Man stellt nun leicht die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Berührung von zweien Mannigfaltifkeiten ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ in analytischer Form auf. Diese Bedingungen lassen sich dann mit Hilfe gewisser Gleichungen zwischen den wichtigsten Tensorgrössen beider Mannigfaltigkeiten ausdrücken (1).

Die Korrespondenz (I) hat einen einfachen geometrichen Sinn. Betrachten wir zum Beispiel in E_3 zwei Kurven C_1, C_2, die den gemeinsamen Punkt $\underset{0}{P}$ besitzen. Dieses entspricht dem Spezialfalle $n=3$, $p=1$ der Theorie. Wir wählen zwei linear-unabhängige konstante Vektoren $\overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a$, $\overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a$ mit dem Anfangspunkt in $\underset{0}{P}$ so, dass die Bedingungen (2) für diesen Spezialfall erfüllt sind. Dieses bedeutet geometrisch, dass die durch $\underset{0}{P}$, $\overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a$, $\overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a$ bestimmte Ebene keinen der Tangentialvektoren der Kurven C_1, C_2 in $\underset{0}{P}$ enthält. Wenn wir in genügend kleiner Umgebung von $\underset{0}{P}$ die Schar der mit der Ebene $(\underset{0}{P}, \overset{(1)}{\underset{0}{V}}{}^a, \overset{(2)}{\underset{0}{V}}{}^a)$ parallelen Ebenen betrachten, dann sind es gerade die Schnittpunkte der Ebene der Schar mit den Kurven C_1, C_2, die der Korrespondenz (I) entsprechen (Fig. 1).

In Falle $n=3$, $p=2$ handelt es sich um zwei reguläre Flächen mit dem gemeinsamen Punkt $\underset{0}{P}$. Wir wählen beliebig den konstanten Vektor $\underset{0}{V}{}^a$ mit dem Anfangspunkt in $\underset{0}{P}$, welcher in keiner der beiden Tangentialebenen der gegebenen Flächen ${}^{(1)}\Pi$, ${}^{(2)}\Pi$ im $\underset{0}{P}$ liegt. Die Korrespondenz (I) wird dann in genügend kleiner Umgebung von $\underset{0}{P}$ durch die mit $\underset{0}{V}{}^a$ parallelen Geraden realisiert (Fig. 2).

Reçu par la Rédaction le 3. 12. 1957

(1) Die Beweise der oben ausgesprochenen Sätze sind in einer anderen Zeitschrift (Časopis pro pěstování matematiky, 83 (1958), S. 171-201) veröffentlicht.

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$x''+g(t)x'+f(t)x=0, \tag{1}$$

à coefficients réels et continus. Soit $x(t)$ une intégrale non triviale de cette équation s'annulant deux fois dans un intervalle. Soit, pour fixer les idées:

$$x(0)=0 \quad \text{et} \quad x(h)=0 \quad (h>0).$$

Alors, en vertu d'un théorème général de de la Vallée Poussin (v. [1], p. 138 ou [2], p. 183) appliqué à l'équation particulière (1), on doit avoir

$$1<2mh+kh^2/2, \tag{2}$$

où $2m=\max_{0\leqslant t\leqslant h}|g(t)|$ et $k=\max_{0\leqslant t\leqslant h}|f(t)|$.

Récemment Ph. Hartman et A. Wintner [3] ont démontré l'inégalité plus précise

$$1<mh+kh^2/6. \tag{3}$$

On peut se demander si l'inégalité (3) est la meilleure possible de ce type ou, plus précisément, si les coefficients constants 1 et $\frac{1}{6}$ sont les plus petits possibles. Je démontre dans cette note que la réponse à cette question est négative et que ces coefficients peuvent être remplacés par $4/\pi^2$ et $1/\pi^2$ respectivement et, par conséquent, l'inégalité (3) par celle-ci

$$\pi^2\leqslant 4mh+kh^2, \tag{4}$$

le signe d'égalité n'étant possible que dans le cas où $m=0$. Bien plus, de la démonstration il résultera que l'inégalité (4) est la meilleure possible de ce type.

La démonstration de l'inégalité (4), bien que tout à fait élémentaire, est pourtant assez longue et pénible et, par suite, une inégalité un peu moins précise, mais facile à démontrer, peut ne pas être privée d'intérêt. C'est pourquoi je donne, à la fin de cette note, une démonstration simple et directe de l'inégalité

$$\pi^2 \leqslant 2\pi m h + k h^2. \tag{5}$$

1. Démonstration de l'inégalité (4). Supposons que les fonctions $|f(t)|$ et $|g(t)|$ soient bornées pour tout $t \geqslant 0$ par les constantes k et $2m$. D'après la théorie de de la Vallée Poussin [1], la longueur de l'intervalle $(0, H)$ dans lequel l'intégrale non triviale de l'équation (1) s'annulant pour $t = 0$ doit être différente de zéro, est au moins égale à $H(m, k)$, où

$$H(m,k) = 2\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{\varphi^2+2m\varphi+k}.$$

On en tire, suivant le cas,

$$H(m,k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m^2-k}}\ln\dfrac{m+\sqrt{m^2-k}}{m-\sqrt{m^2-k}}, & \text{si} \quad m^2 > k, \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{k-m^2}}\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{m}{\sqrt{k-m^2}}, & \text{si} \quad k > m^2, \\[2ex] 2, & \text{si} \quad k = m^2. \end{cases}$$

D'autre part, de l'inégalité (4), en y remplaçant le signe d'inégalité par l'égalité, on obtient une autre évaluation de la longueur de cet intervalle, à savoir

$$h(m,k) = -\frac{2m}{k} + \sqrt{\frac{4m^2}{k^2}+\frac{\pi^2}{k}}.$$

Pour prouver l'inégalité (4) il suffit donc de montrer que pour tout couple (m, k) on a $h(m,k) \leqslant H(m,k)$. Mais pour tout $s > 0$

$$h(sm, s^2k) = \frac{1}{s}h(m,k), \qquad H(sm, s^2k) = \frac{1}{s}H(m,k),$$

il suffit donc de montrer que

$$h(1,k) \leqslant H(1,k) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant 1, \tag{A}$$

$$h(m,1) \leqslant H(m,1) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m \leqslant 1. \tag{B}$$

Démonstration de l'inégalité (A). Du développement de la fonction $H(1,k)$ en série de Taylor on tire pour tout $k \in (0,1)$

$$H(1,k) = \frac{1}{\sqrt{1-k}}\ln\frac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}} \geqslant 2\left(1+\frac{1-k}{3}\right).$$

Il reste donc à montrer que dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$

$$h(1,k) = -\frac{2}{k}+\sqrt{\frac{4}{k^2}+\frac{\pi^2}{k}} = \frac{\pi^2}{2+\sqrt{4+\pi^2k}} \leqslant \frac{8}{3}-\frac{2}{3}k.$$

Ces deux dernières fonctions vérifiant l'inégalité demandée pour $k = 0$ et $k = 1$, il suffit à cet effet de remarquer que la seconde d'elles est linéaire et la première concave, puisque sa dérivée

$$h'(1,k) = \frac{-\pi^2}{(2+\sqrt{4+\pi^2k})^2}\cdot\frac{\pi^2}{2\sqrt{4+\pi^2k}}$$

est une fonction croissante dans l'intervalle envisagé.

Démonstration de l'inégalité (B). Dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ les fonctions $h(m,1)$ et $H(m,1)$ sont décroissantes. Désignons par m_0 le nombre $\frac{1}{8}\pi^2-\frac{1}{2}$. On peut aisément vérifier que $h(m_0, 1) = 2$. Mais $H(1,1) = 2$ et, par suite, dans l'intervalle $(m_0, 1)$ on a l'inégalité (B). D'autre part $H(0,1) = h(0,1) = \pi$. Pour démontrer la relation (B) dans l'intervalle $\langle 0, m_0\rangle$, il suffit donc de montrer que dans cet intervalle on a $h'(m,1) \leqslant H'(m,1)$ c'est-à-dire l'inégalité

$$\frac{2}{1-m^2}\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}-1\right) \geqslant -2+\frac{4m}{\sqrt{4m^2+\pi^2}}.$$

Or, en multipliant cette inégalité par $(1-m^2)/2$, on en tire l'inégalité

$$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}-1 \geqslant -1+m^2+\frac{2m(1-m^2)}{\sqrt{4m^2+\pi^2}}$$

équivalente, pour tout m de l'intervalle $(0,1)$, à celle-ci

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \geqslant m+\frac{2(1-m^2)}{\sqrt{4m^2+\pi^2}}.$$

La première de ces fonctions, décroissante dans l'intervalle $\langle 0, 1)$, est toujours supérieure à $\lim\limits_{u\to+\infty} u \operatorname{arc\,ctg} u = 1$, tandis que la deuxième, comme on peut le vérifier, est inférieure à 1 dans l'intervalle $\langle 0, m_0\rangle$. L'inégalité (B) se trouve donc démontrée.

Des démonstrations des inégalités (A) et (B) on voit que la relation $h(m,k)=H(m,k)$ n'est possible que lorsque $m=0$ et, par suite c'est le seul cas où dans l'inégalité (4) on peut avoir l'égalité. Remarquons maintenant que

$$H(0,1)=h(0,1)=\pi, \qquad H'(0,1)=h'(0,1)=-2.$$

Les évaluations de de la Vallée Poussin sont, pour tout couple (m,k), les meilleures possibles. Il en résulte que dans l'inégalité (4) ni l'un ni l'autre des coefficients 4 et 1 ne peut pas être diminué, car un tel changement aurait pour conséquence ou bien l'inégalité $h(0,1)>H(0,1)$ ou bien $h'(0,1)>H'(0,1)$.

2. Démonstration de l'inégalité (5). Soit $x(t)$ une intégrale non identiquement nulle de l'équation (1) s'annulant aux points 0 et h $(0<h)$. On a alors

$$x''(t)+g(t)x'(t)+f(t)x(t)\equiv 0.$$

Multiplions cette identité par $x(t)$ et intégrons ensuite dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Il vient

$$\int_0^h x''(t)x(t)\,dt+\int_0^h g(t)x'(t)x(t)\,dt+\int_0^h f(t)x^2(t)\,dt=0.$$

Mais

$$\int_0^h x''(t)x(t)\,dt=x'(t)x(t)\Big|_0^h-\int_0^h x'^2(t)\,dt=-\int_0^h x'^2(t)\,dt.$$

Donc, en désignant par $2m$ et k les maxima des fonctions $|g(t)|$ et $f(t)$ dans l'intervalle $\langle 0,h\rangle$ (on doit avoir $k\geqslant 0$, car lorsque $k<0$ aucune intégrale de l'équation (1) ne peut s'annuler deux fois), on a

$$-\int_0^h x'^2(t)\,dt+2m\int_0^h |x(t)||x'(t)|\,dt+k\int_0^h x^2(t)\,dt\geqslant 0 \tag{6}$$

et le signe d'égalité n'est possible que dans le cas où $m=0$. En profitant de l'inégalité bien connue

$$\int_0^h x^2(t)\,dt\leqslant\frac{h^2}{\pi^2}\int_0^h x'^2(t)\,dt \tag{7}$$

(v. [2], p. 309) et en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\int_0^h |x(t)||x'(t)|\,dt\leqslant\left(\int_0^h x'^2(t)\,dt\cdot\int_0^h x^2(t)\,dt\right)^{1/2}\leqslant\frac{h}{\pi}\int_0^h x'^2(t)\,dt. \tag{8}$$

Des inégalités (6), (7) et (8) on tire

$$-\int_0^h x'^2(t)\,dt+2m\frac{h}{\pi}\int_0^h x'^2(t)\,dt+k\frac{h^2}{\pi^2}\int_0^h x'^2(t)\,dt\geqslant 0$$

d'où l'on obtient immédiatement l'inégalité (5), le signe d'égalité n'étant possible que lorsque $m=0$.

3. Remarque. Dans le cas $g(t)\equiv 0$ les résultats de Ph. Hartman et A. Wintner nous permettent d'obtenir l'inégalité

$$1<\max_{0\leqslant t\leqslant h} t(h-t)|f(t)|.$$

Or, grâce à une relation analogue à (7), on peut démontrer l'inégalité plus précise

$$1<\frac{1}{\sqrt{2}}M_1+\frac{1}{2}M_2 \tag{9}$$

où $M_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant h}\sqrt{t(h-t)}\,|g(t)|$ et $M_2=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant h} t(h-t)f(t)$. On a en effet, pour l'intégrale $x(t)$ s'annulant aux points $t=0$ et $t=h$

$$\int_0^h\frac{x^2(t)}{t(h-t)}\,dt<\frac{1}{2}\int_0^h x'^2(t)\,dt$$

(v. [4], p. 193) et, par suite, pour obtenir (9) il suffit d'écrire au lieu de (6):

$$-\int_0^h x'^2(t)\,dt+M_1\int_0^h |x'(t)|\frac{|x(t)|}{\sqrt{t(h-t)}}\,dt+M_2\int_0^h\frac{x^2(t)}{t(h-t)}\,dt\geqslant 0.$$

Travaux cités

[1] C. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Journal de Math. Pures et Appliquées 8 (1929), p. 125-144.

[2] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.

[3] Ph. Hartman and A. Wintner, *On an oscillation criterion of de la Vallée Poussin*, Quarterly of Applied Mathematics 13, N 3 (October 1955), p. 330-332.

[4] G. Hardy, J. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

Reçu par la Rédaction le 13. 2. 1957