References

G. Gentzen [1], *Untersuchungen über das logische Schließen*, Math. Zeitschrift 39 (1934), p. 176-210, 405-431.

K. Gödel [1], *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, Erg. Koll. Wien, 4 (1933), p. 39-40.

D. Hilbert und P. Bernays [1], *Grundlagen der Mathematik*, Band II, Berlin 1939.

S. Jaśkowski [1], *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*, Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des mathématiques, Actualités scientifiques et industrielles 393 (1936), p. 58-61.

J. C. C. McKinsey [1], *A Solution of the Decision Problem for the Lewis Systems S_2 and S_4, with an Application to Topology*, The Journal of Symbolic Logic 6 (1941), p. 117-134.

J. C. C. Mc Kinsey and A. Tarski [2], *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, The Journal of Symbolic Logic 13 (1948), p. 1-15.

J. C. C. Mc Kinsey and Tarski [3], *On closed elements in closure algebras*, Annals of Math. 47 (1946), p. 122-162.

J. C. C. Mc Kinsey and Tarski [4], *The Algebra of Topology*, Annals of Math. 45 (1944), p. 141-191.

H. Rasiowa and R. Sikorski [AT], *Algebraic Treatment of the Notion of Satisfiability*, Fund. Math. 40 (1953), p. 62-95.

L. Rieger [1], *On the lattice theory of Brouwerian propositional logic*, Spisy vyd. prirod. fak. Univ. Karlovy 189 (1949), p. 1-40.

R. Sikorski [1], *Closure homomorphisms and interior mappings*, this volume, p. 12-20.

M. Wajsberg [1], *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, Wiadomości Matematyczne 46 (1938), p. 45-101.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1952

Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński

par

J. Popruženko (Łódź)

M. Sierpiński a démontré en 1928 le Théorème suivant:

(T) *Si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, il existe une suite convergente de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable* [1]).

Nous appelons *phénomène de convergence de Sierpiński* la singularité qui se présente dans la thèse du Théorème (T), à savoir la convergence non uniforme dans *tout ensemble indénombrable* d'un certain champ de convergence.

Si l'on abandonne l'hypothèse du continu, la question de l'existence des singularités de ce genre reste ouverte; la méthode de M. Sierpiński, essentiellement liée à l'hypothèse du continu, ne donne aucun renseignement sur ce sujet.

L'étude approfondie du Théorème (T) et des problèmes qui s'y rattachent m'a conduit à mettre en évidence une singularité connexe dont l'existence dans les espaces d'une certaine puissance indénombrable peut être démontrée sans prémisses hypothétiques.

Dans la Note présente, je m'occupe de cette démonstration, puis je donne certaines applications du résultat acquis à la théorie de la mesure abstraite.

1. Préliminaires

Étant données deux suites infinies d'entiers positifs $a=(a_1,a_2,\ldots)$ et $b=(b_1,b_2,\ldots)$, convenons d'écrire

(ρ_1) $a \leqslant b$ si $a_i \leqslant b_i$ pour $i=1,2,\ldots$;

(ρ_2) $a \prec b$ si l'on a $a_i \leqslant b_i$ à partir d'un certain indice $i=i_0$.

Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F}$ de suites infinies d'entiers positifs est *bornée*, resp. *finalement bornée*, lorsqu'il existe une suite fixe d'entiers positifs qui majore toutes les suites de $\mathcal{F}$ au sens de la relation (ρ_1), resp. (ρ_2).

[1]) W. Sierpiński [1] et [2], p. 52, Proposition C_9.

Les négations de ces propriétés (à savoir *non bornée*, *finalement non bornée*) sont évidentes.

On sait que toute famille dénombrable de suites d'entiers positifs est finalement bornée. On en conclut que la somme dénombrable de familles finalement bornées est encore finalement bornée.

Ceci posé, introduisons deux propositions auxiliaires sur les suites infinies de fonctions réelles.

LEMME I. *Soient $\mathcal{F}$ une famille (finie ou non) de suites $\nu=(n_1,n_2,\ldots)$ d'entiers positifs, E un ensemble de puissance $\geqslant\overline{\overline{\mathcal{F}}}$, $\Phi(x)=\nu$ une correspondance quelconque qui attribue à tout $x\in E$ un élément déterminé $\nu=(n_1^x,n_2^x,\ldots)$ de $\mathcal{F}$ de sorte que l'on ait $\Phi(E)=\mathcal{F}$.*

Dans ces conditions, il existe une suite convergente $\{f_m(x)\}$ de fonctions réelles, définies dans E, jouissant de cette propriété:

(*) *pour que la convergence soit uniforme dans un sous-ensemble E_1 de E, il faut et il suffit que la famille $\mathcal{F}_1=\Phi(E_1)$ soit bornée.*

LEMME II. *Soient E un ensemble quelconque, $f_k(x)\to f(x)$ une suite de fonctions réelles convergente dans E.*

On peut définir une famille $\mathcal{F}$ de suites non décroissantes d'entiers positifs $\nu=(k_1,k_2,\ldots)$ et une correspondance $\Phi(x)=\nu$ telle que $\Phi(E)=\mathcal{F}$, de sorte qu'elles satisfassent à la condition (*).

Démonstration du Lemme I. Définissons avec M. Sierpiński[2]) les fonctions $f_m(x)$ $(m=1,2,\ldots)$ comme il suit.

Soient $x\in E$, $\Phi(x)=\nu=(n_1^x,n_2^x,\ldots)$. Si l'entier positif m ne figure pas parmi les nombres n_i^x, posons

$$f_m(x)=0. \tag{1}$$

Dans le cas contraire, désignons par $p^x(m)$ le plus petit indice i pour lequel $n_i^x=m$ et posons

$$f_m(x)=\frac{1}{p^x(m)}. \tag{2}$$

La suite $\{f_m(x)\}$, définie dans E par (1) et (2), converge vers 0.

Nous allons démontrer qu'elle satisfait à la condition (*).

Soient E_1 un sous-ensemble de E et $\Phi(E_1)=\mathcal{F}_1$. Si la suite $\{f_m(x)\}$ converge uniformément dans E_1, la famille $\mathcal{F}_1$ est bornée au sens de la relation (ρ_1); ceci fut établi par M. Sierpiński [3]. Il ne reste donc qu'à démontrer que l'implication inverse est vraie.

Soit $\mathcal{F}_1$ une famille bornée, contenue dans $\mathcal{F}$. Posons

$$E_1=\mathop{E}_{x}\{\Phi(x)\in\mathcal{F}_1\}.$$

[2]) Quant à ces lemmes, cf. les raisonnements très voisins de W. Sierpiński [3].

Il existe donc par définition une suite fixe d'entiers positifs $\{k_i\}$ telle que la relation

$$n_i^x\leqslant k_i \quad (i=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

soit vraie pour tout $x\in E_1$, et l'on peut évidemment supposer que cette suite soit croissante. Désignons par $i=q(m)$ $(m=1,2,\ldots)$ le premier indice i tel que $k_i\geqslant m$. D'après $k_i<k_{i+1}$, on a

$$\lim_{m\to\infty} q(m)=\infty. \tag{4}$$

Soit x un point de E_1, m — un entier positif appartenant à $\{n_i^x\}$.

On a d'après (3): $m=n_{p^x(m)}^x\leqslant k_{p^x(m)}$, d'où il résulte $p^x(m)\geqslant q(m)$, donc $f_m(x)\leqslant 1/q(m)$. Le point x de E_1 étant quelconque, les formules (1), (2) et (4) démontrent que la suite $\{f_m(x)\}$ est uniformément convergente dans E_1[3]).

Le Lemme I est ainsi démontré.

Démonstration du Lemme II. Définissons pour tout $x\in E$ la suite $(k_1^x,k_2^x,\ldots)=\nu=\Phi(x)$ en posant

k_i^x = *le premier indice à partir duquel on a*

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i} \quad (i=1,2,\ldots).$$

En désignant par $\mathcal{F}$ la totalité des suites distinctes ainsi définies, on obtient une famille, et une correspondance, satisfaisant à toutes les conditions exigées.

Les détails de la démonstration sont faciles à reproduire.

2. Existence

Soient E un ensemble d'éléments x, $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions réelles convergente pour tout $x\in E$.

Nous dirons que la suite $\{f_n(x)\}$ converge *σ-uniformément* dans un sous-ensemble E_1 de E si E_1 peut être représenté dans la forme

$$E_1=\sum_{k=1}^{\infty} M_k, \tag{5}$$

où M_k sont des ensembles dans lesquels $\{f_n(x)\}$ converge uniformément.

Il est clair que la *σ-uniformité* (ainsi que sa négation) est invariante contre les transformations biunivoques.

[3]) Simplifié suivant une remarque de M. Marczewski.

Considérons la suivante

PROPOSITION (P).

1° *Il existe dans un ensemble E au moins une suite convergente de fonctions réelles $\{f_n(x)\}$ qui n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E_1 de E de puissance $\overline{\overline{E_1}}=\overline{\overline{E}}$.*

2° *Toute suite convergente $\{g_n(x)\}$ de fonctions réelles définies dans E est σ-uniformément convergente dans tout sous-ensemble E_1 de E de puissance $<\overline{\overline{E}}$.*

La condition double de cet énoncé détermine un certain phénomène de convergence, abstraction faite de son existence.

Si $\aleph_1=2^{\aleph_0}$, ce phénomène est réalisé dans tout ensemble indénombrable de nombres réels ou, si l'on veut, dans tout ensemble E de puissance du continu. En effet, on s'assure sans peine que, dans ce cas, la Proposition (P) coïncide avec le Théorème (T) de M. Sierpiński.

Notre but est de démontrer le suivant Théorème d'existence:

THÉORÈME I. *Il existe un et un seul nombre cardinal $\mathfrak{m}$ tel que la Proposition (P) soit réalisée dans tout ensemble E de puissance $\mathfrak{m}$.*

Ce nombre est un aleph régulier satisfaisant à l'inégalité $\aleph_1\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$.

Démonstration. Désignons, suivant M. Rothberger, par $\aleph_\eta$ *le premier* aleph $>\aleph_0$ satisfaisant à la condition

(A) *il existe au moins une famille de puissance $\aleph_\eta$ se composant de suites infinies d'entiers positifs et finalement non bornée.*

Cet aleph est ainsi défini d'une façon univoque. Il vérifie l'inégalité $\aleph_1\leqslant\aleph_\eta\leqslant 2^{\aleph_0}$ et satisfait par définition à la condition

(B) *toute famille de suites infinies d'entiers positifs d'une puissance $<\aleph_\eta$ est finalement bornée* [4]).

Il en résulte, comme il est facile de le voir, que $\aleph_\eta$ est un aleph régulier.

Je dis que le nombre $\mathfrak{m}=\aleph_\eta$ satisfait aux conditions du Théorème I.

Il nous reste à démontrer que

(a) tout ensemble E de puissance $\aleph_\eta$ satisfait aux conditions 1°-2° de la Proposition (P);

(b) le nombre $\mathfrak{m}$ est unique.

Soit ω_η le nombre initial de puissance $\aleph_\eta$ et soit $\{a^\xi\}_{1\leqslant\xi<\omega_\eta}$ une famille de suites dont l'existence a été affirmée sous (A).

On passe, par un simple procédé transfini, indiqué par M. Rothberger [9], à une nouvelle famille

$$\mathcal{F}_0=\{b^\xi\}_{1\leqslant\xi<\omega_\eta}$$

[4]) F. Rothberger [9], p. 296.

se composant de suites infinies distinctes d'entiers positifs, bien ordonnée par la relation (ρ_2) et jouissant de la propriété suivante, essentielle pour notre démonstration:

(Γ) *aucune partie de $\mathcal{F}_0$ de puissance $\aleph_\eta$ n'est finalement bornée.*

L'assertion (a) résulte maintenant de nos lemmes et des propriétés (B) et (Γ).

En effet, soit E un ensemble quelconque de puissance $\aleph_\eta$.

D'après $\overline{\overline{E}}=\mathcal{F}_0$, il existe une correspondance biunivoque $\Phi(x)=b$ entre les éléments x de E et ceux de $\mathcal{F}_0$. L'ensemble E, la famille $\mathcal{F}_0$ et la correspondance Φ étant donnés, soit $\{f_m(x)\}$ une suite satisfaisant aux conditions du Lemme I. Cette suite n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E_1 de E de puissance $\overline{\overline{E_1}}=\aleph_\eta$, car, s'il existait une décomposition de la forme (5), chacune des familles $\Phi(M_k)$ $(k=1,2,...)$ serait, d'après la condition (*) du Lemme I, bornée, donc la famille $\mathcal{F}_1=\Phi(E_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(M_k)$ — finalement bornée, ce qui est impossible en vertu des relations $\overline{\overline{\mathcal{F}_1}}=\overline{\overline{\Phi(E_1)}}=\aleph_\eta$, $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_0$ et de la propriété (Γ) de $\mathcal{F}_0$.

D'autre part, soit $\{g_n(x)\}$ une suite quelconque de fonctions réelles convergente dans E, E_1 — un sous-ensemble de E de puissance $<\overline{\overline{E}}=\aleph_\eta$. $\Phi(x)$ ayant maintenant le sens précisé dans le Lemme II, considérons la famille $\Phi(E_1)$ de toutes les suites distinctes $\Phi(x)=\nu=(k_1^x,k_2^x,...)$ que l'on obtient pour $x\in E_1$. Il résulte des rélations $\overline{\overline{\Phi(E_1)}}\leqslant\overline{\overline{E_1}}<\aleph_\eta$ et de la propriété (B) que la famille $\Phi(E_1)$ est finalement bornée. Il existe donc une suite fixe d'entiers positifs $\{m_i\}$ qui majore toutes les suites de $\Phi(E_1)$ dans le sens de la relation (ρ_2). Désignons par $i_0(x)$ le plus petit indice tel que $k_i^x\leqslant m_i$ pour $i\geqslant i_0(x)$, $x\in E_1$, et posons

$$M_p=\underset{x}{E}\{x\in E_1,\ i_0(x)=p\}\qquad (p=1,2,...).$$

Il est clair que $E_1=\sum_{p=1}^{\infty}M_p$. Par définition, on a $k_{p+l}^x\leqslant m_{p+l}$ pour tout $x\in M_p$, $l\geqslant 0$. Or, les suites $\nu=(k_1^x,k_2^x,...)$ étant non décroissantes (Lemme II), ceci démontre que chacune des familles $\Phi(M_p)$ $(p=1,2,...)$ est bornée. De là résulte, d'après le Lemme II, que la suite $\{g_n(x)\}$ converge uniformément dans les ensembles $M_p (p=1,2,...)$. Elle est donc σ-uniformément convergente dans E_1.

La Proposition (P) se trouve ainsi réalisée dans tout ensemble E de puissance $\aleph_\eta$.

Nous avons démontré qu'il existe au moins un nombre cardinal indénombrable $\mathfrak{m}=\aleph_\eta\leqslant 2^{\aleph_0}$ satisfaisant aux conditions du Théorème I.

L'unicité résulte tout simplement de la remarque que la coexistence des conditions 1°-2° de la Proposition (P) définit le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ comme le plus petit aleph dans la classe non vide des alephs $\leqslant 2^{\aleph_0}$ tels que les ensembles E de puissances correspondantes satisfont à la condition 1°.

Le Théorème I est ainsi démontré.

3. Application

Soit X un ensemble abstrait quelconque. Appelons *fonction mesurante* (*Maßfunktion* de Hahn[5])) toute fonction réelle $\varphi(E)$ définie sur X et satisfaisant aux 3 conditions suivantes:

1° $0 \leqslant \varphi(E) < \infty$,

2° $\varphi(E_1) \leqslant \varphi(E_2)$ pour $E_1 \subset E_2$,

3° $\varphi(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)$ pour $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

Soit $\mathfrak{M}_\varphi$ le σ-corps de tous les ensembles mesurables φ.

Désignons par Φ la famille de toutes les fonctions mesurantes assujetties à la condition supplémentaire

4° $\varphi(E) < \varphi(X)$ si $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{X}}$.

Banach et Kuratowski, à l'occasion de recherches relatives au problème de la *mesure absolue*[6]), ont obtenu un résultat qui peut être interprété comme il suit:

Si $X = 2^{\aleph_0}$ et si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, il existe une suite $\{E_n\}$ de sous-ensembles de X jouissant de la propriété suivante:

(Δ) *quelle que soit $\varphi \in \Phi$, la relation $E_n \notin \mathfrak{M}_\varphi$ se présente pour au moins une valeur $n = n(\varphi)$ de l'indice n.*

Par cela se trouve précisée la notion d'une famille dénombrable d'ensembles *absolument incommensurables*, résistant contre toute évaluation numérique provenant des fonctions mesurantes assujetties à 4°.

Nous allons démontrer l'existence d'une telle famille dans les ensembles de puissance $\aleph_\eta$.

Dans ce but, désignons par $\mathfrak{k}$ un σ-corps quelconque de sous-ensembles de X, par S — l'ensemble

$$S = \sum_{E \in \mathfrak{k}} E.$$

LEMME III (Propriété d'Egoroff généralisée).

[5]) Voir H. Hahn [5], p. 424.

[6]) S. Banach et C. Kuratowski [6], p. 127; voir aussi S. Banach [7].

Prémisses. *Soient*

(α_1) *$\psi(E)$ une fonction réelle d'ensemble définie sur $\mathfrak{k}$ et satisfaisant aux conditions*:

1* $|\psi(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(E_n)|$ *pour toute suite d'ensembles de* $\mathfrak{k}$,

2* $\lim_{n\to\infty} \psi(E_n) = 0$ *si* $E_n \in \mathfrak{k}$, $E_n \supset E_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$;

(α_2) *$g_n(x) \to g(x)$ une suite convergente de fonctions réelles, définies pour $x \in S$ et mesurables relativement à $\mathfrak{k}$ dans tout ensemble $E \in \mathfrak{k}$*;

(α_3) *$\delta > 0$ un nombre arbitraire.*

Thèse. *E_0 étant un ensemble de $\mathfrak{k}$ pour lequel $\psi(E_0) \neq 0$, il existe un ensemble E_1 aux propriétés suivantes*:

(β_1) $E_1 \subset E_0$, $E_1 \in \mathfrak{k}$,

(β_2) $|\psi(E_1)| > |\psi(E_0)| - \delta$,

(β_3) *$\{g_n(x)\}$ converge uniformément dans E_1.*

La démonstration ne diffère en rien de celle d'Egoroff.

En effet, on pose, pour une suite de nombres $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots \to 0$ donnée d'avance,

$$R_n(\sigma_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{x}{E} \{ |g_{n+k}(x) - g(x)| \geqslant \sigma_m;\ x \in E_0 \},$$

et l'on s'assure sans peine que les conditions 1*-2* suffisent pour en déduire toutes les propriétés des ensembles R, nécessaires pour la démonstration.

Ceci établi, définissons les nombres $\nu(\psi)$ et $\mu(\psi)$ par les formules

$$\nu(\psi) = \operatorname{Supr} \{ |\psi(E)| \}_{E \in \mathfrak{k},\ \overline{\overline{E}} < \overline{\overline{X}}}, \tag{6}$$

$$\mu(\psi) = \operatorname{Supr} \{ |\psi(E)| \}_{E \in \mathfrak{k}}. \tag{7}$$

Désignons par $\Psi(\mathfrak{k})$ la famille de toutes les fonctions $\psi(E)$, définies dans $\mathfrak{k}$, satisfaisant aux conditions 1*-2* du Lemme III et à la condition supplémentaire suivante

3* $\nu(\psi) < \mu(\psi)$.

En s'appuyant sur le Lemme III, on peut démontrer le

THÉORÈME II. *Si $\overline{\overline{X}} = \aleph_\eta$, il existe une suite $\{E_n\}$ de sous-ensembles de X jouissant de cette propriété*:

$\mathfrak{k}$ étant un σ-corps pour lequel la famille $\Psi(\mathfrak{k})$ n'est pas vide, la relation $E_n \notin \mathfrak{k}$ se présente pour au moins une valeur $n = n(\mathfrak{k})$ de l'indice n.

Démonstration. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions convergente dans X, qui n'est uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E

de X de puissance $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{X}}=\aleph_\eta$; une telle suite existe d'après le Théorème I. Considérons les ensembles $\underset{x}{E}\{f_n(x)>r_m\}$ $(n=1,2,...;\ m=1,2,...)$, les r_m parcourant tous les nombres rationnels. Supposons ces ensembles rangés en une suite simplement infinie $\{E_n\}$. Je dis que cette suite satisfait aux conditions du Théorème II.

En effet, soient $\mathfrak{k}$ un σ-corps quelconque à $\Psi(\mathfrak{k})\neq 0$, $\psi(E)$ une fonction appartenant à $\Psi(\mathfrak{k})$. Soit E_0 un ensemble de $\mathfrak{k}$ tel que $|\psi(E_0)|>\nu(\psi)$. D'après (6), (7) et 3*, on voit qu'un tel ensemble existe et que $\overline{\overline{E}}_0=\aleph_\eta$.

Si l'on avait $E_n\in\mathfrak{k}$ pour $n=1,2,...$, toutes les fonctions $f_n(x)$ seraient mesurables relativement à $\mathfrak{k}$ dans tout ensemble $E\in\mathfrak{k}$.

Donc, en choisissant $\delta>0$ suffisamment petit pour que l'on ait $|\psi(E_0)|-\delta>\nu(\psi)$ et en appliquant le Lemme III, on pourrait déterminer un ensemble E_1 vérifiant les relations (β_1)-(β_3) (en y remplaçant g_n par f_n).

D'après $|\psi(E_1)|>|\psi(E_0)|-\delta>\nu(\psi)$ et (6), on aurait $\overline{\overline{E}}_1=\aleph_\eta$, ce qui est impossible en vertu de (β_3) et de la définition de $\{f_n(x)\}$.

Ceci démontre le Théorème II.

Revenons à la famille Φ. On voit que, $\aleph_\eta$ étant un aleph régulier, la condition 4° entraîne, pour $\overline{\overline{X}}=\aleph_\eta$, la relation

$$\mathrm{Supr}\,\{\varphi(E)\}_{\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{X}}}<\varphi(X),$$

d'où il résulte que, dans le cas considéré, tous les $\mathfrak{M}_\varphi$ $(\varphi\in\Phi)$ satisfont aux conditions imposées aux σ-corps $\mathfrak{k}$ à $\Psi(\mathfrak{k})\neq 0$.

On en conclut que le Théorème II implique ce

COROLLAIRE. Si $\overline{\overline{X}}=\aleph_\eta$, *il existe une suite* $\{E_n\}$ *de sous-ensembles de* X *jouissant de la propriété* (Δ).

4. Équivalence

Dans ce qui précède, nous ne nous sommes occupés que du phénomène de convergence défini dans la Proposition (P). Il m'a été suggéré par le Théorème (T) de M. Sierpiński et par son phénomène de convergence. Dans certaines conditions il coïncide avec le phénomène de M. Sierpiński. Mais, par définition, il ne lui est pas pareil. Lorsqu'il s'agit du phénomène de M. Sierpiński comme je l'ai précisé au début de la Note, je ne sais démontrer, ni refuter son existence. Ici, je veux établir une proposition qui le met en rapport avec un domaine, tout différent d'apparence et peu étudié jusqu'à présent.

On dit que les familles $\{a^\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{b^n\}$ $(n=1,2,...)$ de suites infinies d'entiers positifs déterminent une *lacune de type* (Ω,ω^*) si

$$a^1\precsim a^2\precsim...\precsim a^\xi\precsim...\precsim b^n\precsim...\precsim b^2\precsim b^1$$

et s'il n'existe aucune suite infinie d'entiers positifs $x=(x_1,x_2,...)$ telle que $a^\xi\precsim x$, $x\precsim b^n$ pour tout $\xi<\Omega$, $n\geqslant 1$ [7]).

Considérons les deux propositions:

(P_1) *Il existe dans un ensemble non dénombrable une suite convergente* $\{f_n(x)\}$ *qui converge non uniformément dans tout sous-ensemble non dénombrable (Phénomène de convergence de Sierpiński).*

(P_2) *Il existe des lacunes de type* (Ω,ω^*).

Démontrons que

les propositions (P_1) *et* (P_2) *sont équivalentes.*

En effet, M. Rothberger a démontré [8]) que (P_2) est équivalente à l'égalité $\eta=1$, c'est-à-dire à l'existence des familles de suites infinies d'entiers positifs de puissance $\aleph_1$, bien ordonnées par la relation $\precsim$ et finalement non bornées. D'autre part, il est bien facile de voir, d'après ce qui précède, que la proposition (P_1) est équivalente à la même égalité.

De là résulte l'équivalence à démontrer.

Travaux cités

[1] W. Sierpiński, *Remarque sur le théorème de M. Egoroff*, Compt. Rend. des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 20 (1928), p. 84-87.

[2] — *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 34, Warszawa-Lwów 1934.

[3] — *Sur un théorème de M. M. Banach et Kuratowski*, Fund. Math. 14 (1929), p. 278-280.

[4] — *Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres*, Fund. Math. 25 (1935), p. 141-150.

[5] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[6] S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. 14 (1929), p. 127-131.

[7] S. Banach, *Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure*, Colloquium Math. 1 (1948), p. 103-108.

[8] F. Hausdorff, *Summen von* $\aleph_1$ *Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), p. 241-255.

[9] F. Rothberger, *Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété* λ, Fund. Math. 32 (1939), p. 294-300.

[10] — *On some problems of Hausdorff and of Sierpiński*, Fund. Math. 35 (1948), p. 29-46.

[11] — *Sur les familles indénombrables de suites de nombres et les problèmes concernant la propriété C*, Proceedings of the Cambridge Phil. Society 37 (1941), p. 109-126.

[7]) Pour les détails, voir F. Hausdorff [8], p. 247. W. Sierpiński ([4], p. 146-148) a démontré que l'existence des lacunes de type (Ω,ω^*) résulte de l'hypothèse du continu.

[8]) F. Rothberger [10], p. 34 et [11].

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 4. 10. 1952