STUDIA MATHEMATICA, T. XVIII. (1959)

Beitrag zur Theorie des Maßringes mit Faltung

von

S. HARTMAN (Wrocław)

Schreider [7] hat die Struktur des aus allen Borelschen Maßen auf einer lokal-kompakten abelschen Gruppe bestehenden Ringes mit faltungsweiser Multiplikation eingehend untersucht und insbesondere alle Homomorphismen solcher Ringe auf den komplexen Zahlkörper ermittelt. Es wurden dabei Irregularitäten an den Tag gelegt, welche die Anwendbarkeit der Theorie auf analytische Probleme ungünstig beeinflussen. Mithin sind die Ergebnisse von Schreider gewissermaßen als negativ anzusehen. Der Zweck dieses Beitrags ist aus dem Ringe aller Maße einen Unterring auszusondern, für welchen die Verhältnisse einfacher liegen und einige Schlüsse in bezug auf die Fourierreihen von Funktionen von beschränkter Schwankung gestatten.

1. Ist G eine separable lokal-kompakte abelsche Gruppe, so heißt σ ein *Borelsches Maß*, wenn es eine abzählbar additive auf allen Borelschen Mengen von G erklärte endliche komplexwertige Mengenfunktion ist. Alle σ werden zum Ring R, wenn man

$$(1)\qquad \begin{aligned} (\sigma_1+\sigma_2)(E) &= \sigma_1(E)+\sigma_2(E),\\ (\sigma_1\circ\sigma_2)(E) &= \int \sigma_1(E-x)\,d\sigma_2(x) \end{aligned}$$

setzt, wo über ganz G integriert wird. Dieser Ring ist kommutativ ([7], S. 299). Das auf dem Nullelement von G konzentrierte Maß e mit $e\big((0)\big)=1$ ist das Einselement von R. Die natürliche Multiplikation von σ mit einer komplexen Zahl: $\lambda\sigma$ macht R zu einem komplexen linearen Ring. Er wird zu einer Banachschen Algebra, wenn man als Norm von σ den Ausdruck $\|\sigma\| = (\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}+\sigma^{(3)}+\sigma^{(4)})(G)$ setzt, wo die Summanden der eindeutigen Zerlegung von σ:

$$\sigma(E) = \sigma^{(1)}(E)+i\sigma^{(2)}(E)-\sigma^{(3)}(E)-i\sigma^{(4)}(E)$$

mit nicht-negativen $\sigma^{(j)}$ entstammen ([1], S. 123).

Ist χ ein stetiger Charakter von G, so ist die Fourier-Stieltjessche Transformierte (abgekürzt F-S-Transformierte) $F_\chi(\sigma) = \int \chi(x)\, d\sigma(x)$ eine auf R erklärte komplexe Funktion. Es gilt

$$F_\chi(\sigma_1+\sigma_2) = F_\chi(\sigma_1)+F_\chi(\sigma_2),$$
$$F_\chi(\sigma_1\circ\sigma_2) = F_\chi(\sigma_1)\cdot F_\chi(\sigma_2).$$

Darum ist F_χ ein (offenbar linearer) Homomorphismus von R auf den Körper Z der komplexen Zahlen. Es ist schon in einfachen Fällen leicht zu zeigen, daß dadurch nicht alle Homomorphismen von R auf Z beschrieben werden können. Schwieriger war die Frage zu beantworten, ob die Homomorphismen vom Typus F_χ im Raume aller überhaupt vorhandenen dicht liegen, was in Anbetracht der hier zugrunde gelegten Topologie folgendes bedeuten würde: für jeden Homomorphismus $h\colon R\to Z$, jedes $\varepsilon>0$ und jedes endliche System $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in R$ gibt es einen stetigen Charakter χ mit $|F_\chi(\sigma_i)-h(\sigma_i)|<\varepsilon$ $(i=1,2,\dots,n)$. Schreider zeigte, daß es schon für die 1-dimensionale Vektorgruppe *nicht* der Fall ist, und sein Beweis läßt sich leicht auf die Kreisdrehungsgruppe übertragen.

Ein Maß σ heißt *stetig*, wenn es auf jeder einpunktigen Menge verschwindet. Es ist ersichtlich, daß die stetigen Maße ein abgeschlossenes Ideal in R bilden. Es werde mit R_c bezeichnet. Die sprungartigen Maße, d. h. solche, die nur in einzelnen, höchstens abzählbar vielen Punkten konzentriert sind, bilden eine abgeschlossene Unteralgebra R_s (aber kein Ideal). Jedes Maß läßt eine eindeutige Zerlegung in die stetige und die sprungartige Komponente zu: $\sigma=\sigma_c+\sigma_s$. Ist μ das Haarsche Maß in G, so heißt σ *absolut stetig*, wenn $\sigma(E)=0$ aus $\mu(E)=0$ folgt. Es ist ersichtlich, daß die absolut stetigen Maße ein abgeschlossenes Ideal in R bilden. Es heiße R_a. Man soll beachten, daß das Maß μ selbst kein Element von R_a zu sein braucht, weil man für eine nicht kompakte Gruppe $\mu(G)=\infty$ und also $\mu\notin R$ hat.

Es ist im wesentlichen bekannt, daß jeder Homomorphismus $R_a\to Z$ eine F-S-Transformierte F_χ ist. Da liegt der Grund vor: nach dem Satz von Radon und Nikodym gibt es für jedes $\sigma\in R_a$ eine Funktion ψ mit

$$\sigma(E) = \int_E \psi(x)\, d\mu(x) \tag{2}$$

für beliebige Borelsche Menge E. Andererseits erzeugt jede μ-integrierbare Funktion ψ ein Maß nach (2). Man hat

$$(\sigma_1\circ\sigma_2)(E) = \int \int_{E-x} \psi_1(t)\, d\mu(t)\, \psi_2(x)\, d\mu(x) = \int\int_E \psi_1(u-x)\, d\mu(u)\, \psi_2(x)\, d\mu(x)$$
$$= \int_E d\mu(u) \int \psi_1(u-x)\, \psi_2(x)\, d\mu(x).$$

Darum wird das Maß $\sigma_1\circ\sigma_2$ durch die Faltung $\int \psi_1(u-x)\,\psi_2(x)\, d\mu(x)$ erzeugt, und R_a erweist sich als dem Ringe $L_1(G)$ aller μ-integrierbaren Funktionen mit so erklärter Faltung und mit der Norm $\int|\psi(x)|\, d\mu(x)$ isomorph. Nun weiß man, daß jeder Homomorphismus von $L_1(G)$ auf Z von der Art

$$\psi \to \int \chi(x)\,\psi(x)\, d\mu(x) = \int \chi(x)\, d\sigma(x) = F_\chi(\sigma)$$

ist ([5], S. 134-137).

Für den Ring R_s liegen die Verhältnisse zwar nicht so einfach, wie für R_a, jedoch einfacher als für ganz R. Das Hauptziel dieser Mitteilung ist eben das letztere präzis auszusprechen und zu beweisen.

2. Sei G eine lokal-kompakte abelsche Gruppe und G_d die in algebraischer Hinsicht mit G identische diskrete Gruppe. Ferner sei Γ die zu G_d duale (kompakte) Gruppe; sie besteht aus *allen* (d. h. nicht nur aus den stetigen) Charakteren von G. Es gilt

Satz 1. *Die stetigen Charaktere von G bilden eine dichte Untermenge von Γ.*

Der Beweis ergibt sich leicht aus einem Satz von Hewitt und Zuckerman ([4], Theorem 1): Ist H eine Gruppe von Charakteren einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ und ω_0 ein Charakter von H, so ist für jedes System $\chi_1,\dots,\chi_n\in H$ und jedes $\varepsilon>0$ ein $t\in\mathfrak{G}$ zu finden, für welches

$$|\chi_j(t)-\omega_0(\chi_j)|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\dots,n) \tag{3}$$

gilt (vgl. dazu auch [3]). Wir setzen für $\mathfrak{G}$ die Gruppe aller stetigen Charaktere von G und für H die Gruppe aller stetigen Charaktere von $\mathfrak{G}$. Nach dem Dualitätssatz sind die letzteren alle von der Form

$$t(\chi) = \chi(t), \tag{4}$$

wo $t\in G$ fest ist und χ in $\mathfrak{G}$ variiert. Diesem Isomorphismus zwischen G und H zufolge kann ω_0 im obigen Satz als Charakter von G und mithin als ein Element von Γ betrachtet werden. Jede Umgebung von ω_0 in Γ ist durch ein $\varepsilon>0$ und eine endliche Anzahl von Elementen $t_1,\dots,t_n\in G$ bestimmt: sie besteht aus denjenigen Elementen $\omega\in\Gamma$, für welche

$$|\omega(t_j)-\omega_0(t_j)|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\dots,n) \tag{5}$$

gilt. Da die t_j als Elemente von H aufgefaßt werden können, dürfen wir dieselben anstatt χ_j in (3) einsetzen. Bezeichnen wir mit χ das $t\in\mathfrak{G}$ in (3) und schreiben wir, gemäß (4), $\chi(t_j)$ statt $t_j(\chi)$, so bedeutet (3), daß χ zu der Umgebung (5) gehört. Damit endet der Beweis, weil ω_0 ein *beliebiger* Charakter von G war und χ als Element von $\mathfrak{G}$ ein *stetiger* Charakter von G ist.

Nun verschärfen wir Satz 1 zu

Satz 1′. *Ist H eine Untergruppe einer lokal-kompakten abelschen Gruppe G, so bilden diejenigen Charaktere von H, welche in der aus G in H induzierten Topologie stetig sind, eine dichte Untergruppe in der kompakten Gruppe aller Charaktere der (als diskret betrachteten) Gruppe H.*

Beweis. Einen beliebigen Charakter ω von H kann man (vielleicht auf mehrere Weisen) zu einem Charakter ω_0 von ganz G erweitern. Es sei U eine nach (5) durch ein ε und n Elemente $t_1, \ldots, t_n \in H \subset G$ bestimmte Umgebung in der kompakten Gruppe aller Charaktere von G. Nach Satz 1 gibt es in U einen stetigen Charakter χ von G, so daß also

$$|\chi(t_j) - \omega_0(t_j)| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

gilt. Der Charakter χ, auf H betrachtet, ist offenbar stetig in der Topologie von G, und wegen (6) und der Gleichheit $\omega_0(t_j) = \omega(t_j)$ liegt er in der durch ε und t_j bestimmten Umgebung von ω in der Gruppe aller Charaktere von H. Da $\varepsilon > 0$ und $t_j \in H$ beliebig waren, ist der Beweis erbracht.

Bemerkung. Sämtliche stetigen Charaktere von H erhält man, indem man die stetigen Charaktere von G als Teilfunktionen auf H betrachtet, weil nämlich jeder stetige (und also gleichmäßig stetige) Charakter von H sich zuerst auf genau eine Weise zu einem stetigen Charakter der abgeschlossenen Untergruppe $\overline{H} \subset G$ und dann, vielleicht auf mehrere Weisen, zu einem ebenso stetigen Charakter von G erweitern läßt.

3. Es sei H eine endliche oder abzählbare Untergruppe von G. Sei weiter $R(H)$ die Gesamtheit aller Maße $\sigma \in R$, welche auf H konzentriert sind. Es gilt offenbar $R(H) \subset R_s$. Wir ordnen die Elemente von H in eine Folge $\{x_k\}$ und für beliebiges $\sigma \in R(H)$ setzen wir $\sigma((x_k)) = l_k^\sigma$. Dann ist nach (1) für $\sigma_1, \sigma_2 \in R(H)$

$$l_k^{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \sum_{x_i + x_j = x_k} l_i^{\sigma_1} l_j^{\sigma_2} \tag{7}$$

und $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(E) = 0$, wenn $E \frown H = \emptyset$. Darum ist $R(H)$ ein Unterring von R, und zwar ein abgeschlossener.

Satz 2. *Die F-S-Transformierten*

$$F_\chi(\sigma) = \sum_k \chi(x_k) l_k^\sigma \qquad (\sigma \in R(H)), \tag{8}$$

wo χ ein beliebiger stetiger Charakter von G ist, bilden eine dichte Menge im Raum M aller Homomorphismen $R(H) \to Z$.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, daß alle Homomorphismen $R(H) \to Z$ von der Form (8) sind, wo χ ein *beliebiger* Charakter der Gruppe H ist. Das folgt aus dem bereits in 1. benutzten Satze ([5], S. 134-137) über die Gestalt der Homomorphismen $L_1(G) \to Z$: man soll nämlich H statt G setzen und beachten 1° daß $R(H)$ mit $L_1(H)$ identisch wird, wenn wir jedes $\sigma \in R(H)$ mit der nach dem (rein atomaren) Haarschen Maße in der (diskreten) Gruppe H integrierbaren Funktion $\sigma(x_k) = l_k^\sigma$ identifizieren und 2° daß die Gleichheit

$$\sum_k \chi(x_k) l_k^\sigma = \int_H \chi(x)\, d\sigma(x)$$

besteht. Übrigens lassen sich alle Homomorphismen $R(H) \to Z$ auch direkt sehr leicht ermitteln.

Um die Behauptung von Satz 2 zu erhalten, bedienen wir uns des Satzes 1′. Zusammen mit der ihm folgenden Bemerkung lehrt er, daß die auf H betrachteten stetigen Charaktere von G in der Gruppe $\hat{H}$ aller Charaktere von H dicht liegen. Da die letzteren genau den Homomorphismen $R(H) \to Z$ entsprechen, wird alles bewiesen sein, sobald wir zeigen, daß die in 1 erklärte Topologie im Raume M mit der Topologie in $\hat{H}$ äquivalent ist. Das folgt aus einem allgemeineren Satze von Rajkoff ([6], S. 50), welcher die Übereinstimmung dieser Topologien auch dann feststellt, wenn H eine beliebige lokal-kompakte abelsche Gruppe ist, $\hat{H}$ die Gruppe der stetigen Charaktere von H bezeichnet und an Stelle von $R(H)$ der Ring der absolut stetigen Maße in H oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ihm isomorphe Ring $L_1(H)$ tritt, wobei die Zuordnung von Elementen aus M und $\hat{H}$ durch die letzte Formel in 1 gegeben wird. Da aber für den Fall einer diskreten Gruppe H mit $\overline{\overline{H}} \leqslant \aleph_0$ (für einen Fall also, wo jede Funktion auf H absolut stetig ist) der Beweis der Äquivalenz besonders leicht ist, führen wir ihn explizit durch.

Mengentheoretisch identifizieren wir M mit $\hat{H}$ und wir unterscheiden nur die M- und die $\hat{H}$-Topologie.

Sei also χ_0 ein Charakter von H (Homomorphismus von $R(H)$ auf Z) und U eine durch $\delta > 0$ und $t_1, \ldots, t_n \in H$ bestimmte $\hat{H}$-Umgebung von χ_0. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehme man $t_j = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ an. U besteht demnach aus denjenigen χ, für welche

$$|\chi(x_j) - \chi_0(x_j)| < \delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

gilt. Wir definieren die Maße $\sigma_j \in R(H)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ durch die Bedingung $l^{\sigma_j} = 0$ oder 1, je nachdem $k \neq j$ oder $k = j$ ist. Dann ist $F_\chi(\sigma_j) = \chi(x_j)$ und die Ungleichungen $|F_\chi(\sigma_j) - F_{\chi_0}(\sigma_j)| < \delta$ sind mit (9) gleichbedeutend. Diese Ungleichungen bestimmen aber eine M-Umgebung von χ_0, die mit U identisch ist.

Umgekehrt sei V eine durch $\varepsilon > 0$ und beliebige $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in R(H)$ bestimmte M-Umgebung von χ_0. Sie besteht demnach aus denjenigen χ, für welche

$$(10) \qquad \Big|\sum_k [\chi(x_k) - \chi_0(x_k)] l_k^{\sigma_i}\Big| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

gilt. Es ist wegen $\sum_k |l_k^{\sigma_i}| < \infty$ klar, daß für ein hinreichend großes n und ein hinreichend kleines $\delta > 0$ die Ungleichung (10) aus (9) folgt. Damit haben wir eine $\hat{H}$-Umgebung von χ_0 gefunden, die in V liegt. Die Äquivalenz der beiden Topologien ist nachgewiesen und der Beweis zu Ende.

4. Nun geben wir einige analytische Anwendungen von Satz 2 an. Ist A eine kommutative Banachsche Algebra, $\varphi(z)$ eine im Bereich D holomorphe Funktion und $h(\vartheta) \in D$ $(\vartheta \in A)$ für jeden Homomorphismus h von A auf Z, so existiert nach dem bekannten Satz von Mazur und Gelfand ein solches $\tau \in A$, daß die Gleichheit $h(\tau) = \varphi(h(\vartheta))$ für jedes h besteht. Wenn wir für eine gegebene lokal-kompakte abelsche Gruppe G als A den Ring R_s annehmen, so wissen wir von den Homorphismen viel genug, um diesen Satz anwenden zu können. Wie aus Satz 2 leicht zu folgern ist, liegen die Abbildungen $F_\chi(\sigma) = \int \chi(\sigma)\,d\sigma(x)$, wo für χ stetige Charaktere von G stehen, dicht im Raume aller Homomorphismen $R_s \to Z$. Daraus folgt aber: wenn für ein $\sigma \in R_s$ immer $|F_\chi(\sigma)| > \delta > 0$ gilt, so gilt $|h(\sigma)| > 0$ für *jeden* Homomorphismus h: $R_s \to Z$. Wenn man dann für φ eine analytische Funktion wählt, die für $z \neq 0$ regulär ist, kann man auf die Existenz eines Maßes $\tau \in R_s$ schließen, das die Gleichung

$$(11) \qquad h(\tau) = \varphi(h(\sigma))$$

identisch in h erfüllt ist; insbesondere (Fall $\varphi(z) = 1/z$) gibt es ein τ mit $F_\chi(\sigma) \cdot F_\chi(\tau) = 1$ identisch in χ (dann ist $\sigma \circ \tau = e$). Gelegentlich sei bemerkt, daß die Formel (11) das τ eindeutig bestimmt, weil bereits die F-S-Transformierten zweier verschiedener Elemente von R nicht übereinstimmen können.

Ist φ eine ganze Funktion, so gibt es offenbar für *jedes* $\sigma \in R_s$ ein τ mit (11). Liegen die Sprungstellen von σ in einer Untergruppe $H \subset G$, so ist das auch für die Sprungstellen von τ der Fall. Wählt man für G die 1-dimensionale Vektorgruppe, so entspricht jedem Borelschen Maß σ die bis auf eine additive Konstante bestimmte linksseitig stetige Funktion der reellen Variabel $f(x)$ mit

$$(12) \qquad \sigma([x_1, x_2)) = f(x_2) - f(x_1).$$

Die Funktion f ist dann von beschränkter Schwankung und die Zuordnung (12) ist umkehrbar. Sie bewerkstelligt einen Isomorphismus zwischen dem Maßring R und dem entsprechenden Funktionenring. Dem Unterring R_a entspricht dabei der Unterring der absolut stetigen Funktionen und dem Unterring R_s derjenige der reinen Sprungfunktionen. Da die stetigen Charaktere χ hier von der Form $e^{i\lambda x}$ mit beliebigen reellen λ sind, so ist die Abbildung $F_\chi(\sigma)$ gleich der klassischen Fourier-Stieltjesschen Transformierten $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,df(x)$, und es folgt der Satz:

Ist für eine reine Sprungfunktion f mit (auf der ganzen Geraden) beschränkter Schwankung die Transformierte $F(\lambda)$ absolut größer als eine positive Zahl, so stellt $1/F(\lambda)$ ebenso die Fourier-Stieltjessche Transformierte einer Sprungfunktion dar, deren Sprungstellen alle in der additiven Gruppe reeller Zahlen liegen, die von den Sprungstellen von f erzeugt wird.

Wir wollen jetzt näher den Fall betrachten, wenn G die Kreisdrehungsgruppe ist. Man begegnet schon am Anfang einer unwesentlichen Schwierigkeit, die darin besteht, daß die Zuordnung (12) nicht im vollen Umfange gilt. Funktionen auf G kann man als periodische Funktionen deuten (die Periode sei gleich 1 festgesetzt) und deshalb können ihnen vermittelst (12) nur solche Maße entsprechen, die auf ganz G verschwinden. Wohl ist das aber die einzige Beschränkung und (12) gibt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Borelschen Maßen auf dem Kreise, welche der Bedingung $\sigma(G) = 0$ genügen, und den linksseitig stetigen komplexen periodischen Funktionen von beschränkter Schwankung mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (Normierung!). Offenbar bilden die Maße mit $\sigma(G) = 0$ ein Ideal in R. Heißt dieses Ideal I, so hat man die Zerlegung $R = I \dot{+} Z$; als zweiter Summand erscheint hier der komplexe Zahlkörper, und zwar aus dem Grunde, daß für jedes $\sigma \in R$ die Darstellung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ besteht, wo $\sigma_1(G) = 0$ und das im Nullpunkt konzentrierte Maß σ_2 durch die Gleichung $\sigma_2((0)) = \sigma(G)$ bestimmt ist; als $\sigma(G)$ kann beliebige komplexe Zahl vorkommen, und diese Zahlen multiplizieren sich bei der Faltung. Im allgemeinen verursacht die Faltung eines beliebigen Maßes mit einem Maße σ_2 aus Z einfach die Multiplikation mit der Zahl $\sigma_2(G)$. Demnach kann jeder Homomorphismus h: $I \to Z$ zu einem Homomorphismus h_1: $R \to Z$ durch die Formel $h_1(\sigma) = h(\sigma_1) + \sigma_2$ erweitert werden.

Wir beschränken uns hier nicht auf die Untersuchung der Sprungfunktionen. Vielmehr nehmen wir den Ring $R_s \dot{+} R_a$ in Betracht. Er besteht aus den Maßen, deren stetige Komponenten absolut stetig sind. Dem Ring $(R_s \dot{+} R_a) \cap I$ entspricht der Ring aller periodischen Funktionen von beschränkter Schwankung, deren stetige Komponenten im Intervall $[0, 1]$ absolut stetig sind, die also keinen Singulärteil haben. Das scheint eine gewissermaßen natürliche Regularitätsklasse von periodischen Funktionen zu sein. Gelegentlich identifizieren wir Maßringe mit den entsprechenden Funktionenringen, z. B.: ist H eine endliche oder abzählbare Untergruppe von G (Gruppe reeller Zahlen mit Addition mod 1), so bedeutet $(R(H)\dot{+}R_a)\cap I$ den Ring derjenigen normierten periodischen Funktionen von beschränkter Schwankung und ohne Singulärteil, die Unstetigkeiten nur in H aufweisen. Wir setzen

$$(R(H)\dot{+}R_a)\cap I = R_H.$$

Es werde bemerkt, daß R_H ein Einselement hat, wie auch H gewählt sei; das ist das Einselement von ganz I, nämlich die Funktion, welche im Intervall $[0,1)$ gleich $-x+\frac{1}{2}$ und sonst periodisch ist. Ihre Fourierreihe ist $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(1/2\pi in)e^{2\pi inx}$ ($'$ bedeutet, daß $n=0$ übersprungen wird). Den uns vorschwebenden Satz formulieren wir in der Sprache der Fourierreihen:

Satz 3. *Ist $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(a_n/n)e^{2\pi inx}$ ($a_n\neq 0$) die Fourierreihe einer Funktion $f\epsilon R_H$ und enthält die Folge a_n keine nach Null strebende Teilfolge, so ist für jede im Bereich $z\neq 0$ holomorphe Funktion $\varphi(z)$ auch $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(\varphi(a_n)/n)\,e^{2\pi inx}$ Fourierreihe einer Funktion aus R_H; insbesondere trifft das auf die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(1/a_nn)e^{2\pi inx}$ zu.*

Beweis. Die a_n sind offenbar gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 e^{-2\pi inx}\,df(x),$$

sie unterscheiden sich daher nur um eine multiplikative Konstante von den F-S-Koeffizienten β_n von f. Man hat also zu beweisen, daß es eine Funktion aus R_H gibt, die $\varphi(\beta_n)$ zu F-S-Koeffizienten hat. Das ist getan, sobald man sich überzeugt, daß bei allen möglichen Homomorphismen h: $R_H\to Z$ immer $h(f)\neq 0$ ist.

Der Zerlegung $R=I\dot{+}Z$ entsprechend haben wir $R_a\dot{+}R(H)=R_H\dot{+}Z$, woraus folgt, daß jeder Homomorphismus von R_H auf Z durch einen Homomorphismus h: $R_a\dot{+}R(H)\to Z$ induziert wird. Jedes $f\epsilon R_H$ spaltet sich in zwei Komponenten: f_1 aus R_a und f_2 aus $R(H)$, welche übrigens nicht zu I zu gehören brauchen. Die Komponenten aus $R(H)$ (nicht aber die aus R_a) multiplizieren sich bei der Faltung. Deshalb bestimmt jeder Homomorphismus h_2: $R(H)\to Z$ einen Homomorphismus $R_a\dot{+}R(H)\to Z$ vermittelst der Formel $h(f)=h_2(f_2)$. Das sind also diejenigen h, welche ganz R_a auf 0 überführen. Für die anderen hat man zuerst $h(f)=h(f_1)+h(f_2)$. Hier ist $h(f_1)$ ein h_1: $R_a\to Z$ und also (sieh 1) gleich $\int_0^1 e^{-2\pi inx}df_1(x)$ mit einem bestimmten n. Ähnlich ist $h(f_2)$ ein h_2, alle h_2 sind aber von der Form (8) mit f_2 statt σ und mit $l_k^{f_2}=f_2(x_k+0)-f_2(x_k)$. Die Multiplikativität von h bringt also mit sich, daß der Charakter χ in (8) mit $e^{-2\pi inx}$ übereinstimmen muß. Mithin erweist sich h als der n-te F-S-Koeffizient von f. Wir haben also gezeigt, daß jeder Homomorphismus $R_H\to Z$ entweder mit einem Homomorphismus von $R(H)$ auf Z übereinstimmt oder durch einen F-S-Koeffizienten gegeben wird. Diese Koeffizienten sind für die betrachtete Funktion f voraussetzungsgemäß von Null verschieden. Da die F-S-Koeffizienten a_n' der absolut stetigen Komponente f_1 nach Null streben und die Folge a_n keine Nullfolge enthält, so gibt es auch keine Nullfolge von F-S-Koeffizienten a_n'' der Sprungkomponente f_2. Nach Satz 2 liegen die letzteren dicht in der Zahlenmenge $h_2(f_2)$, wo h_2 alle Homomorphismen $R(H)\to Z$ durchläuft.

Um nachzuweisen, daß man $h_2(f_2)\neq 0$ für jedes h_2 hat, bleibt nur zu zeigen, daß alle a_n'' von Null verschieden sind. Es gilt

$$a_n''=\sum_k e^{-2\pi inx_k}l_k^{f_2},$$

wo x_k alle Elemente von H erschöpfen. Da $e^{-2\pi inx_r}$ mit festem k und veränderlichem n ein Charakter der additiven Gruppe der ganzen Zahlen ist, so stellt $a_n''=a''(n)$ eine fast periodische Funktion auf dieser Gruppe dar, m. a. W. ist a_n'' eine fast periodische Folge. Wäre also $a_{n_0}''=0$, so gäbe es eine Teilfolge a_{n_k}'' mit $a_{n_k}''\to 0$, was unmöglich ist. Somit ist alles bewiesen.

Man kan Satz 3 so abändern, daß die Bedingung $a_n\neq 0$ überflüssig wird. Ohnedies wäre $a_n=0$ nur für endlich viele Glieder $(n=n_1,\dots,n_r)$ möglich, weil ja keine Teilfolge von a_n nach Null strebt. Dann könnte man zu f ein trigonometrisches Polynom $W(x)=\sum_{j=1}^{r}(\gamma_j/n)e^{2\pi in_jx}$ mit $\gamma_j\neq 0$ addieren, den Satz auf $f+W$ anwenden und das Polynom $\sum_{j=1}^{r}(\varphi(\gamma_j)/n)\,e^{2\pi in_jx}$ subtrahieren; man erhielte eine Funktion aus R_H, deren Fourierreihe $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(\varphi(a_n)/n)\,e^{2\pi inx}$ wäre, wo $'$ die Weglassung der Glieder mit $a_n=0$ bedeutet.

Folgende Bemerkung stammt von Herrn C. Ryll-Nardzewski: im Satz 3 kann man $a_n=0$ auch für unendlich viele n zulassen, wenn nur die Menge A solcher n derart ist, daß die Reihe $\sum_{n\in A}'(1/n)e^{2\pi i n x}$ einer Funktion aus R entspricht. Dann bezieht sich die Voraussetzung über das Fehlen von Nullfolgen nur auf die Teilmenge der a_n mit $n \notin A$. Es könnte aber bei „großen" A-Mengen vorkommen, daß diese Voraussetzung auf keine Funktion aus R_H (möglicherweise auf keine Funktion von beschränkter Schwankung) zuträfe und somit der Satz in vacuo erfüllt wäre.

Schließlich bemerken wir noch, daß man Satz 2 im Fall der 1-dimensionalen Vektorgruppe oder der Kreisdrehungsgruppe ad hoc beweisen und dabei mit dem klassischen Kroneckerschen Satz auskommen kann, ohne durch Anwendung von Satz 1 aus dem Resultat von Hewitt und Zuckerman, das eine gruppentheoretische Verallgemeinerung des Kroneckerschen Satzes darstellt, Gebrauch zu machen.

5. Es knüpfen sich noch Probleme an. Welches sind die Elemente von R, den bei allen Homomorphismen $R \to Z$ nur Werte ihrer F-S-Transformierten oder deren Häufungspunkte entsprechen? Man kann vermuten, daß es solche Elemente auch außerhalb $R_a \dot{+} R_s$ gibt. Das allgemeine Ergebnis von Schreider, auf das früher angespielt wurde, lautet:

Jeder Homomorphismus $R \to Z$ ist von der Form

$$h(\sigma) = \int \chi_\sigma(x)\, d\sigma(x), \tag{13}$$

wo χ_σ ein „verallgemeinerter Charakter" von $R \times G$ ist. Unter einem verallgemeinerten Charakter versteht man eine in $R \times G$ erklärte Funktion, welche folgenden Bedingungen genügt:

(i) für jedes Maß $\sigma \in R$ ist $\chi_\sigma(x)$ σ-meßbar als Funktion von x,

(ii) bezeichnet σ^2 das cartesische Quadrat des Maßes σ, so gilt

$$\chi_\sigma(x+y) = \chi_\sigma(x)\cdot\chi_\sigma(y)$$

für jedes σ und alle $(x, y) \in G^2$ bis auf eine Menge $D(\sigma)$ mit $\sigma^2(D(\sigma)) = 0$,

(iii) ist σ_2 absolut stetig in bezug auf σ_1 (d. h. hat $\sum_{j=1}^{4} \sigma^{(j)}(E) = 0$ (¹) immer $\sigma_2(E) = 0$ zur Folge), so ist $\chi_{\sigma_2}(x) = \chi_{\sigma_1}(x)$ σ_2-fast überall auf G

(iv) $\operatorname{vrai}\sup_\sigma \max_x |\chi_\sigma(x)| = 1$.

Aus der Darstellung (13) folgt nun

Lemma. *Ist ein $\sigma_0 \in R$ so beschaffen, daß jeder verallgemeinerte Charakter $\chi_\sigma(x)$ für $\sigma = \sigma_0$ als Funktion von x σ_0-fast überall einem stetigen Charakter von G gleich ist, so läßt das Maß σ_0 bei allen möglichen Homomorphismen $R \to Z$ nur Werte seiner F-S-Transformierten als Bildpunkte zu.*

(¹) Siehe 1.

Ist χ eine beschränkte nach dem Haarschen Maße μ meßbare komplexe Funktion auf G, die der Bedingung $\chi(x+y) = \chi(x)\cdot\chi(y)$ μ^2-fast überall gehorcht, so gilt für je zwei absolut stetige Maße σ_1, σ_2 und deren Faltung $\psi = \sigma_1 \circ \sigma_2$

$$\int \chi(x)\, d\psi(x) = \int \chi(x)\, d\sigma_1(x) \cdot \int \chi(x)\, d\sigma_2(x)$$

(sieh z. B. [7], S. 304). Daraus schließt man, daß $\sigma \to \int \chi(x)\, d\sigma(x)$ einen Homomorphismus $R_a \to Z$ leistet. Da ein solcher Homomorphismus eine F-S-Transformierte sein muß (sieh 1), so gibt es einen *stetigen* Charakter χ_1 mit $\int \chi(x)\, d\sigma = \int \chi_1(x)\, d\sigma$ für jedes $\sigma \in R_a$, oder

$$\int [\chi(x) - \chi_1(x)] f(x)\, d\mu(x) = 0$$

für jede μ-integrierbare komplexe Funktion f. Demnach hat man $\chi(x) = \chi_1(x)$ μ-fast überall.

Offenbar gilt das insbesondere, wenn G die Kreisdrehungsgruppe und also μ das Maß von Lebesgue und χ_1 von der Form $e^{2\pi i n x}$ ist. Daraus folgt, wenn $x+y$ die Addition mod 1 bedeutet:

Eine L-meßbare Lösung der Gleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \pmod 1 \quad f.\,ü. \tag{14}$$

ist fast überall einer linearen Funktion ($y = nx$ (mod 1) *mit einem ganzen* n) *gleich.*

Zum Beweise setze man $\chi(x) = e^{2\pi i f(x)}$.

Ist G die Gruppe der reellen Zahlen, so ist dieselbe Schlußweise anwendbar; wenn also $x+y$ die gewöhnliche Addition bedeutet, so kommt

Eine L-meßbare Lösung der Gleichung (14) *ist fast überall einer linearen Funktion* ($y = \lambda x$ *mit reellem* λ) *gleich.*

Dasselbe gilt umsomehr, falls das „mod 1" in (14) weggelassen wird, was ein Gegenstück des wohlbekannten Satzes ergibt, welcher erscheint, wenn man das „fast überall" in der Voraussetzung und in der Behauptung streicht.

Das „klassische" Beispiel eines stetigen aber nicht absolut stetigen Maßes auf der Geraden ist dasjenige reguläre Maß ν, welches in jedem Intervall der Länge 1 durch die Cantorsche Treppenfunktion induziert wird. Wir fragen also, ob eine ν-meßbare Lösung der Gleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \pmod 1 \qquad \nu^2\text{-fast überall} \tag{15}$$

notwendig einer linearen Funktion mit Ausnahme einer Menge vom

ν-Maße Null gleich sein muß. Wenn es dem so ist, so sind die homomorphen Bildpunkte von ν wegen des Lemmas ausschließlich Werte der F-S-Transformierten. Wegen (iii) und der Darstellung (13) trifft das auch auf alle Maße zu, die in bezug auf ν absolut stetig sind. Wenn man ν zu einem vollständigen Maß ν^* ergänzt, d. h. $\nu^*(E) = 0$ für jede Menge E setzt, die in einer Borelschen Menge vom ν-Maße Null enthalten ist, dann scheint schon folgende Frage nicht trivial:

Wenn (15) *überall* gilt und f ν^*-meßbar ist, ist dann f ν^*-fast überall linear? Mit ν statt ν^* besteht in diesem Falle kein Problem, weil ν ein Borelsches Maß ist und demnach eine ν-meßbare Lösung von (15) auch L-meßbar und also gewiß linear ist.

Um sich die Aufgabe zu erleichtern, kann man (15) zunächst nicht mod 1, sondern im gewöhnlichen Sinn voraussetzen, dann z. B. annehmen, daß es nicht nur ν^2-fast überall, sondern für alle x und y aus einer Menge E gilt, deren Ergänzungsmenge vom ν-Maße Null ist (2).

Schreider hat ein Maß τ auf der Geraden konstruiert ([7], S. 314), dessen F-S-Transformierte überall absolut größer als eine positive Zahl ist und das trotzdem kein reziprokes hat (d. h. es gibt kein τ' mit $\tau' \circ \tau = e$). Mithin erschöpfen die Werte der F-S-Transformierten von τ nicht alle möglichen homomorphen Bilder von τ. Um das Maß τ zu erhalten, führt Schreider zuerst ein Maß $\sigma \geqslant 0$ mit $\|\sigma\| = 1$ ein, das auf der v. Neumannschen perfekten Menge konzentriert ist, auf einer Menge also, die aus lauter unabhängigen Zahlen besteht. Dann wird $\tau = i(\sigma - \sigma^*)$ mit $\sigma^*(E) = \sigma(-E)$ gesetzt. Die Eigenschaft der v. Neumannschen Menge, aus unäbhangigen Zahlen zu bestehen, ist für diese Konstruktion wesentlich. Nun ist das „Cantorsche Maß" ν in $(0, 1)$ auf der Cantorschen Menge konzentriert, auf einer Menge also, die eine gewissermaßen entgegengesetzte Eigenschaft aufweist: ihre Differenzenmenge macht das ganze Intervall $(0, 1)$ aus. Deshalb dürfte man vielleicht eine positive Antwort auf die in diesem Abschnitt gestellten Fragen erwarten.

Zitierte Schriften

[1] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[2] S. Hartman, P 230, Colloquium Mathematicum 5 (1958), S. 236-237.

[3] S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques*, Studia Math. 13 (1953), S. 296-310.

[4] E. Hewitt and H. S. Zuckerman, *A group theoretic method in approximation theory*, Annals of Mathematics 52 (1950), S. 557-567.

[5] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York 1953.

(2) Für diese Fragen siehe auch [2].

[6] Д. А. Райков, *Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров*, Труды Математического Института имени В. А. Стеклова 14, Ленинград-Москва 1945.

[7] Ю. А. Шрейдер, *Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой*, Математический Сборник 27 (69) (1950), S. 297-318.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1958