dans M, il faut que la condition $\boldsymbol{W}$ soit vérifiée.

Démonstration. Supposons que Φ soit une transformation unifoliée dans M. D'après 7, g est de la forme (2) dans D_1 et dans D_2. Posons $g(x,y)=\psi_1(x)$ dans D_1 et $g(x,y)=\psi_2(x)$ dans D_2. Les transformations $x^*=\psi_i(x)$ sont continues et biunivoques dans B qui est un domaine. En vertu de 6, on a

$$\psi_1(B)\psi_2(B)\neq 0.$$

Pour $p_1\neq p_2$, il est $\psi_1(p_1)\neq\psi_2(p_2)$, car la transformation Φ est unifoliée dans M. En appliquant notre lemme, on a donc $\psi_1(p)=\psi_2(p)$ pour $p\in B$, et cela veut dire que g ne dépend pas de y dans D_1+D_2. D'après 7 g ne dépend pas de y dans D_3. Il résulte de 5, que g ne dépend pas de y dans $D_1+D_2+D_3=M$. La fonction $g(x,y)$ est donc de la forme (2) dans M. Il est évident que la transformation $x^*=s(x)$ est biunivoque et la *condition* $\boldsymbol{W}$ est vérifiée, c. q. f. d.

Dans les applications le plus difficile est de montrer qu'une transformation donnée vérifie 6 et 7. Si les ensembles D_1 et D_2 sont connexes sur X, pour démontrer 7 ont peut se servir du Théorème 2. Les conditions 1 et 3 nous montrent que D_3 n'est pas ouvert, on ne peut donc pas employer ici le Théorème 2.

6. Nous donnons ci-dessous des exemples de l'application du criterium du Théorème 5 pour le cas, où X est un ensemble plan (un ensemble de deux dimensions).

9° L'ensemble de la fig. 3 ne vérifie pas 6. Il existe des transformations unifoliées (elles peuvent être même continues et biunivoques — voir la fig. 3) qui transforment D_1 et D_2 en ensembles à projections disjointes. C'est conforme à la remarque antérieure que pour cet ensemble la *condition* $\boldsymbol{W}$ n'est pas nécessaire pour qu'une transformation soit unifoliée.

10° L'ensemble de la fig. 7 vérifie toutes les conditions 1-7. Par notre choix de D_1, D_2 et de D_3 les conditions 1-5 sont vérifiées. La condition 7 est vérifiée par D_1 et D_2 en vertu du Théorème 2. Il suit du même théorème qu'elle est vérifiée à l'intérieur de D_3. Par un raisonnement analogue à la démonstration du Théorème 4 nous démontrerons que les limites de g ne dépendent pas du choix de la route sur le plan X, donc la condition 7 est vérifiée dans D_3.

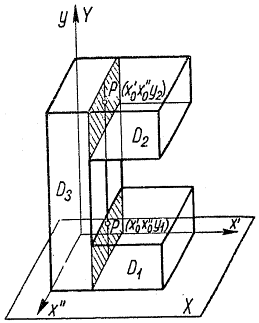

Fig. 7

Nous allons montrer que les ensembles D_1 et D_2 vérifient la condition 6. Soit $(x_0, y_0) \epsilon D_3 \cdot D_1'$. Soit Q la droite qui a comme équation $x = x_0$ $\left(\text{ou en coordonnées } x' = x_0',\ x'' = x_0'' \text{ si on pose } x_0 = (x_0', x_0'')\right)$. Prenons deux points $P(x_0, y_1)$ et $P(x_0, y_2)$ appartenant aux différentes parties séparées de l'ensemble $Q \cdot D_3$ et prenons leurs voisinages $U_1[x_0, y_1]$ et $U_2[x_0, y_2]$ ayant une projection commune U sur X et contenus dans M. Soit $g_i(x, y)$ la fonction appartenant à D_i en vertu de la condition 7 (qui est vérifiée — voir ci-dessus), donc ayant la forme (2). Posons

$$s_i(x) = \begin{cases} g_i(x, y), & (x, y) \epsilon D_i, \\ g_3(x, y), & (x, y) \epsilon D_3, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Etant donné que $g_3(x_0, y_1) = g_3(x_0, y_2) = s_i(x_0)$ et que g est continue dans l'ensemble $M = D_1 + D_2 + D_3$, on voit que $s_1(U_1)$ et $s_2(U_2)$ sont des voisinages de $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ dans X^*.

Or on a

(12) $$s_1(D_3 U_1) \neq s_1(U_1) s_2(U_2),$$

puisque $s_1(U_1) s_2(U_2)$ est un voisinage de $s_1(x_0)$ et $s_1(D_3 U_1)$ ne l'est pas. D'autre part

$$s_1(D_3 U_1) = s_2(D_3 U_2),$$

donc

(13) $$s_1(D_3 U_1) \subset s_1(U_1) s_2(U_2).$$

Il résulte de (12) et de (13) qu'il existe un point r tel que $r \epsilon s_1(U_1) s_2(U_2)$ et $r \bar{\epsilon} s_1(D_3 U_1)$, donc

(14) $$r \epsilon s_1(D_1 U_1).$$

Puisque $r \epsilon s_2(U_2)$ et $r \bar{\epsilon} s_1(D_3 U_1) = s_2(D_3 U_2)$, donc

(15) $$r \epsilon s_2(D_2 U_2).$$

(14) et (15) impliquent

$$s_1(D_1 U_1) s_2(D_2 U_2) \neq 0,$$

ce qui est une autre forme de la condition 6. La condition 6 est donc vérifiée par les ensembles D_1 et D_2.

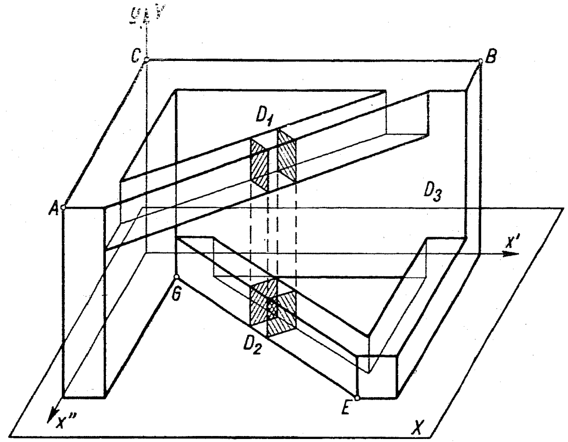

Fig. 8

On voit, en s'appuyant sur le Théorème 5 et le Théorème 1, que pour notre ensemble la *condition* $\boldsymbol{W}$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation Φ soit une transformation unifoliée.

11° Pour l'ensemble représenté sur la fig. 8 les hypothèses du Théorème 5 sont aussi vérifiées. La démonstration que les conditions 1-5 et 7 sont vérifiées, est analogue à la démonstration employée dans l'exemple précédent. Seulement la démonstration que la condition 6 est vérifiée diffère de celle-ci.

Le plan X est divisé dans notre exemple par la projection du triangle ABC en deux parties disjointes. G appartient à l'une de ces parties, E à l'autre. Après une homéomorphie quelconque de la projection de M, le continu G^*E^* doit avoir une partie commune avec le triangle $A^*B^*C^*$. La projection simple devant être conservée, cette partie commune est égale à $\Phi(D_1)=\Phi(D_2)$. Donc $\Phi(D_1)\Phi(D_2)\neq 0$ et la condition 6 est vérifiée.

Le Théorème 5 s'applique donc à notre ensemble.

7. Si l'on veut appliquer cette théorie (par exemple dans la théorie des équations différentielles), il y a un intérêt particulier à considérer les transformations qui *conservent la projection simple* (le plus souvent sur une droite) non pas de tous les ensembles, mais seulement *des arcs simples*.

Il est évident que la *condition* $\boldsymbol{W}$ suffit pour qu'une transformation qui change les arcs à projection simple sur X en arcs à projection simple sur X soit unifoliée dans M.

Le lemme ci-dessous est non moins évident:

Lemme. *Supposons que dans un ensemble M tout couple de points à projection simple sur X peut être joint par un arc à projection simple. Alors une transformation qui transforme les arcs à projection simple biunivoquement en arcs à projection simple est unifoliée dans M.*

Il résulte de ce lemme que si M vérifie l'hypothèse du lemme et les hypothèses du Théorème 2 (ou du Théorème 3 ou du Théorème 4 ou enfin du Théorème 5), les transformations qui conservent la projection simple des arcs vérifient la *condition* $\boldsymbol{W}$.

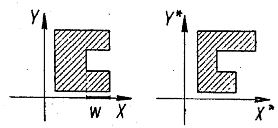

Fig. 9

Pour des ensembles dans lesquels la construction exigée par le lemme n'est pas toujours possible, la *condition* $\boldsymbol{W}$ peut ne pas être nécessaire (quoiqu'elle soit toujours suffisante). L'exemple 12° le montre.

12° La transformation de l'ensemble M, montrée sur la fig. 9, transforme tous les arcs à projection simple sur Ox en arcs à projection simple sur Ox^*, quoique g dépende d'une manière essentielle de y.

Théorème 6. *Si M est un domaine connexe sur X, chaque couple d'éléments $\subset M$ qui forment un ensemble à projection simple peut être joint par un arc $\subset M$ ayant la projection simple sur X.*

Démonstration. Soit $a,b \in M$ et $\{a,b\}$ soit un ensemble à projection simple sur X. On sait qu'on peut joindre alors a et b par une ligne polygonale $H\subset M$ formée d'un nombre fini de segments. Prenons

$L_1=$projection de H sur X. Elle est aussi une réunion d'un nombre fini de segments. Si L_1 a des points de bifurcation, on la réduit à une courbe L_2 non réductible (entre a et b) et on rejette de H les segments ayant des projections $\subset L_1-L_2$ ou ayant une projection qui se réduit à un point. Si quelques segments possèdent la même projection, on n'en retient qu'un seul d'entre eux. Enfin prenons la fermeture de ce qu'il nous reste de H. On a construit un ensemble G (qui n'est pas connexe en général) et qui, à l'exception d'un nombre fini de couples de points $q_1^0, q_1^2, \ldots, q_k^0, q_k^2$, est à projection simple sur X.

Pour fixer les idées considérons le couple q_1^0, q_1^2. Il appartient à un ensemble connexe $S[M,c]$, donc il peut être joint dans cet ensemble par une ligne polygonale H_1''.

Soit ε_1 la distance de l'arc H_1'', qui est un ensemble fermé et borné, à l'ensemble fermé $\mathrm{Co}M$. L'intersection $H\mathrm{Co}M$ étant vide ($H\subset M$ — donc $H\mathrm{Co}M=0$), on a $\varepsilon_1>0$.

Soit ε_2 la plus petite des distances $\mathrm{dist}(p_i,p_k)$, où les p_i sont ou bien des sommets de la ligne polygonale L_2 ou bien des projections des couples q_1^0, q_1^2 formant des ensembles qui ne sont pas à projection simple. Soit $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2/2)$ et prenons l'ensemble

$$V_1=\sum_{p\in H''} K(p,\varepsilon)\subset M.$$

De la définition de ε suit que G et la frontière de V_1 ont deux points communs q_1' et q_1'' ayant des projections distinctes.

Prenons la paramétrisation de la ligne polygonale $\widehat{q_1'q_1^0}+H_1''+\widehat{q_1^2q_1''}$ dans laquelle le paramètre $\sigma\in\langle 0,1\rangle$ est proportionnel à la longueur de la ligne, en comptant de q_1'. Soient alors ses équations

$$x_i=\tau_i(\sigma),$$
$$y_i=\theta_i(\sigma)$$

et soient les coordonnées des points q_1' et q_1'' respectivement

$$q_1'=(x_1',\ldots,x_n',y_1',\ldots,y_m'),$$
$$q_1''=(x_1'',\ldots,x_n'',y_1'',\ldots,y_m'').$$

Soient

$$x_i=x_i'+\sigma\cdot(x_i''-x_i'),\qquad i=1,2,\ldots,n,$$
$$y_j=\theta_j(\sigma),\qquad j=1,2,\ldots,m, \tag{16}$$

les équations de l'arc H_1. On a $H_1\subset V_1$ et cet arc est à projection simple sur X. (Si à un certain ensemble de valeurs $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m$, (16) fait correspondre un $\bar{\sigma}$, ce $\bar{\sigma}$ est unique).

Pour les autres couples q_i^0, q_i^2, on construit des arcs H_i et des ensembles V_i d'une manière analogue. On voit que dans la projection de V_i est contenue uniquement la projection de H_i. Il résulte des considérations antérieures que la projection de H_i n'a pas de points communs avec les projections des arcs $\widehat{q'_{j+1}q''_j}$. Donc la réunion des arcs H_i et des arcs $\widehat{q'_{j+1}q''_j}$ forme un arc à projection simple sur X entre a et b, c. q. f. d.

Ce théorème ne résout pas le cas de M — *non-connexe sur* X (comparer l'exemple 12⁰).

Si la dimension de X est plus grande que 1, il peut arriver que dans un ensemble non-connexe sur X, tous les couples de points peuvent être joints par des arcs à projection simple (voir par exemple la fig. 7).

Si X est une droite, on peut résoudre le problème partiellement — pourvu que M soit un domaine. Soit W l'ensemble de tous les x tels que $S[M,x]$ soit non-connexe (voir la fig. 9). Si W ne contient pas un intervalle, on peut montrer que la construction de la démonstration du Théorème 6 peut être faite.

Du Théorème 1, du Théorème 2, du Théorème 6 et du lemme du début de ce paragraphe résulte le

THÉORÈME 7. *Si la transformation continue et biunivoque Φ est définie dans le domaine M connexe sur X et transforme tous les arcs $\subset M$ à projection simple sur X en des arcs à projection simple sur X^*, il faut et il suffit que la condition* $\boldsymbol{W}$ *soit vérifiée.*

Lorsqu'il s'agit de transformations dans des domaines quelconques, nous pouvons seulement affirmer que la *condition* $\boldsymbol{W}$ est suffisante et qu'il est nécessaire que, dans chaque sous-ensemble connexe et connexe sur X, la transformation g vérifie la *condition* $\boldsymbol{W}$.

Reçu par la Rédaction le 13. 9. 1953

On a problem of P. Turan concerning graphs

by

K. Zarankiewicz (Warszawa)

The purpose of this paper is the solution of a problem put forward by P. Turan. The problem is to define the smallest number of intersection points of the sides of a graph, defined in Theorem I. The problem was derived from the following question. In a brickworks the bricks are made in burning-ovens. When they are burnt out, they are carried away to storerooms by workers on small trucks rolling on rails. The trucks move easily and fast except when they pass a crossing of the rails. Here the trucks are usually derailed a great loss of time and bricks occurs and the traffic is hindered on all rails crossing that point. This loss will be reduced to minimum when the number of intersections of the rails is as small as possible and no three rails intersect each other at an inner point. Theorem I[1]) gives the solution of this problem. Theorem II gives the minimum number of regions into which the above graph cuts the plane.

THEOREM I. *If*

(α) *in the Euclidean plane two sets of points, A and B, are given, A consisting of p points $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$, and B consisting of q points $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q$, ($p$ and q are natural numbers);*

(β) *for each pair of points a_i, b_j, where $i=1,2,3,\ldots,p$, $j=1,2,3,\ldots,q$, there exists a simple arc lying in the plane and having the points a_i, b_j as its end points;*

(γ) *the arcs lie in such a way that no three arcs have an interior point (i. e. a point that is not an end point) in common;*

(δ) *$K(p,q)$ denotes the smallest number of intersection points of arcs; then the following formulas hold:*

$$K(2k,2n)=(k^2-k)(n^2-n), \tag{1}$$

$$K(2k,2n+1)=(k^2-k)n^2, \tag{2}$$

$$K(2k+1,2n+1)=k^2n^2. \tag{3}$$

[1]) This theorem was proved at the same time, quite independently, by K. Urbanik (Wrocław).