Proof. The necessity of (i) and (ii) is trivial and their sufficiency follows from the previous theorem.

References

[1] S. Banach, *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, Fundamenta Math. 16 (1930), p. 395-398.

[2] — *Théorie des opérations linéaire*, Warszawa 1932.

[3] L. S. Bosanquet and H. Kestelman, *The absolute convergence of a series of integrals*, Proc. London Math. Soc. (2) 45 (1939), p. 88-97.

[4] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Ch. IX, Paris 1948.

[5] — *Espaces Vectoriels Topologiques*, Ch. III-Ch. V, Paris 1955.

[6] W. F. Eberlein, *Closure, convexity and linearity in Banach spaces*, Annals of Math. 47 (1946), p. 688-703.

[7] I. Gelfand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, Communications de l'Institut des Sciences Math. et Mécanique de l'Université de Kharkoff 13 (1935), p. 35-40.

[8] — *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik, N. S. 4 (1938), p. 235-284.

[9] E. Hille, *Remarks concerning group spaces and vector spaces*, Compositio Math. 6 (1938-9), p. 375-381.

[10] C. Kuratowski, *Topologie I*, 2nd edition, Warszawa 1952.

[11] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. 1 (1928), p. 1-39.

[12] B. J. Pettis, *On continuity and openness of homomorphisms in topological groups*, Annals of Math. 52 (1950), p. 293-308.

BIRKBECK COLLEGE, LONDON W. C. 1

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XVIII. (1959)

Sur le problème de la division

par

S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

Le but de cet article est de démontrer un théorème qui confirme une hypothèse de L. Schwartz, selon laquelle la division d'une distribution par une fonction analytique réelle est toujours possible (cf. [10], p. 116 et [9], p. 181): *l'équation*

$$\Phi S = T$$

admet toujours une solution S, *quelles que soient la distribution* T *et la fonction analytique réelle* Φ.

Evidemment cette solution n'est pas unique (sauf le cas où $\Phi \neq 0$) et toutes les solutions de l'équation homogène ΦS sont portées par l'ensemble des zéros de Φ.

L. Schwartz a résolu ce problème (dans [9]) pour une fonction analytique de n variables complexes (considérés comme une fonction de $2n$ variables réelles).

Il résulte du théorème de L. Schwartz que l'on peut diviser par toute fonction analytique réelle de la forme

$$\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = |f(z_1, \ldots, z_n)|^2,$$

où f est une fonction holomorphe des variables $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy$.

Dans la première partie nous nous occuperons des distributions et des fonctions indéfiniment dérivables (sans faire intervenir la notion d'analycité) et nous démontrerons quelques théorèmes sur la division dans certains cas.

La deuxième partie est consacrée à la décomposition d'un ensemble analytique réel en sous-variétés. On obtient certaines propriétés de cette décomposition, qui résultent d'une inégalité de la forme

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant \varepsilon\varrho(\boldsymbol{x})$$

(où f est analytique réelle, $\varrho(x)$ désigne la distance à l'ensemble des zéros); la démonstration de cette inégalité est assez difficile, bien que, dans le cas des variables complexes, elle soit banale. Finalement nous arrivons au théorème sur la division par une fonction analytique réelle.

L'idée de la démonstration a été signalée dans une note aux Comptes Rendus [6].

Sommaire

Première partie

Pour les théorèmes fondamentaux sur les distributions nous renvoyons au livre de L. Schwartz; voir le chapitre IV, § 4 et § 5, pour ce qui concerne le problème de la division.

Rappelons quelques notations. Soit $\mathcal{E}$ la droite numérique. Nous désignerons les points de $\mathcal{E}^k$ par des minuscules grasses: $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$. On pose $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2}$. Nous appellerons *intervalle* de $\mathcal{E}^k$ tout produit de k intervalles de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{N}_0$ l'ensemble des entiers non negatifs. Nous désignerons des éléments de $\mathcal{N}_0^k$ par des minuscules grasses $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_k)$. On pose $|\boldsymbol{p}| = p_1+\ldots+p_k$, $\boldsymbol{p}! = p_1!\ldots p_k!$,

$$\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{s}} = \binom{p_1}{s_1}\ldots\binom{p_k}{s_k},$$

$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}} = x_1^{p_1}\ldots x_k^{p_k}$ (on admet $0^0 = 1$); $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$ veut dire $p_1 \leqslant q_1, \ldots, p_k \leqslant q_k$. $D^{\boldsymbol{p}}$ désigne la dérivation partielle:

$$D^{\boldsymbol{p}} = D^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial^{p_1+\ldots+p_k}}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_k^{p_k}}.$$

On a la formule de Newton,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{s}\leqslant\boldsymbol{p}}\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s}},$$

ainsi que celle de Leibnitz:

$$D^{\boldsymbol{p}}(\alpha T) = \sum_{\boldsymbol{s}\leqslant\boldsymbol{p}}\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{s}} D^{\boldsymbol{s}}\alpha D^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{s}}T$$

(T distribution, α fonction indéfiniment dérivable).

Nous désignerons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables (dans $\mathcal{E}^k$), par $\mathcal{D}_E$ le sous-ensemble des fonctions à support contenu dans E. On pose

$$\|\varphi\|_k = \max_{|\boldsymbol{p}|\leqslant k}\sup|D^{\boldsymbol{p}}\varphi| \quad \text{pour} \quad \varphi\in\mathcal{D}.$$

Si T est une distribution dans un ouvert Ω et si $\varphi\in\mathcal{D}_\Omega$, nous désignerons par (T, φ) le produit scalaire de T par φ. Nous dirons qu'une distribution T *est portée* par un ensemble A si son support fait partie de A, c'est-à-dire si $T = 0$ dans un voisinage de chaque point de $-A$.

Lemmes sur la croissance. 1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{E}^k$ et $\varrho(\boldsymbol{u})$ la distance d'un point $\boldsymbol{u}\in\Omega$ à la frontière de Ω.

LEMME [1]. *Pour tout entier $l \geqslant 0$ il existe une constante L telle que si $\varphi\in\mathcal{D}_\Omega$ et $\|\varphi\|_l \leqslant 1$, on a*

(1.1) $$|D^{\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{u})| \leqslant L\varrho(\boldsymbol{u})^{l-|\boldsymbol{r}|} \quad \textit{dans } \Omega, \textit{ lorsque } |\boldsymbol{r}| \leqslant l.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{u}$ un point quelconque de Ω et supposons que $|\boldsymbol{r}| \leqslant h$. Choisissons $\boldsymbol{v}$ de façon que l'on ait $|\boldsymbol{v}| = 1$ et que le point $\boldsymbol{u}+\varrho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$ appartienne à la frontière de Ω. Alors la fonction $\gamma(t) = D^{\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})$ s'annule identiquement dans un voisinage de $t = \varrho(\boldsymbol{u})$. Comme

$$\frac{d^{l-|\boldsymbol{r}|}}{dt^{l-|\boldsymbol{r}|}}\gamma(t) = \sum_{|\boldsymbol{s}|=l-|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}D^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}}\varphi(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}),$$

et par suite

$$\left|\frac{d^{l-|\boldsymbol{r}|}}{dt^{l-|\boldsymbol{r}|}}\gamma(t)\right| \leqslant L = \sum_{|\boldsymbol{s}|=l}1, \quad \text{on a} \quad |D^{\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{u})| = |\gamma(0)| \leqslant L\varrho(\boldsymbol{u})^{l-|\boldsymbol{r}|}, \text{ c. q. f. d.}$$

2. Désignons par $\mathcal{H}_\Omega$ l'ensemble des fonctions α indéfiniment dérivables dans Ω qui satisfont à la condition suivante: pour chaque $\boldsymbol{p}\in\mathcal{N}_0^k$ il existe une constante $M_{\boldsymbol{p}} > 0$ et un exposant $l_{\boldsymbol{p}} > 0$ tels que

(2.1) $$|D^{\boldsymbol{p}}\alpha(\boldsymbol{u})| \leqslant M_{\boldsymbol{p}}\varrho(\boldsymbol{u})^{-l_{\boldsymbol{p}}} \quad \text{dans} \quad \Omega$$

($M_{\boldsymbol{p}}$ et $l_{\boldsymbol{p}}$ dépendent de α).

On voit que la combinaison linéaire et le produit de fonctions de $\mathcal{H}_\Omega$ appartient à $\mathcal{H}_\Omega$; par conséquent $\mathcal{H}_\Omega$ est un anneau commutatif. Chaque dérivée d'une fonction de $\mathcal{H}_\Omega$ appartient à $\mathcal{H}_\Omega$. Toute fonction bornée dans Ω, ainsi que chacune de ses dérivées, appartiennent à $\mathcal{H}_\Omega$.

---

[1] L'hypothèse que Ω soit borné est superflue.

Lemme 1. *Soit $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$ une fonction bornée dans un ouvert B, ainsi que chacune de ses dérivées. Si des fonctions $\eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u})$ appartiennent à $\mathcal{H}_\Omega$ et si $(\eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u})) \epsilon B$ pour $\boldsymbol{u} \epsilon \Lambda$, la fonction composée $a(\boldsymbol{u}) = \Phi(\eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u}))$ appartient aussi à $\mathcal{H}_\Omega$.*

En effet, les dérivées de la fonction a sont de la forme

$$D^{\boldsymbol{r}} a(\boldsymbol{u}) = \sum_{\nu} A_\nu D^{\boldsymbol{s}_\nu} \Phi(\eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u})) \prod_{\varkappa} D^{\boldsymbol{p}_{\nu,\varkappa}} \eta_{i_\varkappa}(\boldsymbol{u}) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

d'où il résulte qu'elles satisfont aux inégalités de la forme (2.1).

Désignons par $\mathcal{G}_\Omega$ l'ensemble des fonctions a définies dans Ω qui satisfont à la condition suivante: il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ et un exposant $l_0 > 0$ tels que

$$|a(\boldsymbol{u})| \leqslant \varepsilon_0 \varrho(\boldsymbol{u})^{l_0} \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.2}$$

(ε_0 et l_0 dépendent de a).

Lemme 2. *Si $a \epsilon \mathcal{H}_\Omega \cap \mathcal{G}_\Omega$, la fonction $1/a(\boldsymbol{u})$ appartient à $\mathcal{H}_\Omega$.*

Ceci résulte du fait que les dérivées de la fonction $1/a(\boldsymbol{u})$ sont de la forme

$$D^{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{a(\boldsymbol{u})}\right) = \frac{1}{a(\boldsymbol{u})^{|\boldsymbol{r}|+1}} \sum_{\nu} A_\nu \prod_{\varkappa} D^{\boldsymbol{p}_{\nu,\varkappa}} a(\boldsymbol{u}) \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Lemme 3. *Supposons que $\Phi(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u})) = 0$ dans Ω, où $\Phi(\boldsymbol{u}, y)$ est une fonction bornée, ainsi que chacune des ses dérivées, dans un ouvert qui contient le graphe: $y = \eta(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} \epsilon \Omega$ d'une fonction η indéfiniment dérivable et bornée dans Ω. Si la fonction $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u}))$ appartient à $\mathcal{G}_\Omega$, la fonction η appartient à $\mathcal{H}_\Omega$.*

En effet, les dérivées de η satisfont aux identités

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u})) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u})) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u})) D^{\boldsymbol{p}} \eta(\boldsymbol{u}) + \sum_{\nu} A_\nu D^{\boldsymbol{s}_\nu} \Phi(\boldsymbol{u}, \eta(\boldsymbol{u})) \prod_{\varkappa} D^{\boldsymbol{p}_{\nu,\varkappa}} \eta(\boldsymbol{u}) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

où $|\boldsymbol{p}_{\nu,\varkappa}| \leqslant |\boldsymbol{p}|$; on en déduit, par récurrence, les inégalités de la forme (2.1).

On vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme 4. *La restriction d'une fonction de $\mathcal{H}_\Omega$ à un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ appartient à $\mathcal{H}_\Omega$. Chaque fonction de $\mathcal{H}_\Omega$ considérée comme fonction de $k+l$ variables, appartient à $\mathcal{H}_G$, quel que soit l'ouvert borné $G \subset \Omega \times \mathcal{E}^l$.*

Lemme 5. *Soit $\Phi(\boldsymbol{u}, y, \ldots, y_m, \boldsymbol{v})$ une fonction bornée dans un ouvert B, ainsi que chacune de ses dérivées, et soit G un ouvert borné contenu dans $\Omega \times \mathcal{E}^l$. Si des fonctions $\eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u})$ appartiennent à $\mathcal{H}_\Omega$ et si $(\boldsymbol{u}, \eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) \epsilon B$ lorsque $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \epsilon B$, la fonction a, définie dans G par $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \Phi(\boldsymbol{u}, \eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$, appartient à $\mathcal{H}_G$.*

En effet, d'après le lemme 4, les $u_1, \ldots, u_k, \eta_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \eta_n(\boldsymbol{u}), v_1, \ldots, v_k$, considérés comme fonctions des variables $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, appartiennent à $\mathcal{H}_G$, donc on peut appliquer le lemme 1.

Lemme 6. *Soit a une fonction de $\mathcal{H}_\Omega$ et m un entier $\geqslant 0$. Il existe alors un entier $m_1 \geqslant m$ et une constante M tels que*

$$\|a\varphi\|_m \leqslant M \|\varphi\|_{m_1} \quad \textit{pour} \quad \varphi \epsilon \mathcal{D}_\Omega. \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit $m_1 \geqslant m$ et supposons que $\varphi \epsilon \mathcal{D}_\Omega$ et $\|\varphi\|_{m_1} \leqslant 1$. D'après le lemme du N°1 et (2.1) on a alors

$$|D^{\boldsymbol{q}} a\varphi| = \Big|\sum_{\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{q}} \binom{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}} D^{\boldsymbol{r}} a D^{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}} \varphi\Big| \leqslant \sum_{\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{q}} \binom{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}} M_{\boldsymbol{r}} L \varrho(\boldsymbol{u})^{m_1 - |\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}| - l_{\boldsymbol{r}}}.$$

Si l'on prend $m_1 = m + \max_{|\boldsymbol{r}| \leqslant m} l_{\boldsymbol{r}}$, on obtient pour $|\boldsymbol{q}| \leqslant m$

$$|D^{\boldsymbol{q}} a\varphi| \leqslant M = 2^m L \max_{|\boldsymbol{r}| \leqslant m} M_{\boldsymbol{r}} [\max(1, \delta)]^{m_1},$$

où δ désigne le diamètre de Ω, c. q. f. d.

3. Soient A, B des ensembles bornés de $\mathcal{E}^k$ et Λ un compact de $\mathcal{E}^k$. Nous dirons que A et B sont *régulièrement séparés par Λ*, si (dans le cas où $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$) il existe une constante $d > 0$ et un exposant $N \geqslant 1$ (²) tels que l'on ait

$$\varrho(\boldsymbol{u}, B) \leqslant d \varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda)^N \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{u} \epsilon A, \tag{3.1}$$

ou bien si l'on a $A = 0$ ou $B = 0$ ou $\bar{A} \cap \bar{B} = 0$ (³). Cette relation est symétrique par rapport à A, B. En effet, comme $\varrho(\boldsymbol{v}, \Lambda) \leqslant \varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda) + \varrho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, le condition (3.1) implique

$$\varrho(\boldsymbol{v}, \Lambda) \leqslant \left(\frac{\varrho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{d}\right)^{1/N} + \varrho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leqslant \left(\frac{\varrho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{d_0}\right)^{1/N}$$

pour $\boldsymbol{u} \epsilon A$, $\boldsymbol{v} \epsilon B$, où d_0 est une constante suffisamment petite; mais ceci donne $\varrho(\boldsymbol{v}, A) \leqslant d_0 \varrho(\boldsymbol{v}, T)^N$ pour $\boldsymbol{v} \epsilon B$. Remarquons que la condition (3.1) entraîne

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \Lambda. \tag{3.2}$$

(²) La condition ne change pas si l'on admet $N > 0$.

(³) On peut exprimer tous ces cas par (3.1), si l'on admet que $\varrho(u, 0) \equiv 1$.

Observons encore que la séparation régulière de A et B par Λ équivaut à celle de $\bar{A}\cup\bar{\Lambda}$ et $\bar{B}\cup\bar{\Lambda}$ par $\bar{\Lambda}$.

Dans le cas où Λ est localement fermé [4] et $\Lambda=\bar{\Lambda}-\Lambda$, nous dirons que *$A$ est régulièrement séparé de B*.

LEMME. *Si A et B sont régulièrement séparés par Λ, il existe une fonction ϑ indéfiniment dérivable dans $-\Lambda$, telle que*

$$(3.3)\qquad \vartheta=\begin{cases}1 & \textit{dans un voisinage de chaque point de } A-\Lambda,\\ 0 & \textit{dans un voisinage de chaque point de } B-\Lambda\end{cases}$$

et (dans le cas où $\Lambda\neq 0$)

$$(3.4)\qquad |D^{\boldsymbol{p}}\vartheta(\boldsymbol{u})|\leqslant M_{\boldsymbol{p}}\,\varrho(\boldsymbol{u},\Lambda)^{-N|\boldsymbol{p}|}\quad \textit{lorsque}\quad \boldsymbol{u}\in-\Lambda,$$

où $M_{\boldsymbol{p}}$ sont des constantes. Alors la restriction de ϑ à $\Omega-\Lambda$ appartient à $\mathcal{H}_{\Omega-\Lambda}$, quel que soit l'ouvert borné Ω [5].

Démonstration. Nous procédons en suivant une idée de A. Bielecki ([2], p. 5-6). Le cas où $A=0$ resp. $B=0$ étant banal, supposons que $A\neq 0$ et $B\neq 0$. Soit β une fonction de $\mathcal{D}_{|\boldsymbol{u}|>1}$ telle que $\int\beta(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}=1$. Posons

$$\beta_\lambda(\boldsymbol{u})=\frac{1}{\lambda^k}\beta\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\lambda}\right).$$

Si $\Lambda=0$, on a $\varrho(A,B)>0$. Alors il suffit de prendre $\vartheta=\beta_\delta*\chi$, où $\delta=\frac{1}{3}\varrho(A,B)$ et χ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $\boldsymbol{u}$ vérifiant $\varrho(\boldsymbol{u},A)<\delta$.

Supposons que $\Lambda\neq 0$. Pour chaque $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ désignons par A_ε l'ensemble des points $\boldsymbol{u}\in A$ pour lesquels $\varrho(\boldsymbol{u},\Lambda)\geqslant\varepsilon$ et par $H_{\varepsilon,\delta}$ l'ensemble des points $\boldsymbol{u}$ vérifiant $\varrho(\boldsymbol{u},A_\varepsilon)<\delta$ (si $A=0$, nous posons $H_{\varepsilon,\delta}=0$).

On a d'abord

$$(3.5)\qquad B\cap\bar{H}_{\varepsilon,\delta}=0,\quad \text{si}\quad \delta<d\varepsilon^N.$$

En effet supposons que $\boldsymbol{u}\in B$ et $\boldsymbol{v}\in H_{\varepsilon,\delta}$; on a alors $\varrho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})<\delta$ pour un certain $\boldsymbol{a}\in A$, où $\varrho(\boldsymbol{a},\Lambda)\geqslant\varepsilon$; selon (3.2) il vient $\varrho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})\geqslant d\varrho(\boldsymbol{a},\Lambda)^N\geqslant d\varepsilon^N$, d'où $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant d\varepsilon^N-\delta$. Il en résulte que $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant d\varepsilon_N-\delta>0$ pour $\boldsymbol{u}\in B$ et $\boldsymbol{v}\in\bar{H}_{\varepsilon,\delta}$.

---

[4] Cela veut dire que pour chaque $\boldsymbol{u}\in\Lambda$ il existe une sphère fermée K telle que $\Lambda\cap K$ soit fermé ou, ce qui revient au même que $\bar{\Lambda}-\Lambda$ soit fermé (cf. [5], p. 70-72).

[5] Il existe un théorème réciproque; cf. les équivalences du N°5.

Nous disons que l'on a

$$(3.6)\qquad H_{\varepsilon,\delta}\cap H_{\varepsilon'',\delta''}\subset H_{\varepsilon',\delta'}\quad \text{pourvu que}\quad \delta+\delta''\leqslant\varepsilon-\varepsilon'\ \text{et}\ \delta''\leqslant\delta'.$$

En effet supposons que $\boldsymbol{u}\in H_{\varepsilon,\delta}\cap H_{\varepsilon'',\delta''}$; on a alors $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a})<\delta$ et $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}'')<\delta''$, pour certains $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}''\in A$, où $\varrho(\boldsymbol{a},\Lambda)\geqslant\varepsilon$; il s'ensuit que $\varrho(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'')<\delta+\delta''\leqslant\varepsilon-\varepsilon'$ et par conséquent $\varrho(\boldsymbol{a}'',\Lambda)\geqslant\varepsilon-(\varepsilon-\varepsilon')=\varepsilon'$, d'où $\boldsymbol{a}''\in A_{\varepsilon'}$; comme $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}'')<\delta''\leqslant\delta'$, on a donc $\boldsymbol{u}\in H_{\varepsilon',\delta'}$.

Montrons ensuite que

$$(3.7)\qquad \varrho(\boldsymbol{u},\Lambda)<\varepsilon+\delta'\quad \text{pour}\quad \boldsymbol{u}\in H_{\varepsilon',\delta'}-H_{\varepsilon,\delta},\quad \text{lorsque}\quad \delta'\leqslant\delta.$$

En effet, on a alors $\varrho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}')<\delta'$ pour un certain $\boldsymbol{p}'\in A$, et $\varrho(\boldsymbol{u},A)_\varepsilon\geqslant\delta$; il en résulte que $\varrho(\boldsymbol{a}',A_\varepsilon)>\delta-\delta'\geqslant 0$, donc $\boldsymbol{a}'\in A_\varepsilon$ et par suite $\varrho(\boldsymbol{a}',\Lambda)<\varepsilon$, d'où $\varrho(\boldsymbol{u},\Lambda)<\varepsilon+\delta'$.

Montrons enfin que

$$(3.8)\qquad \bar{\Lambda}\cup\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\bar{H}_{\varepsilon_\nu,\delta_\nu}\ \text{est fermé, pourvu que}\ \varepsilon_\nu\to 0\ \text{et}\ \delta_\nu\to 0.$$

En effet, supposons que $\boldsymbol{u}_n\in\Lambda\cup\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\bar{H}_{\varepsilon_\nu,\delta_\nu}$ et $\boldsymbol{u}_n\to\boldsymbol{u}$. Il suffit de considérer le cas où chacun des ensembles $\bar{\Lambda}$, $\bar{H}_{\varepsilon_\nu,\delta_\nu}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ne contient qu'un nombre fini de $\boldsymbol{u}_n$. Mais, on a alors $\varrho(\boldsymbol{u}_n,\Lambda)\to 0$ et par suite $\boldsymbol{u}\in\bar{\Lambda}$.

Soit $\chi_{\varepsilon,\delta}(\boldsymbol{u})$ la fonction caractéristique de $H_{\varepsilon,\delta}$. Posons

$$\vartheta_{\varepsilon,\delta}=1-\beta_{\delta/4}*\chi_{\varepsilon,3\delta/4}.$$

Comme la sphère $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|<\delta/4$ est contenue dans $H_{\varepsilon,3\delta/4}$ lorsque $\boldsymbol{u}_0\in H_{\varepsilon,\delta/2}$, resp. dans $-H_{\varepsilon,3\delta/4}$ lorsque $\boldsymbol{u}_0\in-H_{\varepsilon,\delta}$, on voit que

$$(3.9)\qquad \vartheta_{\varepsilon,\delta}(\boldsymbol{u})=\begin{cases}0 & \text{dans}\quad H_{\varepsilon,\delta/2},\\ 1 & \text{dans}\quad -H_{\varepsilon,\delta}.\end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$(3.10)\qquad |D^{\boldsymbol{p}}\vartheta_{\varepsilon,\delta}(\boldsymbol{u})|\leqslant\bar{M}_{\boldsymbol{p}}\,\delta^{-|\boldsymbol{p}|},$$

où $\bar{M}_{\boldsymbol{p}}=\int|D^{\boldsymbol{p}}\beta(u)|du$ ne dépend pas de ε, δ.

Posons

$$(3.11)\qquad \varepsilon_\nu=\frac{1}{3^\nu},\qquad \delta_\nu=\min\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}d\right)\varepsilon_\nu^N\qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

et

$$(3.12)\qquad \vartheta(\boldsymbol{u})=1-\prod_{\nu=1}^{\infty}\vartheta_{\varepsilon_\nu,\delta_\nu}(\boldsymbol{u}).$$

Il résulte de (3.9) que $\vartheta(\boldsymbol{u}) \equiv 1$ dans l'ouvert

$$G_1 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} H_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu/2}$$

qui contient l'ensemble $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = A - \Lambda$. Pareillement on déduit de (3.9) que $\vartheta(\boldsymbol{u}) \equiv 0$ dans l'ensemble

$$G_0 = -(\bar{\Lambda} \cup \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{H}_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu}),$$

qui est ouvert en vertu de (3.8) et contient l'ensemble $B - \Lambda$, car on a, d'après (3.5) et (3.11), $B \subset -\bar{H}_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et, d'après (3.2), $B - \Lambda \subset -\bar{\Lambda}$.

Il reste à prouver les inégalités (3.4). A cet effet supposons que $\boldsymbol{u} \in -\Lambda$. Evidemment il suffit de considérer le cas où $\boldsymbol{u} \in (-G_0) \cap (-G_1)$. On a alors

$$\boldsymbol{u} \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{H}_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu} - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} H_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu/2}. \tag{3.13}$$

Soit k le plus petit indice pour lequel $\boldsymbol{u} \in \bar{H}_{\varepsilon_k, \delta_k}$. Si $j > k+1$, on a, d'après (3.11), $\delta_k + \delta_j \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$ et $\delta_j \leqslant \delta_{k+1}/3$, donc, conformément à (3.6), $\bar{H}_{\varepsilon_k, \delta_k} \cap \bar{H}_{\varepsilon_j, \delta_j} \subset \bar{H}_{\varepsilon_{k+1} \delta_{k+1}/3} \subset H_{\varepsilon_{k+1}, \delta_{k+1}/2}$, ce qui montre (cf. (3.13)) que $\boldsymbol{u} \notin \bar{H}_{\varepsilon_j, \delta_j}$. Ainsi $\boldsymbol{u}$ appartient à l'ensemble $-(\bar{\Lambda} \cup \bigcup\limits_{\nu \neq k, \nu \neq k+1} \bar{H}_{\varepsilon_\nu, \delta_\nu})$, qui est ouvert en vertu de (3.8) et dans lequel (cf. (3.9) et (3.12)) $\vartheta(\boldsymbol{u}) = 1 - \vartheta_{\varepsilon_k, \delta_k}(\boldsymbol{u})\vartheta_{\varepsilon_{k+1}, \delta_{k+1}}(\boldsymbol{u})$. Grâce à (3.10) nous avons donc

$$|D^p \vartheta(\boldsymbol{u})| \leqslant (2^{|\boldsymbol{p}|} \max_{r \leqslant p} M_r)\delta_{k+1}^{-|\boldsymbol{p}|}, \tag{3.14}$$

lorsque $|\boldsymbol{p}| > 0$ (dans le cas où $\boldsymbol{p} = 0$, on a $|\vartheta(\boldsymbol{u})| \leqslant 1$). D'autre part, si $k > 1$, on a (cf. (3.13)) $\boldsymbol{u} \in \bar{H}_{\varepsilon_k, \delta_k} - H_{\varepsilon_{k-1}, \delta_{k-1/2}}$ et (cf. (3.11)) $\delta_k = \delta_{k-1}/3^N \leqslant \delta_{k-1}/2$, d'où il résulte, selon (3.7), que $\varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda) \leqslant \varepsilon_{k-1} + \delta_k \leqslant 12\varepsilon_{k+1}$. Ainsi on a toujours $\varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda) \leqslant (12 + \delta_0)\varepsilon_{k+1}$, où $\delta_0 = \sup\limits_{u \in \Lambda} \varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda)$, donc

$$\delta_{k+1} = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{d}{2}\right) \varepsilon_{k+1} N \geqslant (12 + 2\delta_0)^{-N} \min\left(\frac{1}{3}, \frac{d}{2}\right) \varrho(\boldsymbol{u}, \Lambda)^N.$$

En comparant avec (3.14), nous voyons que les inégalités (3.4) ont bien lieu, ce qui termine la démonstration.

4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{E}^k$. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(\boldsymbol{u})$ *satisfait à la condition* (H) *dans* Ω, s'il existe une constante $C > 0$ et un exposant $\sigma > 0$ tels que

$$|\varphi(\boldsymbol{u}_2) - \varphi(\boldsymbol{u}_1)| \leqslant C|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1|^\sigma,$$

pourvu que le segment d'extrémités $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ soit contenu dans Ω.

Soit Γ une sous-variété bornée de $\mathcal{E}^n$ donnée par

$$x_{k+1} = \eta_{k+1}(\boldsymbol{u}), \ \ldots, \ x_n = \eta_n(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega,$$

ou bien, si l'on pose $\boldsymbol{v} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ et $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{n+1}, \ldots, \eta_n)$, par l'équation

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} \in \Omega, \tag{4.1}$$

où $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ sont des fonctions continues dans Ω. Soit $\varrho(\boldsymbol{u})$ la distance d'un point $u \in \Omega$ à la frontière de Ω. Posons $\Lambda = \bar{\Gamma} - \Gamma$.

LEMME 1. *Si les fonctions* $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ *satisfont à la condition* (H) *dans* Ω, *il existe une constante* $C > 0$ *et un exposant* $\sigma > 0$ *tels que*

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leqslant C\varrho(\boldsymbol{u})^\sigma, \quad \textit{lorsque} \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})) \ \textit{et} \ \boldsymbol{u} \in \Omega.$$

Démonstration. Il existe une constante $C_1 > 0$ et un exposant $\sigma_1 > 0$ tels que $|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}_1)| \leqslant C_1|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1|^{\sigma_1}$, pourvu que le segment d'extrémités $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ soit contenu dans Ω. Soit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}))$, où $\boldsymbol{u} \in \Omega$. Il existe un point $\tilde{\boldsymbol{u}}$ de la frontière de Ω tel que $|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}| = \varrho(u)$; alors $\boldsymbol{\eta}(u')$ admet la limite $\tilde{\boldsymbol{v}}$ lorsque $\boldsymbol{u}' \to \tilde{\boldsymbol{u}}$ suivant le segment d'extrémités $\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}$, et on a $|\tilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})| \leqslant C_1|\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}|^{\sigma_1} = C_1\varrho(\boldsymbol{u})^{\sigma_1}$; on voit que $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) \in \Lambda$. Comme $|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}| \leqslant |\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}| + |\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}) - \tilde{\boldsymbol{v}}| \leqslant \varrho(\boldsymbol{u}) + C_1\varrho(\boldsymbol{u})^{\sigma_1} \leqslant C\varrho(\boldsymbol{u})^\sigma$, où $C > 0$ et $\sigma > 0$ ne dépendent pas de $\boldsymbol{x}$, nous obtenons donc $\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda) \leqslant C\varrho(\boldsymbol{u})^\sigma$, c. q. f. d.

Nous dirons que Γ *jouit de la propriété* (R) *par rapport à un ensemble* E *de* $\mathcal{E}^n$, s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un exposant $q > 0$ tels que l'intersection de E avec l'ensemble des $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

$$B\colon |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})| < \varepsilon\varrho(\boldsymbol{u})^q, \quad \boldsymbol{u} \in \Omega, \tag{4.2}$$

coïncide avec Γ.

Comme Γ est localement fermé l'ensemble $\Lambda = \bar{\Gamma} - \Gamma$ est fermé. Passons au

LEMME 2. *Si les fonctions* $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ *satisfont à la condition* (H) *dans* Ω *et si* Γ *jouit de la propriété* (R) *par rapport à un ensemble borné* E, Γ *est régulièrement séparé de* $E - \Gamma$.

Démonstration. D'après les hypothèses nous avons

$$E - \Gamma \subset -B \tag{4.3}$$

(où B est donné par (4.2)) et il existe une constante $C > 0$ et un exposant $\sigma > 0$ tels que $|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}_1)| \leqslant C|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1|^\sigma$, pourvu que le segment d'extrémités $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ soit contenu dans Ω.

Soit $\boldsymbol{x} \in \Gamma$; on a donc $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}))$, où $\boldsymbol{u} \in \Omega$. Supposons que $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}| < \frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u})$, où $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$; on a alors $\boldsymbol{u}' \in \Omega$ et $\varrho(\boldsymbol{u}') \geqslant \frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u})$; comme

$$|\boldsymbol{v}'-\eta(\boldsymbol{u}')| \leqslant |\boldsymbol{v}'-\eta(\boldsymbol{u})|+|\eta(\boldsymbol{u})-\eta(\boldsymbol{u}')| \leqslant |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|+C|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^{\sigma} \leqslant C'|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^{\sigma'}$$

où $C' > 0$ et $\sigma' > 0$ ne dépendent pas de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$, nous avons $\boldsymbol{x}' \in B$, pourvu que $C'|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^{\sigma_1} \leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u})\right)^{q}$. Il s'ensuit que l'on a toujours $\boldsymbol{x}' \in B$, pourvu que

$$|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}| \leqslant \min\left(\tfrac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u}),\, (\varepsilon/2^{q}C')^{1/\sigma'}\varrho(\boldsymbol{u})^{q/\sigma'}\right) \geqslant \varepsilon_0\varrho(\boldsymbol{u})^{q_0},$$

où $\varepsilon_0 > 0$ et $q_0 > 0$ ne dépendent pas de x, x', ce qui donne $\varrho(x, E-\Gamma) \geqslant \varepsilon_0\varrho(\boldsymbol{u})^{q_0}$ en vertu de (4.3). D'après le lemme 1, il en résulte l'inégalité qui prouve que Γ est régulièrement séparé de $E-\Gamma$.

Remarque. Si l'on prend, au lieu de B, l'ensemble des $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

$$B_1\colon\ |x_{k+1}-\eta_{k+1}(\boldsymbol{u})| < \varepsilon(\boldsymbol{u}),\ \ldots,\ |x_n-\eta_n(\boldsymbol{u})| < \varepsilon(\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{u} \in \Omega,$$

et si $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}_\Omega$ et $\varepsilon \in \mathcal{G}_\Omega \cap \mathcal{H}_\Omega$, la construction de la fonction ϑ du lemme du N° 3 est beaucoup plus simple. On prend alors

$$\vartheta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} \gamma\left(\frac{x_i-\eta_i(\boldsymbol{u})}{\varepsilon(\boldsymbol{u})}\right) & \text{lorsque} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega, \\ 0 & \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in -\overline{B}_1, \end{cases}$$

où γ est une fonction de $\mathcal{D}_{(-1,1)}$ telle que $\gamma \equiv 1$ dans $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Distributions prolongeables. 5. Soit Ω un ouvert de $\mathcal{E}^k$. Appelons $\mathcal{P}'_\Omega$ l'ensemble des distributions dans Ω qui sont prolongeables sur $\mathcal{E}^k$. On voit que $\mathcal{P}'_\Omega$ est un espace linéaire; chaque dérivée d'une distribution de $\mathcal{P}'_\Omega$ appartient à $\mathcal{P}'_\Omega$; quel que soit l'ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$, la restriction à Ω_0 d'une distribution de $\mathcal{P}'_\Omega$ appartient à $\mathcal{P}'_\Omega$.

PROPOSITION 1. *Afin que $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ il faut et il suffit que la restriction de T à $\mathcal{P}'_{\Omega_0}$ appartienne à $\mathcal{P}'_{\Omega_0}$ quel que soit l'ouvert borné $\Omega_0 \subset \Omega$.*

Démonstration. La condition étant évidemment nécessaire, il suffira de prouver qu'elle est suffisante. Il existe un recouvrement localement fini de $\mathcal{E}^k$ par des ouverts bornés Ω_ν et des fonctions $\alpha_\nu \in \mathcal{D}_{\Omega_\nu}$ telles que $\sum_\nu \alpha_\nu(\boldsymbol{u}) \equiv 1$ (cf. [10], p. 22-23). Soit T_ν un prolongement (sur $\mathcal{E}^k$) de la restriction de T à $\Omega_\nu \cap \Omega$ (on prend $T_\nu = 0$ lorsque $\Omega_\nu \cap \Omega = 0$). Comme $\alpha_\nu T_\nu = \alpha_\nu T$ dans Ω, on a $\sum_\nu \alpha_\nu T_\nu = \sum_\nu \alpha_\nu T = T$ dans Ω, où la distribution $\sum_\nu \alpha_\nu T_\nu$ est définie dans $\mathcal{E}^k$.

Nous supposerons dans la suite que Ω est un ouvert *borné* de $\mathcal{E}^k$.

PROPOSITION 2. *Afin que $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ il faut et il suffit qu'il existe une constante $M > 0$ et un entier $m > 0$ tels que*

$$|(T, \varphi)| \leqslant M\|\varphi\|_m \quad \textit{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}_\Omega. \tag{5.1}$$

La condition est nécessaire d'après [10], p. 85, et elle est suffisante en vertu du théorème de Hahn-Banach.

Il résulte de la proposition 2 que si T est une distribution dans un ouvert qui contient $\overline{\Omega}$, alors la restriction de T à Ω appartient à $\mathcal{P}'_\Omega$. Remarquons encore que toute distribution $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ admet un prolongement porté par $\overline{\Omega}$ (en effet, il suffit de prendre un prolongement de la distribution T_0 donnée par $T_0 = T$ dans Ω et $T_0 = 0$ dans $-\overline{\Omega}$).

Le lemme 6 du N° 2 et la proposition 2 entraînent:

PROPOSITION 3. *Si $a \in \mathcal{H}_\Omega$ et $T \in \mathcal{P}'_\Omega$, alors $aT \in \mathcal{P}'_\Omega$.*

PROPOSITION 4. *Soit T une distribution de $\mathcal{P}'_\Omega$, portée par un ensemble $E \subset \Omega$ et soit $A \subset \Omega$ un ensemble localement fermé, régulièrement séparé de $E-A$. Alors il existe une distribution T_0 de $\mathcal{P}'_\Omega$, portée par $\overline{A}$, et telle que $T_0 = T$ dans un voisinage de chaque point de A.*

Démonstration. Posons $\Lambda = \overline{A}-A$. On a $\overline{\Lambda} = \Lambda$. Grâce au lemme du N° 3, il existe une fonction $\vartheta \in \mathcal{H}_{\Omega-\Lambda}$ telle que $\vartheta \equiv 1$ dans un voisinage de chaque point de A et $\vartheta \equiv 0$ dans un voisinage de chaque point de $E-\overline{A}$. Or, selon la proposition 3, la distribution ϑT définie dans $\Omega-\Lambda$ appartient à $\mathcal{P}'_{\Omega-\Lambda}$ et par conséquent on peut la prolonger sur $\mathcal{E}^k$. Nous obtenons ainsi une distribution $T_0 \in \mathcal{P}'_\Omega$ telle que $T_0 = \vartheta T$ dans $\Omega-\Lambda$ et, par suite, on a $T_0 = 0$ dans un voisinage de chaque point de $(\Omega-\Lambda-E) \cup \left((\Omega-\Lambda) \cap (E-\overline{A})\right) \supset \Omega-\overline{A}$ et $T_0 = T$ dans un voisinage de chaque point de A, c. q. f. d.

L'hypothèse de le separation régulière est essentielle. Nous avons en effet *l'équivalence* des propriétés suivantes:

(a) *A et B sont régulièrement séparés par Λ;*

(b) *la conclusion du lemme du N° 3;*

(c) *$A \cap B \subset \Lambda$ et pour toute distribution T portée par $A \cup B$, il existe une distribution portée par $A \cup \Lambda$ telle que $T_1 = T$ dans un voisinage de chaque point de $A-\Lambda$; pourvu que A, B soient bornés et Λ soit compact.*

En effet, (a) entraîne (b), conformément au lemme du N° 3.

(b) entraîne (c). La démonstration est analogue à celle de la proposition 4; ϑ étant la fonction du lemme du N° 3, on prend pour T_1 un prolongement de ϑT (en vertu de la proposition 3, où Ω est un ouvert qui contient $\overline{A} \cup \overline{B}$).

(c) entraîne (a). Montrons d'abord que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \Lambda$. Dans le cas contraire, il existerait des suites $\boldsymbol{u}_n \in A-\Lambda$, $\boldsymbol{v}_n \in B-\Lambda$ telles que $\lim \boldsymbol{u}_n = a = \lim \boldsymbol{v}_n \notin \Lambda$. Prenons pour T la distribution

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)+\delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_n)\right)$$

et désignons par C le support de T_1. On aurait $\boldsymbol{u}_n \in C$ et $C \subset A \cup \Lambda$, d'où $\boldsymbol{a} \in A-\Lambda$. Par conséquent nous aurions $T_1 = T$ dans un voisinage de $\boldsymbol{a}$, d'où $\boldsymbol{v}_n \in C$ et par suite

$\boldsymbol{v}_n \in (A \frown B) - A$ (pourvu que n soit suffisamment grand) contrairement à l'inclusion $A \frown B \subset A$.

Supposons, par l'impossible, que A et B ne soient pas régulièrement séparés par A et soit K un nombre tel que $K > 1$ et $\varrho(\boldsymbol{u}, A) < \frac{1}{2}K$ pour $\boldsymbol{u} \in A$. On a donc $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \neq 0$ et il existe un $\bar{\boldsymbol{u}}_n \in A$ et $\bar{\boldsymbol{v}}_n \in B$ tels que $|\bar{\boldsymbol{v}}_n - \bar{\boldsymbol{u}}_n| < (\varrho(\bar{\boldsymbol{u}}_n, A)/K)^n$, quel que soit l'entier n; on a alors $\bar{\boldsymbol{u}}_n \neq \bar{\boldsymbol{v}}_n$. On en tire: $|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{u}_n| \to 0$ et nous avons $\boldsymbol{u}_n = \bar{\boldsymbol{u}}_{a_n} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}_n = \bar{\boldsymbol{v}}_{a_n} \to \boldsymbol{a}$ pour un couple de suites extraites convenablement choisi; par conséquent $\boldsymbol{a} \in A$, $\varrho(\boldsymbol{u}_n, A) \to 0$ et nous pouvons exiger que l'on ait $\varrho(\boldsymbol{u}_{n+1}, A) < \frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u}_n, A)$. Il en résulte que la sphère B_n: $|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n| < \frac{1}{2}\varrho(\boldsymbol{u}_n, A)$ ne contient alors aucun des $\boldsymbol{u}_k$ avec $k \neq n$, et $B_n \frown A = 0$. Prenons pour T la distribution

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K^{a_n}} \cdot \frac{\delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n) - \delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_n)}{|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{v}_n|};$$

on a alors

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n)}{K^{a_n}|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{v}_n|}$$

dans $-A$, donc

$$(T_1, \varphi) = \frac{\varphi(\boldsymbol{u}_n)}{K^{a_n}|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{v}_n|} \quad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{B_n}.$$

Soit q l'ordre de T_1 et posons

$$\varphi_n(\boldsymbol{u}) = \varrho(\boldsymbol{u}_n, A)^q \beta\left(\frac{2(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n)}{\varrho(\boldsymbol{u}_n, A)}\right),$$

où $\beta(\boldsymbol{u})$ est une fonction de $\mathcal{D}_{|\boldsymbol{u}|<1}$ telle que $\beta(0, 0) = 1$. Nous avons donc $\|\varphi_n\|_q \geqslant M$, où M ne dépend pas de n, et

$$(T_1, \varphi_n) = \frac{\varrho(\boldsymbol{u}_n, A)^q}{K^{a_n}|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{v}_n|} > \frac{1}{\varrho(\boldsymbol{u}_n, A)^{a_n - q}} \to \infty,$$

ce qui est absurde.

Il en résulte:

Proposition 5. *Soient A_1, A_2 des compacts de $\mathcal{E}^k$. Pour que toute distribution T portée par $A_1 \smile A_2$ admette une décomposition $T = T_1 + T_2$, où T_i soit portée par A_i, ($i = 1, 2$), il faut et il suffit que A_1 et A_2 soient régulièrement séparés par $A_1 \frown A_2$* [6].

Proposition 6. *Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts bornés de $\mathcal{E}^k$. Désignons par F_1, F_2 et F les frontières de Ω_1, Ω_2 et $\Omega_1 \smile \Omega_2$. Pour que toute distribution définie dans $\Omega_1 \smile \Omega_2$, dont la restriction à Ω_i appartient à $\mathcal{P}'_{\Omega_i}$ ($i = 1, 2$), soit dans $\mathcal{P}'_{\Omega_1 \smile \Omega_2}$, il faut et il suffit que F_1 et F_2 soient régulièrement séparés par F.*

Démonstration. Remarquons d'abord que la séparation régulière de F_1 et F_2 par F équivaut à celle de $F_1 \smile F$ et $F_2 \smile F$ par F. Prouvons que la condition est nécessaire. Soit T une distribution portée par $F_1 \smile F_2 \smile F$. Or, la distribution T_0 définie dans $\Omega_1 \smile \Omega_2$ par $T_0 = 0$ dans Ω_1 et $T_0 = T$ dans Ω_2, appartient à $\mathcal{P}'_{\Omega_1 \smile \Omega_2}$ (puisque sa restriction à Ω_i est dans $\mathcal{P}'_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$). Soit T_1 son prolongement porté par $\overline{\Omega_1 \smile \Omega_2}$; on voit que T_1 est portée par $F_1 \smile F$. Comme on a $T_1 = T$ dans Ω_2, $T_2 = T - T_1$ est portée par $F_2 \smile F$. Par conséquent la proposition 5 montre que $F_1 \smile F$ et $F_2 \smile F$ sont régulièrement séparés par F.

Supposons maintenant que la condition soit remplie; $F_1 \smile F$ et $F_2 \smile F$ sont donc régulièrement séparés par F. Soit T une distribution dans $\Omega_1 \smile \Omega_2$, dont la restriction à Ω_i appartient à $\mathcal{P}'_{\Omega_i}$ ($i = 1, 2$). A tout ouvert Ω, tel que $\Omega \subset \Omega_1$ ou $\Omega \subset \Omega_2$, faisons correspondre un prolongement T_Ω de la restriction de T à Ω, de façon que T_Ω soit portée par $\bar{\Omega}$. Comme les distributions $T_{\Omega_1} - T_{\Omega_1 - \bar{\Omega}_2} - T_{\Omega_1 \frown \Omega_2}$ et $T_{\Omega_2} - T_{\Omega_2 - \bar{\Omega}_1} - T_{\Omega_1 \frown \Omega_2}$ sont portées par $F_1 \smile F_2 \smile F$, elles admettent des décompositions $T_{\Omega_1} - T_{\Omega_1 - \bar{\Omega}_2} - T_{\Omega_1 \frown \Omega_2} = S_1 + S_1^*$ et $T_{\Omega_2} - T_{\Omega_2 - \bar{\Omega}_1} - T_{\Omega_1 \frown \Omega_2} = S_2 + S_2^*$, où S_1, S_2^* sont portées par $F_2 \smile F$ et S_1^*, S_2 sont portées par $F_1 \smile F$. On vérifie que $T = T_{\Omega_1 - \bar{\Omega}_2} + S_1 + T_{\Omega_1 \frown \Omega_2} + S_2 + T_{\Omega_2 - \bar{\Omega}_1}$ dans $\Omega_1 \smile \Omega_2$, ce qui montre que $T \in \mathcal{P}'_{\Omega_1 \smile \Omega_2}$.

---

[6] Cf. [10], p. 98-100; l'hypothèse de la séparation régulière est remplie pourvu que l'ensemble $A \smile B$ soit régulier.

Un cas de division d'une distribution portée par une sous-variété. 6. Soit X un module unitaire sur un anneau commutatif A (avec un élément unité 1) (cf. [4], p. 1-3). Soit $a \in A$; nous dirons que a est un *diviseur* (par rapport à X) si l'équation $ax = b$ admet toujours une solution $x \in X$, quel que soit $b \in X$; que a est un *élément régulier* (par rapport à X), si $ax = 0$ entraîne $x = 0$ ($x \in X$).

Considérons le système d'équations

$$\sum_j a_j x_{i+j} = b_i \tag{6.1}$$

($i, j = 0, 1, \ldots$), où $a_i \in A$, $x_i \in X$, $b_i \in X$ et x_i, b_i sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Si l'on a $x_i = b = 0$ pour $i > m$ et $a_i = 0$ pour $i < l$, le système (6.1) s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} a_l x_l + \ldots + a_m x_m &= b_0, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_l x_{m-1} + a_{l+1} x_m &= b_{m-l-1}, \\ a_l x_m &= b_{m-l}. \end{aligned}$$

Nous voyons que si a_l est un diviseur, on peut résoudre ces équations (par rapport à x_i) de proche en proche et nous arrivons au lemme suivant:

Lemme 1. *Si $a_i = 0$ pour $i < l$ et si a_l est un diviseur, le système* (6.1) *admet une solution, quels que soient b_i.*

Posons

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = a_{l+1}, \quad \ldots, \quad \beta_i = \begin{vmatrix} a_{l+1} & \cdots & a_{l+i} \\ a_l & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & a_l & a_{l+1} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

En s'appuyant sur l'égalité

$$\beta_k + \sum_{i=1}^{k} a_{l+i} a_l^{i-1} \beta_{k-i} = 0 \qquad (k > 0),$$

on montre que dans les hypothèses du lemme 1 la *solution générale du système homogène* $(b_j = 0)$ est donnée par

$$(6.2) \qquad \begin{cases} x_0, \ldots, x_{l-1} & \text{quelconques,} \\ x_{l+1} = \sum_j a_l^i \beta_j u_{i+j}, & \text{où} \quad a_l^{j+1} u_j = 0 \text{ et } u_i \text{ sont nuls sauf pour un} \\ & \text{nombre fini d'indices } (i, j = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Considérons maintenant le système

$$(6.3) \qquad \sum_{\boldsymbol{q}} a_{\boldsymbol{q}} x_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} = b_{\boldsymbol{q}}$$

$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{N}_0^k)$, où $a_{\boldsymbol{p}} \in A$, $x_{\boldsymbol{p}} \in X$, $b_{\boldsymbol{p}} \in X$ et $x_{\boldsymbol{p}}$, $b_{\boldsymbol{p}}$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Introduisons dans $\mathfrak{N}_0^k$ la relation d'ordre lexicographique:

$$(6.4) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{p} \precsim \boldsymbol{q} \text{ veut dire: il existe un } \sigma \text{ tel que} \\ p_\nu = q_\nu \text{ si } \nu < \sigma, \text{ et } p_\sigma < q_\sigma. \end{cases}$$

Cette relation étant un bon ordre, il existe le plus petit indice $\boldsymbol{p}^*$ pour lequel $a_{\boldsymbol{p}^*} \neq 0$, sauf le cas où tous les $a_{\boldsymbol{p}}$ sont nuls.

LEMME 2. *Si $a_{\boldsymbol{p}^*}$ est un diviseur, le système* (6.3) *admet une solution, quels que soient $b_{\boldsymbol{p}}$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur k. Selon le lemme 1 l'assertion est vraie pour $k = 1$. Supposons la vraie pour $k-1$.

Soit A^* l'anneau commutatif des suites $\{a_{\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^{k-1}}$, où $a_{\bar{\boldsymbol{p}}} \in A$, la multiplication $\{\gamma_{\bar{\boldsymbol{p}}}\} = \{a_{\bar{\boldsymbol{p}}}\}\{\beta_{\bar{\boldsymbol{p}}}\}$ étant definie par $\gamma_{\bar{\boldsymbol{p}}} = \sum_{\bar{\boldsymbol{s}} \leqslant \bar{\boldsymbol{p}}} a_{\bar{\boldsymbol{s}}} \beta_{\bar{\boldsymbol{p}}-\bar{\boldsymbol{s}}}$ (anneau des séries formelles). On vérifie que l'ensemble X^* des suites $\{x_{\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^{k-1}}$, où $x_{\bar{\boldsymbol{p}}} \in X$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices, est un module unitaire sur A^*, si l'on définit la multiplication externe par $z_{\bar{\boldsymbol{p}}} = \sum_{\bar{\boldsymbol{q}}} a_{\bar{\boldsymbol{q}}} x_{\bar{\boldsymbol{p}}+\bar{\boldsymbol{q}}}$.

En posant $\boldsymbol{p} = (i\bar{\boldsymbol{p}},)$, $\boldsymbol{q} = (j\bar{\boldsymbol{q}},)$, où $i, j \in \mathfrak{N}_0$ et $\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}} \in \mathfrak{N}_0^{k-1}$, le système (6.3) s'écrit

$$\sum_j \Big(\sum_{\bar{\boldsymbol{q}}} a_{j,\bar{\boldsymbol{q}}} x_{i+j,\bar{\boldsymbol{p}}+\bar{\boldsymbol{q}}} \Big) = b_{i,\bar{\boldsymbol{p}}},$$

ou bien

$$(6.5) \qquad \sum_j \bar{a}_j \bar{x}_{i+j} = \bar{b}_i,$$

où $\bar{a}_j = \{a_{j,\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^k} \in A^*$, $\bar{x}_i = \{x_{i,\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^k} \in X^*$, $\bar{b}_i = \{b_{i,\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^k} \in X^*$. Posons $\boldsymbol{p}^* = (i^*, \boldsymbol{p}^*)$. On a alors $a_{i^*,\bar{\boldsymbol{p}}} = 0$ pour $\boldsymbol{p} \precsim \boldsymbol{p}^*$. Comme $a_{i^*,\boldsymbol{p}^*}$ est un diviseur, donc, en vertu de l'hypothèse de récurrence, le système $\sum_{\bar{\boldsymbol{q}}} a_{i^*,\bar{\boldsymbol{q}}} u_{\bar{\boldsymbol{p}}+\bar{\boldsymbol{q}}} = c_{\bar{\boldsymbol{p}}}$ (où $u_{\bar{\boldsymbol{p}}}$, $c_{\bar{\boldsymbol{p}}} \in X$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices) admet une solution, quels que soient $c_{\bar{\boldsymbol{q}}}$; ceci montre que $a_{i^*} = \{a_{i^*,\bar{\boldsymbol{p}}}\}_{\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{N}_0^{k-1}}$ est un diviseur. Mais, d'autre part, on a $\bar{a}_i = 0$ pour $i < i^*$. Par conséquent, d'après le lemme 1, le système (6.5) admet une solution, c. q. f. d.

Considérons le cas où $k > 1$, $\boldsymbol{p}^* = (0, \ldots, 0, l)$ et $a_{\boldsymbol{p}^*}$ est un diviseur régulier. En s'appuyant sur (6.2) on montre (par la méthode ci-dessus) qu'il existe des $\gamma_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \in A$ (qui sont des polynômes à coefficients entiers par rapport à $a_{\boldsymbol{s}}$) tels que la *solution générale du système* (6.3) *homogène* $(b = 0)$ est donnée par

$$(6.6) \qquad x_{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{q}} \gamma_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} u_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} u_{\boldsymbol{p}} \in X \text{ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices} \\ \text{et } u_{\boldsymbol{p}} = 0 \text{ lorsque } p_k \geqslant l(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1). \end{cases}$$

On a de plus

$$(6.7) \qquad \gamma_{\boldsymbol{p},0,\ldots,0,l\sigma} = a_{\boldsymbol{p}^*}^{\sigma}, \quad \text{où} \quad \sigma = (p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)-1,$$

quel que soit $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{N}_0^k$.

7. Soit T une distribution portée par l'origine $\boldsymbol{O}$ de $\mathcal{E}^n$; on sait (cf. [10], p. 100) qu'elle est nécessairement de la forme $T = \sum_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} D^{\boldsymbol{p}} \delta$, où $a_{\boldsymbol{p}}$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Soit Φ une fonction indéfiniment dérivable dans un voisinage de $\boldsymbol{O}$; posons $\psi_{\boldsymbol{p}} = D^{\boldsymbol{p}} \Phi(0)$. Considérons l'équation

$$(7.1) \qquad \Phi S = T,$$

où la distribution S est portée par l'origine O. Nous cherchons donc une distribution S de la forme $S = \sum_{\boldsymbol{s}} c_{\boldsymbol{s}} D^{\boldsymbol{s}} \delta$, où $c_{\boldsymbol{s}}$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Or, puisque

$$\Phi D^{\boldsymbol{s}} \delta = \sum_{\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{s}} (-1)^{|\boldsymbol{q}|} \binom{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{q}} D^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}} (\delta D^{\boldsymbol{q}} \Phi) \qquad \text{et} \qquad D^{\boldsymbol{q}} \Phi = \psi_{\boldsymbol{q}} \delta,$$

on a

$$\Phi S = \sum_{\boldsymbol{s}} \sum_{\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{s}} D^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}} \Big((-1)^{|\boldsymbol{q}|} \binom{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{q}} \psi_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{s}} \delta \Big) = \sum_{\boldsymbol{p}} D^{\boldsymbol{p}} \Big(\sum_{\boldsymbol{q}} (-1)^{\boldsymbol{q}} \binom{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}} \psi_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} \delta \Big)$$

et nous voyons que l'équation (7.1) équivaut au système

$$\sum_{\boldsymbol{q}} (-1)^{|\boldsymbol{q}|} \binom{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}} \psi_{\boldsymbol{q}} c_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} = a_{\boldsymbol{p}}.$$

Si l'on pose $a_{\boldsymbol{q}} = (-1)^{|\boldsymbol{q}|}/\boldsymbol{q}!$, $b_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}!\,a_{\boldsymbol{p}}$ et $x_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}!\,c_{\boldsymbol{p}}$, on obtient le système (6.3) et on peut appliquer le lemme 2. Nous arrivons donc à la proposition suivante:

Proposition. *Sauf le cas où tous les $\psi_{\boldsymbol p} = D^{\boldsymbol p}\Phi(0)$ sont nuls, l'équation (7.1) admet une solution, quelle que soit la distribution T portée par l'origine.*

Considérons l'équation homogène

(7.2) $$\Phi S = 0.$$

Supposons qu'on ait $n > 1$ et $D^{\boldsymbol p}\Phi(0)$ pour un $\boldsymbol p$. Nous pouvons admettre que $\partial^\nu\Phi/\partial x_n^\nu = 0$ pour $\nu < l$ et $\partial^l\Phi/\partial x_n^l \neq 0$, en effectuant au besoin une rotation. On déduit de (6.6) qu'il existe des $\beta_{\boldsymbol p,\boldsymbol q}$, $\boldsymbol p \leqslant \boldsymbol q$ (qui sont des polynômes en $\psi_{\boldsymbol s}$) tels que

$$S_{\boldsymbol q} = \sum_{\boldsymbol p\leqslant \boldsymbol q}\beta_{\boldsymbol p,\boldsymbol q}D^{\boldsymbol p}\delta$$

est une solution de (7.2), quel que soit $\boldsymbol q$, et que chaque solution de (7.2) est une combinaison linéaire (finie) de $S_{\boldsymbol q}$. Selon (6.7) on a de plus $\beta_{\boldsymbol p,p_1,\dots,p_{k-1},l\sigma} \neq 0$, pourvu que $p_k < l$.

Il en résulte que, dans le cas où $n > 1$ et $\Phi(0) = 0$, l'équation (7.2) admet des solutions *d'ordre arbitrairement grand*. Par exemple, on vérifie que

$$(x^2+y^2)\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{2k}{2\nu}\frac{\partial^{2k}\delta}{\partial x^{2\nu}\partial y^{2k-2\nu}} = 0,$$

quel que soit $k > 0$.

8. Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{E}^k$ et soit Γ une sous-variété de $\mathcal{E}^n$ $(k < n)$, donnée par

$$x_{k+1} = \eta_{k+1}(x_1,\dots,x_k),\quad \dots,\quad x_n = \eta_n(x_1,\dots,x_k)\in\Omega,$$

ou bien, si l'on pose $\boldsymbol u = (x_1,\dots,x_k)$, $\boldsymbol v = (x_{k+1},\dots,x_n)$, $\eta = (\eta_{k+1},\dots,\eta_n)$, par l'équation

(8.1) $$\boldsymbol v = \eta(\boldsymbol u),\qquad \boldsymbol u\in\Omega,$$

où η_j sont des fonctions bornées de $\mathcal{H}_\Omega$.

A toute distribution U définie dans Ω faisons correspondre une distribution $\tilde U$ définie dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}$ par la formule

(8.2) $$\big(\tilde U,\varphi(u,v)\big) = \big(U,\varphi(\boldsymbol u,\eta(\boldsymbol u))\big)$$

(cf. [10], p. 31-32); elle est portée par Γ. Si $\alpha(\boldsymbol u,\boldsymbol v)$ est une fonction indéfiniment dérivable dans un ouvert qui contient Γ, on a évidemment

(8.3) $$\alpha\tilde U = \widetilde{\beta U},\qquad\text{où}\qquad \beta(\boldsymbol u) = \alpha\big(\boldsymbol u,\eta(\boldsymbol u)\big),$$

pourvu que nous convenions de considérer le produit $\alpha\tilde U$ comme défini dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}$ (égal à zéro dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}-\Gamma$). Montrons que

(8.4) $$U\in\mathcal{P}'_\Omega\quad\text{implique}\quad \tilde U\in\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}.$$

En effet, soit $U\in\mathcal{P}'_\Omega$. D'après le N° 5, on a alors $|(U,\psi)|\leqslant M\|\psi\|_m$ pour $\psi\in\mathcal{D}_\Omega$. Soit $\varphi\in\mathcal{D}_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$; les dérivées de la fonction $\psi(\boldsymbol u) = \varphi(\boldsymbol u,\eta(\boldsymbol u))$ sont de la forme

$$D^{\boldsymbol p}\psi(\boldsymbol u) = \sum_\nu A_\nu D^{\boldsymbol s_\nu}\varphi\big(\boldsymbol u,\eta(\boldsymbol u)\big)\prod_\varkappa D^{\boldsymbol p_{\nu,\varkappa}}\eta_{i_\varkappa}(\boldsymbol u)\qquad(\boldsymbol p,\boldsymbol p_{\nu,\varkappa}\in\mathcal{N}_0^k,\ \boldsymbol s_\nu\in\mathcal{N}_0^n);$$

comme $\eta_j\in\mathcal{H}_\Omega$, il existe une constante $M_0>0$ et un exposant $m_0>0$ tels que $|\prod_\varkappa D^{\boldsymbol p_{\nu,\varkappa}}\eta_{i_\varkappa}(\boldsymbol u)|\leqslant M_0\varrho(\boldsymbol u)^{-m_0}$ pour chaque ν, lorsque $|\boldsymbol p|\leqslant m$; comme $|\boldsymbol s_\nu|\leqslant|\boldsymbol p|$, il résulte du lemme du N° 1, que si $\|\varphi\|_{m+m_0}\leqslant 1$ et $|\boldsymbol p|\leqslant m$, on a $|D^{\boldsymbol p}\psi(\boldsymbol u)|\leqslant M_1$, où la constante M_1 ne dépend pas de φ. On en conclut, d'après (8.2), que $|(\tilde U,\varphi)|\leqslant MM_1$, lorsque $\|\varphi\|_{m+m_0}\leqslant 1$, ce qui prouve que $\tilde U\in\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$.

On sait (cf. [10], p. 100-102) que toute distribution T d'ordre fini dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}$, portée par Γ, admet une décomposition unique de la forme

(8.5) $$T = \sum_{\boldsymbol q} D_{\boldsymbol v}^{\boldsymbol q}\tilde U_{\boldsymbol q},$$

où $U_{\boldsymbol q}$ $(\boldsymbol q\in\mathcal{N}_0^{n-k})$ sont des distributions dans Ω, nulles sauf pour un nombre fini d'indices; on a de plus les formules

(8.6) $$(U_{\boldsymbol q},\varphi) = \left(T,\frac{1}{\boldsymbol q!}\big(\eta(\boldsymbol u)-\boldsymbol v\big)^{\boldsymbol q}\varphi(\boldsymbol u)\right)\ (^7).$$

Proposition. *Pour que $T\in\mathcal{P}_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$ il faut et il suffit que $U_{\boldsymbol q}\in\mathcal{P}'_\Omega$ pour tout $\boldsymbol q$.*

Démonstration. La condition est suffisante d'après (8.5) et (8.4); montrons qu'elle est nécessaire. Il existe une constante c telle que $|\eta(\boldsymbol u)|$

(7) En effet, supposons que T soit d'ordre $\leqslant m$. Il suffit de vérifier l'égalité $(T,\chi) = \big(\sum_{|\boldsymbol q|\leqslant m} D_{\boldsymbol v}^{\boldsymbol q}\tilde U_{\boldsymbol q},\chi\big)$ ou bien

$$(T,\chi) = \left(T,\sum_{|\boldsymbol q|\leqslant m}\frac{1}{\boldsymbol q!}\big(\boldsymbol v-\eta(\boldsymbol u)\big)^{\boldsymbol q}D_{\boldsymbol v}^{\boldsymbol q}\chi\big(\boldsymbol u,\eta(\boldsymbol u)\big)\right),$$

lorsque $\chi(\boldsymbol u,\boldsymbol v) = \varphi(\boldsymbol u)\psi(\boldsymbol v)$ appartient à $\mathcal{D}_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$, c'est-à-dire $\big(T,\varphi(\boldsymbol u)\beta(\boldsymbol u,\boldsymbol v)\big) = 0$, où

$$\beta(\boldsymbol u,\boldsymbol v) = \psi(\boldsymbol v)-\sum_{|\boldsymbol q|\leqslant m}\frac{1}{\boldsymbol q!}\big(\boldsymbol v-\eta(\boldsymbol u)\big)^{\boldsymbol q}D_{\boldsymbol v}^{\boldsymbol q}\psi\big(\eta(\boldsymbol u)\big).$$

Mais ceci résulte du fait que toutes les dérivées d'ordre $\geqslant m$ de β sont nulles sur le support de $T\varphi$ (cf. [10], p. 93).

$<c-1$ dans Ω. Désignons par B la sphère $|\boldsymbol{v}|<c$ et soit γ une fonction de $\mathcal{D}_B$ telle que $\gamma(\boldsymbol{v})=1$ lorsque $|\boldsymbol{v}|\leqslant c-1$. D'après (8.6) on a

$$(U_{\boldsymbol{q}},\varphi)=\big(\chi T,\varphi(\boldsymbol{u})\gamma(\boldsymbol{v})\big)\qquad(\varphi\in\mathcal{D}_\Omega),\tag{8.7}$$

où $\chi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\dfrac{1}{\boldsymbol{q}!}\big(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\big)^{\boldsymbol{q}}\gamma(\boldsymbol{v})$. Selon le lemme 5 du N° 2, la restriction de χ à $\Omega\times B$ appartient à $\mathcal{H}_{\Omega\times B}$, donc la restriction de χT à $\Omega\times B$ appartient à $\mathcal{P}'_{\Omega\times B}$, en vertu de la proposition 3 du N° 5. Par conséquent, on déduit de (8.7) que $U_{\boldsymbol{q}}\in\mathcal{P}'_\Omega$.

9. Comme dans le N° précédent, supposons que Γ soit une sous-variété de $\mathcal{E}^n$ donnée par (8.1), où Ω est un ouvert borné et η_j sont des fonctions bornées de $\mathcal{H}_\Omega$. Soit $\Phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ une fonction indéfiniment dérivable dans un ouvert qui contient $\bar{\Gamma}$; les fonctions

$$\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})=D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{q}}\Phi\big(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})\big)\qquad(\boldsymbol{q}\in\mathcal{N}_0^{n-k})\tag{9.1}$$

appartiennent à $\mathcal{H}_\Omega$, en vertu du lemme 5 du N° 2. Considérons l'équation

$$\Phi S=T,\tag{9.2}$$

où S et T sont des distributions de $\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$, portées par Γ [8]. La distribution T admet la décomposition (8.5), où (d'après la proposition du N° 8) $U_{\boldsymbol{q}}\in\mathcal{P}'_\Omega$ et on a une décomposition analogue pour la distribution inconnue

$$S=\sum_{\boldsymbol{s}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{s}}\tilde{W}_{\boldsymbol{s}},\tag{9.3}$$

où $W_{\boldsymbol{s}}$ $(\boldsymbol{s}\in\mathcal{N}_0^{n-k})$ sont des distributions de $\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$, nulles sauf pour un nombre fini d'indices. Or, puisque $\Phi D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{s}}\tilde{W}_{\boldsymbol{s}}=\sum_{\boldsymbol{q}\leqslant\boldsymbol{s}}(-1)^{|\boldsymbol{q}|}\binom{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{q}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}}(\tilde{W}_{\boldsymbol{s}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{q}}\Phi)$ et, selon (8.3), $\tilde{W}_{\boldsymbol{s}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{q}}\varphi=\widetilde{\psi_{\boldsymbol{q}}W_{\boldsymbol{s}}}$, on a

$$\Phi S=\sum_{\boldsymbol{s}}\sum_{\boldsymbol{q}\leqslant\boldsymbol{s}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}}\left((-1)^{|\boldsymbol{q}|}\binom{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{q}}\widetilde{\psi_{\boldsymbol{q}}W_{\boldsymbol{s}}}\right)=\sum_{\boldsymbol{p}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{p}}\left(\sum_{\boldsymbol{q}}(-1)^{|\boldsymbol{q}|}\binom{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}}\widetilde{\psi_{\boldsymbol{q}}W_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}}\right).$$

Comme la décomposition (8.5) est unique, nous voyons, en tenant compte de la proposition du N° 8, que l'équation (9.2) équivaut au système

$$\sum_{\boldsymbol{q}}(-1)^{|\boldsymbol{q}|}\binom{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}}\psi_{\boldsymbol{q}}W_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}=U_{\boldsymbol{p}}.\tag{9.4}$$

---

[8] Nous considérons le produit ΦS comme défini dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}$ (égal à zéro dans $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}-\Gamma$).

Observons maintenant que, d'après le N° 2, $\mathcal{H}_\Omega$ est un anneau commutatif et que $\mathcal{P}'_\Omega$ est un module sur $\mathcal{H}_\Omega$, en vertu de la proposition 3 du N° 5. Le lemme 2 du N° 2 prouve que chaque élément de $\mathcal{G}_\Omega\cap\mathcal{H}_\Omega$ est un diviseur régulier (comme élément inversible). On voit que le système (9.4) est du type (6.3) (il suffit de prendre $a_{\boldsymbol{q}}=\dfrac{(-1)^{\boldsymbol{q}}}{\boldsymbol{q}!}\psi_{\boldsymbol{q}}$, $b_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}!\,U_{\boldsymbol{p}}$, $x_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}!\,W_{\boldsymbol{p}}$). Conformément au lemme 2 du N° 6 (où l'on prend $\boldsymbol{p}^*=(0,\ldots,0,l)$, on en déduit:

Proposition 1. *Supposons que $\eta_j\in\mathcal{H}_\Omega$, que η_j soient bornées et que $\Phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ soit indéfiniment dérivable dans un ouvert qui contient $\bar{\Gamma}$. Si l'on a*

$$\Phi\big(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})\big)=\ldots=\frac{\partial^{l-1}\Phi}{\partial x_n^{l-1}}\big(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})\big)=0\quad\textit{dans}\quad\Omega$$

et si $\dfrac{\partial^l\Phi}{\partial x_n^l}\big(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})\big)$ appartient à $\mathcal{G}_\Omega$ pour un $l>0$, l'équation (9.2) possède une solution $S\in\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$ portée par Γ, quelle que soit la distribution $T\in\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$ portée par Γ.

Admettons les hypothèses de la proposition 1 et considérons l'équation homogène

$$\Phi S=0,\tag{9.5}$$

où $S\in\mathcal{P}'_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$ est portée par Γ. Dans le cas où $k=n-1$ la solution générale de cette équation est, conformément à (6.2), de la forme

$$S=\tilde{W}_0+\frac{\partial\tilde{W}_1}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial^{l-1}\tilde{W}_{l-1}}{\partial x_n^{l-1}},\qquad\text{où}\qquad W_i\in\mathcal{P}'_\Omega\tag{9.6}$$

(cf. [10], p. 127). Dans le cas où $0<k<n-1$ on déduit de (6.6) qu'il existe des fonctions $\beta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}\in\mathcal{H}_\Omega$, $\boldsymbol{p}\geqslant\boldsymbol{q}$ (qui sont des polynômes par rapport aux fonctions $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{s}}\Phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}))$ telles que

$$S=\sum_{\boldsymbol{p}\leqslant\boldsymbol{q}}D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{p}}(\widetilde{\beta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}W})\tag{9.7}$$

est une solution de (9.5), quel que soit $\boldsymbol{q}\in\mathcal{N}_0^{n-k}$ et $W\in\mathcal{P}'_\Omega$, et que chaque solution de (9.5) est une somme (finie) de distributions de la forme (9.7). Selon (6.7) on a de plus $\beta_{\boldsymbol{p},p_1,\ldots,p_{k-1},l\sigma}(\boldsymbol{u})\neq0$ dans Ω, et, par conséquent, la solution (9.7) peut être une „couche multiple" d'ordre arbitrairement grand.

Proposition 2. *Admettons les hypothèses de la proposition 1 et supposons de plus que les η_j satisfassent à la condition (H)* [9]. *Soit G un ouvert borné qui contient Γ. Pour chaque distribution $T\in\mathcal{P}'_G$ portée par $\bar{\Gamma}$ il existe une distribution $S\in\mathcal{P}'_G$ portée par $\bar{\Gamma}$ et telle que $\Phi S=T$ dans un voisinage de chaque point de Γ.*

---

[9] Il suffit de supposer Γ régulièrement séparé de $G-(\Omega\times\mathcal{E}^{n-k})$.

Démonstration. Soit T_0 la restriction à $\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}$ d'un prolongement de T sur $\mathcal{E}^n$. Selon la proposition 1 il existe une distribution $S_0\in\mathcal{P}_{\Omega\times\mathcal{E}^{n-k}}$ telle que $\Phi S_0 = T_0$. Soit S_1 la restriction à G d'un prolongement de S_0 sur $\mathcal{E}^n$. Comme S_1 est portée par $\big(G-(\Omega\times\mathcal{E}^{n-k})\big)\cup\Gamma$ il suffit de vérifier, d'après la proposition 4 du N° 5, que Γ est régulièrement séparé de $G-(\Omega\times\mathcal{E}^{n-k})$. Mais ceci résulte du lemme 2 du N° 4, car Γ jouit évidemment de la propriété (R) par rapport à $\big(G-(\Omega\times\mathcal{E}^{n-k})\big)\cup\Gamma$.

Un cas de division par une fonction indéfiniment dérivable.

10. Nous allons maintenant démontrer une proposition qui nous permettra d'obtenir le théorème sur la division par une fonction analytique de variables réelles.

PROPOSITION. *Soit G un ouvert borné de $\mathcal{E}^n$ et soit $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction indéfiniment dérivable dans un ouvert qui contient $\bar{G}$. Soit Z l'ensemble des zéros de Φ dans G et supposons que la restriction de Φ à $G-Z$ appartienne à $\mathcal{G}_{G-Z}$. Supposons ensuite que Z admette une décomposition*

$$Z = V^{n-1}\cup\ldots\cup V^0 \tag{10.1}$$

telle que V^0 soit un ensemble fini et V^k une réunion disjointe et finie des sous-variétés

$$V^k = \bigcup_\varkappa \Gamma^k_\varkappa,\qquad k = 1,2,\ldots,n-1\ ^{(10)}. \tag{10.2}$$

Supposons enfin qu'en chaque point de V^0 une des dérivées de Φ soit $\neq 0$ et que chacune des sous-variétés $\Gamma^k_\varkappa$ jouisse des propriétés suivantes:

1° *$\Gamma^k_\varkappa$ est définie par les équations*

$$x_{k+1} = {}^\varkappa\eta^k_{k+1}(x_1,\ldots,x_k),\ \ldots,\ x_n = {}^\varkappa\eta^k_n(x_1,\ldots,x_k)\qquad (x_1,\ldots,x_k)\in\Omega^k_\varkappa,$$

où les fonctions ${}^\varkappa\eta^k_j$ appartiennent à $\mathcal{H}_{\Omega^k_\varkappa}$ et satisfont à la condition (H) *dans $\Omega^k_\varkappa$.*

2° *On a $G\cap(\overline{\Gamma^k_\varkappa}-\Gamma^k_\varkappa)\subset V^{k-1}\cup\ldots\cup V^0$.*

3° *$\Gamma^k_\varkappa$ jouit de la propriété* (R) *par rapport à $V^k\cup\ldots\cup V^0$.*

4° *Il existe un entier positif $l = l^k_\varkappa$ tel que $\Phi = \ldots = \partial^{l-1}\Phi/\partial x_n^{l-1} = 0$ sur $\Gamma^k_\varkappa$ et que la fonction*

$$\frac{\partial^l\Phi}{\partial x_n^l}\big(x_1,\ldots,x_k,{}^\varkappa\eta^k_{k+1}(x_1,\ldots,x_k),\ldots,{}^\varkappa\eta^k_n(x_1,\ldots,x_k)\big)$$

appartient à $\mathcal{G}_{\Omega^k_\varkappa}$.

(10) Il peut arriver que $V^k = 0$ (on a $\bigcup_\varkappa\Gamma^k_\varkappa = 0$, si l'ensemble des indices $\varkappa$ est vide).

Ceci étant admis, l'équation

$$\Phi S = T \tag{10.3}$$

possède une solution $S\in\mathcal{P}'_G$, quelle que soit $T\in\mathcal{P}'_G$.

Démonstration. Considérons notre proposition dans le cas où T est portée par $V^0\cup\ldots\cup V^k$ et procédons par récurrence sur k. La proposition est vraie pour $k=0$, grâce à la proposition du N° 7. Admettons donc qu'elle soit vraie pour un $k-1$, où $0<k<n-1$. Soit T une distribution de $\mathcal{P}'_G$, portée par $V^0\cup\ldots\cup V^k$. D'après le lemme 2 du N° 4, il résulte des hypothèses 1° et 3° que $\Gamma^k_\varkappa$ est régulièrement séparé de $(V^0\cup\ldots\cup V^k)-\Gamma^k_\varkappa$. Selon la proposition 4 du N° 5 il existe une distribution $T_\varkappa$ de $\mathcal{P}'_G$, portée par $\overline{\Gamma^k_\varkappa}$ et telle que $T_\varkappa = T$ dans un voisinage de chaque point de $\Gamma^k_\varkappa$. D'après les hypothèses 1° et 4° on peut appliquer la proposition 2 du N° 9; il existe donc une distribution $S_\varkappa\in\mathcal{P}'_G$ portée par $\Gamma^k_\varkappa$ et telle que $\Phi S_k = T_k$ dans un voisinage de chaque point de $\Gamma^k_\varkappa$. Il en résulte qu'on a

$$\sum_\varkappa T_\varkappa = T \tag{10.4}$$

dans un voisinage de chaque point de l'ensemble

$$A = \bigcup_\varkappa\big(\Gamma^k_\varkappa - \bigcup_{\lambda\neq\varkappa}\overline{\Gamma^k_\lambda}\big)\cup\big(G-(V^k\cup\ldots\cup V^0\cup\bigcup_\varkappa\overline{\Gamma^k_\varkappa})\big)$$

et

$$\Phi S_\varkappa = T_\varkappa \tag{10.5}$$

dans un voisinage de chaque point de l'ensemble $B_\varkappa = (G-\overline{\Gamma^k_\varkappa})\cup\Gamma^k_\varkappa$. Si l'on pose $S^* = \sum_\varkappa S_\varkappa$, on trouve

$$\Phi S^* = T \tag{10.6}$$

dans chaque ouvert où subsistent les égalités (10.4) et (10.5) (pour tout $\varkappa$). Mais l'hypothèse 2° entraîne $G-(V^{k-1}\cup\ldots\cup V^0)\subset\bigcup_\varkappa B_\varkappa$ ainsi que $\bigcup_\varkappa\overline{\Gamma^k_\varkappa}\subset V^k\cup\ldots\cup V^0$ et $\Gamma^k_\varkappa-\overline{\Gamma^k_\lambda} = 0$ si $\varkappa\neq\lambda$, ce qui donne, d'après (10.2), $\mathring{A} = G-(V^{k-1}\cup\ldots\cup V^0)$ (11). Par conséquent, l'égalité (10.6) subsiste dans un voisinage de chaque point de $G-(V^{k-1}\cup\ldots\cup V^0)$, d'où il résulte que $T-\Phi S^*$ est portée par $V^{k-1}\cup\ldots\cup V^0$. Selon l'hypothèse de récurrence, il existe une distribution $S^{**}\in\mathcal{P}'_G$ telle que $\Phi S^{**} = T-\Phi S^*$ dans G, ce qui donne $\Phi(S^*+S^{**}) = T$ dans G, où $S^*+S^{**}\in\mathcal{P}'_G$.

(11) On a $\sum_\varkappa T_\varkappa = 0$ et $\bigcap_\varkappa B_\varkappa = \mathcal{E}^n$, si l'ensemble des indices $\varkappa$ est vide (cf. renvoi (10)). D'ailleurs, dans ce cas ($V^k = 0$), le passage de $k-1$ à k est banal.

Ainsi nous avons prouvé que l'équation (10.3) possède une solution $S \in \mathcal{P}'_G$ quelle que soit la distribution $T \in \mathcal{P}'_G$ portée par $Z = V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0$. Supposons maintenant que T soit une distribution quelconque de $\mathcal{P}'_G$. D'après les hypothèses, le lemme 2 du N° 2 et la proposition 4 du N° 5, la distribution $\frac{1}{\Phi}T$, définie dans $G-Z$, appartient à $\mathcal{P}'_{G-Z}$; soit $S_1 \in \mathcal{P}'_G$ un prolongement de cette distribution (sur G). Comme $\Phi S_1 = T$ dans $G-Z$, la distribution $T-\Phi S_1$ est portée par Z. Par conséquent, il existe une distribution $S_2 \in \mathcal{P}'_G$ telle que $\Phi S_2 = T - \Phi S_1$ ou bien $\Phi(S_1+S_2) = T$ dans G, où $S_1+S_2 \in \mathcal{P}'_G$, c. q. f. d.

Evidemment toute solution de l'équation homogène

(10.7) $$\Phi S = 0$$

est portée par $Z = V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0$. Si $V^k \neq 0$ et $S \in \mathcal{P}'_G$ est une solution de (10.7) portée par $V^k \cup \ldots \cup V^0$, il existe des distributions $S_\varkappa$ telles que

(10.8) $$S_\varkappa \in \mathcal{P}_{\Omega^k_\varkappa \times \mathcal{E}^{n-k}}, \quad S_\varkappa \text{ est portée par } \Gamma^k_\varkappa,\ S_\varkappa \text{ vérifie (10.7)},$$

et

(10.9) $$S_\varkappa = S \quad \text{dans un voisinage de chaque point de } \Gamma^k_\varkappa.$$

Inversement, étant données des distributions $S_\varkappa$ vérifiant (10.8), on montre (par la méthode ci-dessus) qu'il existe une solution $S \in \mathcal{P}'_G$ de (10.7) portée par $V^k \cup \ldots \cup V^0$, telle que (10.9) subsiste; chaque solution qui possède ces propriétés est de la forme $S+S_0$, où $S_0 \in \mathcal{P}'_G$ est une solution portée par $V^{k-1} \cup \ldots \cup V^0$, et vice-versa.

Deuxième partie

Le but de la deuxième partie de cet article est de démontrer que toute fonction analytique réelle satisfait (localement) aux hypothèses de la proposition du N° 10.

Théorème de Weierstrass et discriminant. 11. Le théorème suivant de Weierstrass jouera un rôle fondamental dans nos considérations:

Toute fonction $f(x_1, \ldots, x_k)$ analytique réelle dans un voisinage de l'origine, telle que $f(0, \ldots, 0, x_k) \not\equiv 0$, admet une décomposition unique

(11.1) $$f(x_1, \ldots, x_k) = H(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)\,\Omega(x_1, \ldots, x_k)$$

dans un voisinage de l'origine, où $H(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)$ est un polynôme distingué (réel) et Ω est une fonction analytique réelle telle que $\Omega(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ dans un voisinage de l'origine (cf. [3], p. 188 et [8], p. 86 et 91-92).

On appelle *polynôme distingué* (réel) toute fonction de la forme

(11.2) $$H(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k) = x_k^m + A_1(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k^{m-1} + \ldots + A_m(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

($H \equiv 1$ lorsque $m = 0$), où les fonctions A_i sont analytiques dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_k = 0$ et $A_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ [12].

Une des conséquences importantes du théorème de Weierstrass est le fait que l'anneau $\mathcal{A}_k$ des fonctions analytiques réelles au voisinage de $x_1 = \ldots = x_k = 0$ [13] est un anneau factoriel (cf. [7], p. 161-164, et [1], p. 36-39), c'est-à-dire un anneau d'intégrité, avec un élément unité, dans lequel tout élément non inversible admet une décomposition en facteurs irréductibles, unique à l'ordre et l'équivalence des facteurs [14] près. La démonstration est la même que dans le cas des variables complexes (cf. [3], p. 190-193); on procède par récurrence en s'appuyant sur le théorème: si $\mathcal{A}$ est un anneau factoriel, il en est de même de l'anneau des polynômes $\mathcal{A}[x]$ (cf. [11], p. 75, et [7], p. 164).

Grâce au théorème de Weierstrass on en déduit que tout polynôme distingué $H(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)$ de degré positif admet une décomposition

(11.3) $$H = H_1 \ldots H_p,$$

où H_i sont des polynômes distingués, de degré positif, irréductibles dans $\mathcal{A}_{k-1}[x_k]$ [15]. Cette décomposition est d'ailleurs unique, car dans le cas des polynômes unitaires [16] l'équivalence implique l'égalité. Selon un lemme de Gauss (cf. [1], p. 37, et [11], p. 77) H_i sont irréductibles aussi dans $\mathcal{K}[x_k]$, où $\mathcal{K}$ est le corps des fractions de $\mathcal{A}_{k-1}$. Or, la caractéristique de $\mathcal{K}$ étant nulle, on a le critère: si le discriminant d'un polynôme (degré positif) $w \in \mathcal{K}[x_k]$ est nul il existe deux facteurs équivalents dans la décomposition de w [17]. Soit $D(x_1, \ldots, x_{k-1})$ le discriminant de H; les H_i étant des polynômes unitaires de $\mathcal{K}[x_k]$, on en conclut que si $D \equiv 0$, il existe des facteurs multiples dans la décomposition (11.3).

---

(12) Dans le cas où $k = 1$, on a $H(x_1) = x_1^m$.

(13) On identifie deux fonctions, si elles coïncident dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

(14) Il s'agit de l'équivalence selon laquelle a équivaut à b, si $a = ub$ pour un élément inversible u.

(15) Cf. la démonstration du lemme 4 de [3], p. 193.

(16) Un polynôme $a_0x + \ldots + a^m$ est dit *unitaire* si $a_0 = 1$.

(17) Cf. [1], pp. 93 et 89. En effet, soit $w = q_1 \ldots q_l$ une décomposition en facteurs irréductibles et soit p. ex. q_1 un diviseur commun de w et $w' = q_1' q_2 \ldots q_l + q_1(q_2' \ldots q_l + \ldots + q_2 \ldots q_l')$; par conséquent q_1 est un diviseur de $q_1' q_2 \ldots q_l$. Comme $q_1' \neq 0$, on a nécessairement $k > 0$ et q_1 est un diviseur d'un q_k ($k > 1$) donc q_1 et q_l sont équivalents.

Écrivons la décomposition (11.3) sous la forme $H = H_1^{k_1}\ldots H_s^{k_s}$, où $H_1, \ldots, H_s$ sont distinctes, et considérons le polynôme distingué $H_0 = H_1 \ldots H_s$. Le discriminant de H_0 ne s'annule pas identiquement et l'ensemble des zéros de H dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_k = 0$ coïncide avec celui de H_0. Nous arrivons ainsi au corollaire suivant du théorème de Weierstrass:

PROPOSITION. *Soit $f(x_1, \ldots, x_k)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage de l'origine, telle que $f(0, \ldots, 0, x_k) \not\equiv 0$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine et un polynôme distingué $H_0(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)$ tels que le discriminant de H_0 ne s'annule pas identiquement dans $\mathcal{U}$* [18] *et que*

(11.4) $\quad f(x_1, \ldots, x_k) = 0$ *équivaut à* $H_0(x_1, \ldots, x_{k-1}; x\ ) = 0$

pourvu que $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{U}$.

Nous appellerons H_0 (ainsi construit) *polynôme distingué associé* à la fonction f.

12. Rappelons quelques propriétés du discriminant que nous utiliserons dans la suite. Les coëfficients $A_i(x_1, \ldots, x_{k-1})$ d'un polynôme distingué $H(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)$ étant analytiques dans un ensemble

$$|x_1| < \delta, \ldots, |x_{k-1}| < \delta, \tag{12.1}$$

le discriminant $D(x_1, \ldots, x_{k-1})$ de H est (comme polynôme à coefficients réels par rapport aux fonctions A_i) une fonction analytique réelle dans l'ensemble (12.1). Soit $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ un point de cet ensemble et soit $\mathring{\zeta}_1, \ldots, \mathring{\zeta}_m$ la suite complète des racines (complexes) de H au point $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ (nous avons donc $H(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}; \zeta_\nu) = 0$). On a

$$D(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}) = \prod_{\nu<\mu} (\mathring{\zeta}_\nu - \mathring{\zeta}_\mu)^2 = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}; \zeta_\nu), \tag{12.2}$$

lorsque $m \geqslant 2$ (on a $D = 1$ dans le cas où $m < 2$). Si $D(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}) \neq 0$, on a

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}, \mathring{\zeta}_\nu) \neq 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{12.3}$$

PROPOSITION. *Soit $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ un point de l'ensemble (12.1), tel que $D(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}) \neq 0$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ et des fonctions $\zeta_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \zeta_m(x_1, \ldots, x_{k-1})$ analytiques (complexes des variables réelles) dans $\mathcal{U}_0$, dont les valeurs forment la suite complète des racines de H au point $(x_1, \ldots, x_{k-1})$, qui sont distinctes dans $\mathcal{U}_0$ et*

(18) Nous convenons que dans le cas où $H_0 = 1$ le discriminant est égal à 1.

telles que $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ est réelle dans $\mathcal{U}_0$ ou la partie imaginaire de $\zeta_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$ ne s'annule pas dans $\mathcal{U}_0$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$; toute fonction $\zeta(x_1, \ldots, x_{k-1})$ analytique et vérifiant $H(x_1, \ldots, x_{k-1}; \zeta(x_1, \ldots, x_k)) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}_0$ coïncide (dans $\mathcal{U}_0$) avec une de ζ_ν.

En effet, les racines $\mathring{\zeta}_1, \ldots, \mathring{\zeta}_m$ de H en $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ sont distinctes. Si $\mathcal{U}_0$ est une sphère de centre $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1})$ et de rayon suffisamment petit, alors (cf. (12.3)), quel que soit $\nu = 1, 2, \ldots, m$, il existe une et une seule fonction $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ analytique dans $\mathcal{U}_0$, vérifiant $H(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{k-1}, \zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}_0$ et telle que $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \mathring{\zeta}_\nu$; on peut exiger que l'on ait $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1}) \neq \zeta_\mu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ dans $\mathcal{U}_0$ (lorsque $\nu \neq \mu$). Puisque $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ est analytique dans $\mathcal{U}_0$, vérifie $H(x_1, \ldots, x_{k-1}; \bar{\zeta}_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}_0$ et $\bar{\zeta}_\nu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{k-1}) = \bar{\mathring{\zeta}}_\nu = \mathring{\zeta}_\mu$ pour un μ, on a $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1}) \equiv \zeta_\mu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ dans $\mathcal{U}_0$. Il en résulte que $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1}) \equiv \zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ dans $\mathcal{U}_0$ ou $\zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ $\neq \zeta_\nu(x_1, \ldots, x_{k-1})$ dans $\mathcal{U}_0$.

Lemmes sur les fonctions symétriques. 13. Considérons les fonctions symétriques élémentaires des variables complexes:

$$\sigma_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = 1,$$

$$\sigma_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \zeta_1 + \ldots + \zeta_k, \quad \ldots, \quad \sigma_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \zeta_1, \ldots, \zeta_k.$$

Quels que soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, il existe un indice l tel que $\sigma_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \neq 0$ et $\sigma_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = 0$ lorsque $i > l$; alors l est égal au nombre des indices ν pour lesquels $\zeta_\nu \neq 0$ et on a

$$\sigma_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \prod_{\zeta_\nu \neq 0} \zeta_\nu \text{ [19]}. \tag{13.1}$$

LEMME 1. *Soient $\zeta_1(x), \ldots, \zeta_k(x)$ des fonctions complexes continues dans un espace connexe E. Si l'on a $\sigma_l(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_k(x)) \neq 0$ dans E et $\sigma_i(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_k(x)) \equiv 0$ dans E lorsque $i > k$, alors quel que soit $\nu = 1, 2, \ldots, k$, il n'y a que deux possibilités:*

$$\zeta_\nu(x) \neq 0 \text{ dans } E \quad \text{ ou } \quad \zeta_\nu(x) \equiv 0 \text{ dans } E.$$

Démonstration. L'ensemble où $\zeta_\nu(x) \neq 0$ étant ouvert, il suffit de prouver qu'il en est de même de l'ensemble où $\zeta_\nu(x) = 0$. Supposons que $\zeta_\nu(x_0) = 0$. Il existe des indices $a_1 < \ldots < a_l$ tels que $\zeta_{a_1}(x_0)$ $\neq 0, \ldots, \zeta_{a_l}(x_0) \neq 0$. On a donc $\zeta_{a_1}(x) \neq 0, \ldots, \zeta_{a_l}(x)$ dans un voisinage $\mathcal{U}$

(19) Nous convenons que $\prod_\nu \zeta_\nu = 1$ dans le cas où l'ensemble des indices ν est vide.

de x_0 et, par suite, $\zeta_\nu(x) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}$ pour tous les autres indices α; en particulier $\zeta_\nu(x) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}$, c. q. f. d.

On sait que les racines d'un polynôme unitaire sont petites en même temps que les coefficients; en effet,

$$(13.2)\qquad \zeta^k + c_1\zeta^{k-1} + \ldots + c_m = 0 \quad \text{implique} \quad |\zeta| \leqslant 2\max_i \sqrt[i]{|c_i|}\ (^{20}).$$

En posant $\delta_k(\varepsilon) = \min\left(\frac{1}{2}\varepsilon, (\frac{1}{2}\varepsilon)^k\right)$ nous avons donc:

Lemme 2. *Quels que soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ complexes vérifiant $|\sigma_1| \leqslant \delta_k(\varepsilon), \ldots$ $\ldots, |\sigma_k| \leqslant \delta_k(\varepsilon)$, il existe un système de complexes $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ vérifiant $\sigma_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \sigma_1, \ldots, \sigma_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \sigma_k$, unique à l'ordre près, et on a $|\zeta_1| < \varepsilon, \ldots, |\zeta_k| < \varepsilon$.*

Lemme 3. *Soit $\Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ une fonction de variables complexes, symétrique et analytique dans l'ensemble $|\zeta_1| < \varepsilon, \ldots, |\zeta_k| < \varepsilon$. Alors la fonction $H(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, définie par la relation*

$$(13.3)\qquad \Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \psi\left(\sigma_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k), \ldots, \sigma_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\right)$$

dans l'ensemble $|\sigma_1| < \delta_k(\varepsilon), \ldots, |\sigma_k| < \delta_k(\varepsilon)$ (cf. le lemme 2), est analytique dans cet ensemble.

Démonstration. Nous avons $\Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \sum a_{p_1, \ldots, p_k}\zeta_1^{p_1}\ldots\zeta_k^{p_k}$ pour $|\zeta_1| < \varepsilon, \ldots, |\zeta_k| < \varepsilon$, et $a_{p_1, \ldots, p_k} = a_{p_{\pi_1}, \ldots, p_{\pi_k}}$ lorsque $(\pi_1, \ldots, \pi_k)$ est une permutation de $(1, \ldots, k)$. Il s'ensuit que les polynômes $W_\nu(\zeta_1, \ldots$ $\ldots, \zeta_k) = \sum\limits_{p_1+\ldots+p_k \leqslant \nu} a_{p_1, \ldots, p_k}\zeta_1^{p_1}\ldots\zeta_k^{p_k}$ sont symétriques et on a, par suite,

$$(13.4)\qquad W_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = P_\nu\left(\sigma_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k), \ldots, \sigma_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\right),$$

où P_ν sont des polynômes. Or, quel que soit $\bar\varepsilon < \varepsilon$, W_ν converge uniformément vers Φ dans l'ensemble $|\zeta_1| < \bar\varepsilon, \ldots, |\zeta_k| < \bar\varepsilon$, donc, d'après le lemme 2 et (13.4), la suite $P_\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ converge uniformément dans l'ensemble $|\sigma_1| < \delta_k(\bar\varepsilon), \ldots, |\sigma_k| < \delta_k(\bar\varepsilon)$. Par conséquent la limite $\psi = \lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu$ est une fonction analytique dans l'ensemble $|\sigma_1| < \delta_k(\varepsilon), \ldots$ $\ldots, |\sigma_k| < \delta_k(\varepsilon)$ et satisfait (selon (13.4)) à la relation (13.3), c. q. f. d.

14. Soit $F(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_p = y_1 = \ldots = y_q = 0$ et soient $H_1(x_1, \ldots$ $\ldots, x_p; y_1), \ldots, H_q(x_1, \ldots, x_p; y_q)$ des polynômes distingués. Nous allons définir une fonction (dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_p = 0$) que nous désignerons par

$$\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F.$$

(20) En effet, si l'on pose $\lambda = \max \sqrt[i]{|c_i|}$ et $\zeta = \lambda\eta$ (dans le cas où $\lambda \neq 0$), on trouve $|\eta|^k \geqslant |\eta|^{k-1} + \ldots + 1$, d'où $|\eta|^{k-1} - |\eta|^k - 1$ et, par suite, $|\eta| < 2$.

Dans le cas où $H_s \equiv 1$ pour un indice s, nous posons $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F \equiv 1$. Supposons que

$$(14.1)\qquad H_s(x_1, \ldots, x_p; y_s) = x_s^{k_s} + A_1^s(x_1, \ldots, x_p)x_s^{k_s-1} + \ldots + A_{k_s}^s(x_1, \ldots, x_p),$$
$$\text{où} \quad k_s > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, q).$$

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

(14.2) $F(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q)$ est une fonction analytique de variables complexes dans l'ensemble: $|z_1| < \varepsilon, \ldots, |z_p| < \varepsilon, |w_1| < \varepsilon, \ldots, |w_q| < \varepsilon$.

σ_l étant les fonctions symétriques élémentaires de $k_1, \ldots, k_q$ variables $\eta_{\nu_1, \ldots, \nu_q}$ $(\nu_1 = 1, \ldots, k_1; \ldots; \nu_q = 1, \ldots, k_q)$, la fonction

$$(14.3)\qquad \Phi(z_1, \ldots, z_k, \zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_1}^{(1)}, \ldots, \zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)})$$
$$= \sigma_l(\ldots, F(z_1, \ldots, z_p, \zeta_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, \zeta_{\nu_q}^{(q)}), \ldots)$$

est analytique dans l'ensemble $|z_1| < \varepsilon, \ldots, |z_p| < \varepsilon$, $|\zeta_1^{(1)}| < \varepsilon, \ldots, |\zeta_{k_q}^{(q)}| < \varepsilon$, et symétrique séparément par rapport à chaque groupe de variables $\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, q)$. D'après le lemme 2 du N° 13, on en conclut qu'il existe une et une seule fonction $\psi_l(z_1, \ldots, z_p, \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{k_1}^{(1)}, \ldots, \sigma_1^{(q)}, \ldots$ $\ldots, \sigma_{k_q}^{(q)})$ définie dans l'ensemble

$$(14.4)\qquad |z_i| < \varepsilon, \quad |\sigma_\nu^{(s)}| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, p;\ s = 1, \ldots, q;\ \nu = 1, \ldots, k_s),$$

telle que

$$(14.5)\qquad \Phi_l(z_1, \ldots, z_p, \zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_1}^{(1)}, \ldots, \zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)})$$
$$= \psi_l\big(z_1, \ldots, z_p, \sigma_1(\zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_1}^{(1)}), \ldots, \sigma_{k_1}(\zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_1}^{(1)}), \ldots$$
$$\ldots, \sigma_1(\zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)}), \ldots, \sigma_{k_q}(\zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)})\big)$$

lorsque $|z\,| < \varepsilon$ et $|\sigma_\nu(\zeta_s^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)})| < \delta_{k_s}(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots$ $\ldots, q;\ \nu = 1, 2, \ldots, k_s)$.

Il résulte du lemme 3 que la fonction ψ_l est analytique séparément par rapport à chacune des variables. Selon un théorème de Hartogs, elle est donc analytique dans l'ensemble (14.4). Nous disons qu'elle est réelle. En effet, supposons que $(x_1, \ldots, x_p, \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{k_q}^{(q)})$ soit un point réel de l'ensemble (14.4). Quel que soit $s = 1, \ldots, q$, il existe un système $\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}$ tel que $\sigma_\nu^{(s)} = \sigma_\nu(\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)})$ et on a $\overline{\zeta_\nu^{(s)}} = \zeta_{\pi_\nu(s)}^{(s)}$, où $(\pi_1^{(s)}, \ldots, \pi_{k_s}^{(s)})$ est une permutation de $(1, 2, \ldots, k_s)$. Il en résulte que $\Phi_l(x_1, \ldots, x_p, \overline{\zeta_1^{(1)}}, \ldots, \overline{\zeta_{k_q}^{(q)}}) = \Phi_l(x_1, \ldots, x_p, \zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)})$. Mais, Φ_l étant réelle (cf. (14.3)), on a, d'après (14.5),

$$\overline{\psi_l(x_1, \ldots, x_p, \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{k_q}^{(q)})} = \Phi_l(x_1, \ldots, x_p, \overline{\zeta_1^{(1)}}, \ldots, \overline{\zeta_{k_q}^{(q)}})$$
$$= \Phi_l(x_1, \ldots, x_p, \zeta_1^{(1)}, \ldots, \zeta_{k_q}^{(q)}) = \psi_l(x_1, \ldots, x_p, \sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{k_q}^{(q)}),$$

ce qui prouve que ψ_l est réelle.

Comme les H_s sont des polynômes distingués (cf. (14.1)), il existe un $\delta > 0$ tel que

(14.6) $\delta < \varepsilon$, les coefficients A^s_ν sont analytiques et $|A^s_\nu(x_1, \ldots, x_p)| < \delta_{k_s}(\varepsilon)$ $(s = 1, 2, \ldots, q; \nu = 1, 2, \ldots, k_s)$ dans le cube Q: $|x_1| < \delta, \ldots, \ldots, |x_p| < \delta$.

Par conséquent la fonction

(14.7) $F_l(x_1, \ldots, x_p) = \psi_l(x_1, \ldots, x_p, \ldots, (-1)^\nu A^s_\nu(x_1, \ldots, x_p), \ldots)$

est analytique réelle dans Q (car ψ_l est analytique dans l'ensemble (14.4)). Soit $\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}$ la suite complète des racines de H_s en un point $(x_1, \ldots, x_p)$ de Q; on a alors $\sigma_\nu(\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}) = (-1)^\nu A^s_\nu(x_1, \ldots, x_p)$ et (cf. le lemme 2) $|\zeta_\nu^{(s)}| < \varepsilon$ $(s = 1, 2, \ldots, q; \nu = 1, 2, \ldots, k_s)$. En combinant (14.3), (14.5) et (14.7) nous obtenons donc

(14.8) $F_l(x_1, \ldots, x_p) = \sigma_l(\ldots, F(x_1, \ldots, x_p, \zeta^{(1)}_{\nu_1}, \ldots, \zeta^{(q)}_{\nu_q}), \ldots)$ dans Q,

où $\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}$ est la suite complète des racines de H_s au point $(x_1, \ldots, x_p)$.

Comme on a toujours $F_0 \equiv 1$, il existe un indice l_0 unique pour lequel $F_{l_0} \not\equiv 0$ et $F_l \equiv 0$ lorsque $l > l_0$. Or, posons

(14.9) $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)} F(x_1, \ldots, x_p) = F_{l_0}(x_1, \ldots, x_p)$ dans Q

et appelons Q (satisfaisant aux conditions (14.2) et (14.6)) un *cube associé à* $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F$. (Dans le cas des polynômes distingués $H_s(x_{\alpha_1^s}, \ldots, x_{\alpha_{p_s}^s}; y_s)$, où $1 \leqslant \alpha_1^s < \ldots < \alpha_{p_s}^s \leqslant p$, les fonctions $\tilde{H}_s(x_1, \ldots, x_p; y_p) = = H_s(x_{\alpha_1^s}, \ldots \ldots, x_{\alpha_{p_s}^s}; y_s)$ sont aussi des polynômes distingués; nous posons alors $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F = \sigma^{(\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_q)}F$).

Nous avons ainsi:

Proposition 1. *$\sigma^{(H_1, \ldots, H_p)}F$ est une fonction analytique réelle dans le cube associé Q et elle ne s'annule pas identiquement.*

D'après (14.9), (14.8) et (13.1) nous avons:

Proposition 2. *Soit $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p) \in Q$. Si la valeur $\sigma^{(H_1, \ldots, H_p)}F(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$ n'est pas nulle, elle est égale au produit de toutes les valeurs*

$$F(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p, \zeta^{(1)}_{\nu_1}, \ldots, \zeta^{(q)}_{\nu_q}) \quad (\nu_1 = 1, \ldots, k_1; \ldots; \nu_q = 1, \ldots, k_q)$$

qui ne sont pas nulles, où $\zeta_1^{(s)}, \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}$ est le suite complète des racines de H_s au point $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$ $(s = 1, \ldots, q)$ [21].

Proposition 3. *Soit $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$ un point de Q, tel que*

(14.10) $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p) \neq 0$ *et* $D_s(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p) \neq 0$ $(s = 1, 2, \ldots, q)$,

[21] Cf. renvoi [19].

où D_s désigne le discriminant de H_s. Si $\eta_s(x_1, \ldots, x_p)$ sont des fonctions analytiques vérifiant $H_s(x_1, \ldots, x_s; \eta_s(x_1, \ldots, x_p)) \equiv 0$ dans un voisinage de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$, $s = 1, \ldots, q$, alors

$$F(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p, \eta_1(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p), \ldots, \eta_q(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)) = 0$$

implique

$$F(x_1, \ldots, x_p, \eta_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \eta_q(x_1, \ldots, x_p)) \equiv 0$$

dans un voisinage de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$.

Démonstration. Soit $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$ un point de Q vérifiant (14.10). Selon la proposition du N° 12, il existe une sphère $\mathcal{U}_0 \subset Q$ de centre $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_p)$ et des fonctions $\zeta_\nu^{(s)}(x_1, \ldots, x_p)$ $(s = 1, 2, \ldots, q; \nu = 1, 2, \ldots, k_s)$, analytiques dans $\mathcal{U}_0$ telles que $\zeta_1^{(s)}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \zeta_{k_s}^{(s)}(x_1, \ldots, x_p)$ est la suite complète des racines de H_s au point $(x_1, \ldots, x_p)$; on a de plus $\eta_s(x_1, \ldots, x_p) = \zeta_{\bar{\nu}_s}^{(s)}(x_1, \ldots, x_p)$ dans $\mathcal{U}_0$ $(s = 1, \ldots, q)$ pour certains $\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_q$. Conformément à (14.8) nous avons donc

$$F_l(x_1, \ldots, x_p) = \sigma_l\big(\ldots, F(x_1, \ldots, x_p, \zeta^{(1)}_{\nu_1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \zeta^{(q)}_{\nu_q}(x_1, \ldots, x_p)), \ldots\big)$$

dans $\mathcal{U}_0$. Le rayon de $\mathcal{U}_0$ étant suffisamment petit, on a, d'après (14.9) et (14.10), $F_{l_0}(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$ dans $\mathcal{U}_0$ et $F_l(x_1, \ldots, x_p) \equiv 0$ dans $\mathcal{U}_0$ pour $l > l_0$. Il en résulte la conclusion de notre proposition, en vertu du lemme 1 du N° 13.

Proposition 4. *Soit $F(x_1, \ldots, x_p, u, v)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_p = u = v = 0$ telle que $F(0, \ldots, 0, v) \not\equiv 0$ et soit $H(x_1, \ldots, x_p; u)$ un polynôme distingué. On a alors $\sigma^{(H)}F(0, \ldots \ldots, 0, v) \not\equiv 0$ et les égalités*

(14.11) $F(x_1, \ldots, x_p, u, v) = 0$ *et* $H(x_1, \ldots, x_p; u) = 0$

impliquent

(14.12) $$\sigma^{(H)}F(x_1, \ldots, x_p, v) = 0,$$

pourvu que $(x_1, \ldots, x_p, v)$ appartienne au cube associé à $\sigma^{(H)}F$.

Démonstration. Le cas où $H \equiv 1$ est banal; supposons que H soit de degré $k > 0$. Conformément à (14.8) nous avons

(14.13) $$F_k(x_1, \ldots, x_p, v) = \prod_{\nu=1}^{k} F(x_1, \ldots, x_p, \zeta_\nu, v)$$

dans le cube Q_1 associé à $\sigma^{(H)}F$, où $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ est la suite complète des racines de H au point $(x_1, \ldots, x_p)$. Comme $\zeta_1 = \ldots = \zeta_k = 0$ pour

$x_1 = \ldots = x_p = 0$, on a $F_k(0, \ldots, 0, v) \equiv [F(0, \ldots, 0, v)]^k \not\equiv 0$; on en conclut que $\sigma^{(H)}F = F_k$. L'égalité (14.13) montre que les relations (14.11) entraînent $F_k(x_1, \ldots, x_p, v) = 0$, pourvu que $(x_1, \ldots, x_p, v) \in Q_1$, ce qui termine la démonstration.

Décomposition d'un ensemble analytique réel. 15. Nous allons construire pour une fonction analytique réelle un système de polynômes distingués qui fournit une décomposition de l'ensemble des zéros de cette fonction en sous-variétés. L'idée d'une construction de ce genre se trouve dans le second chapitre du livre de W. F. Osgood [8].

PROPOSITION (22). *Soient $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_p)$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine et supposons que $\Phi(0, \ldots, 0, x_n) \not\equiv 0$. En effectuant au besoin une rotation (en $x_1, \ldots, x_{n-1}$) on peut choisir les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de telle façon qu'il existe un intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_n| < \delta_n$ et un système de polynomes distingués*

$$H_l^k(x_1, \ldots, x_k; x_l) \quad (k = 0, \ldots, n-1;\ l = k+1, \ldots, n) \tag{15.1}$$

à discriminants $D_l^k(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$ (23), ayant les propriétés suivantes.:

I. *$\bar{Q} \subset \mathcal{U}$ et $F_1, \ldots, F_p$ sont des fonctions analytiques de variables complexes dans un ouvert qui contient l'ensemble $|z_1| < \delta_1, \ldots, |z_n| < \delta_n$.*

II. *La fermeture de l'intervalle Q_k: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_k| < \delta_k$ est contenue dans un cube associé à $\sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)}F_i$ (dans lequel les coefficients de H_l^k sont analytiques), quels que soient $k = 1, \ldots, n-1$ et $i = 1, \ldots, p$. On a $|\zeta| < \delta_l$ pour toute racine (complexe) ζ de H_l^k au point $(x_1, \ldots, x_k) \in Q_k$ $(k = 1, \ldots, n-1;\ l = k+1, \ldots, n)$.*

III. *L'ensemble Z des zéros de Φ dans Q admet une décomposition*

$$Z = V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0, \tag{15.2}$$

où l'ensemble V^0 est vide ou se réduit à l'origine, et l'ensemble V^k $(k > 0)$ est une réunion disjointe et finie des sous-variétés

$$V^k = \bigcup_{\varkappa} \Gamma_\varkappa^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ (24)}, \tag{15.3}$$

chacune jouissant des propriétés suivantes:

(22) Voir le No II de l'appendice pour des énoncés dans le même ordre des idées.

(23) $H_l^0(x)$ est égal à x_l ou à 1 (cf. le renvoi (12)).

(24) Cf. le renvoi (10).

1° *$\Gamma_\varkappa^k$ est définie par les équations*

$$x_{k+1} = {}^\varkappa\eta_{k+1}^k(x_1, \ldots, x_k), \ \ldots, \ x_n = {}^\varkappa\eta_n^k(x_1, \ldots, x_k), \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\varkappa^k, \tag{15.4}$$

où $\Omega_\varkappa^k$ est un ouvert (contenu dans Q_k) et ${}^\varkappa\eta_l^k$ est analytique réelle et vérifie

$$H_l^k(x_1, \ldots, x_k; {}^\varkappa\eta_l^k(x, \ldots, x_k)) \equiv 0 \quad dans \quad \Omega_\varkappa^k, \tag{15.5}$$

$l = k+1, \ldots, n$; on a

$$D_l^k(x_1, \ldots, x_k) \neq 0 \quad dans \quad \Omega_\varkappa^k \quad (l = k+1, \ldots, n). \tag{15.6}$$

2° *Quels que soient k, $\varkappa$, $\varkappa'$, on a $\Omega_\varkappa^k = \Omega_{\varkappa'}^k$, ou $\Omega_\varkappa^k \cap \Omega_{\varkappa'}^k = 0$; dans le second cas on a ${}^\varkappa\eta_l^k \equiv {}^{\varkappa'}\eta_l^k$ dans $\Omega_\varkappa^k$ ou ${}^\varkappa\eta_l^k \neq {}^{\varkappa'}\eta_l^k$ dans $\Omega_\varkappa^k$, quel que soit $l = k+1, \ldots, n$.*

3° *On a $Q \cap (\overline{\Gamma_\varkappa^k} - \Gamma_\varkappa^k) \supset V^{k+1} \cup \ldots \cup V^0 \supset (-\Omega_\varkappa^k) \times \mathcal{E}^{n-k}$.*

4° *On a $\sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)}F_i \neq 0$ dans $\Omega_\varkappa^k$, $i = 1, \ldots, p$.*

5° *Quel que soit $i = 1, 2, \ldots, p$, on a $F_i = 0$ partout sur $\Gamma_\varkappa^k$ ou $F_i \neq 0$ partout sur $\Gamma_\varkappa^k$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que les définitions: 1° du discriminant d'un polynôme distingué $H(x_1, \ldots, x_k; y)$, 2° du polynôme distingué associé à une fonction $f(x_1, \ldots, x_k, y)$ (telle que $f(0, \ldots, 0, y) \not\equiv 0$, cf. la proposition du No 11), 3° de la fonction $\sigma^{(H_1, \ldots, H_q)}F$ formée pour une fonction $F(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_q)$ et pour des polynômes distingués $H_j(x_1, \ldots, x_k; y_j)$, sont invariantes par rapport à un changement des variables $x_1, \ldots, x_k$ (25).

Par conséquent, en effectuant au besoin une rotation (en $x_1, \ldots, x_{n-1}$) on peut choisir les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de façon que les conditions

$$\Phi_n = \Phi, \tag{15.7}$$

$$\Phi_k = \Big(\prod_{l=k+1}^{n} D_l^k\Big) \cdot \Big(\prod_{j=k+1}^{n} \sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_j^k)}\Phi_j\Big)\Big(\prod_{i=1}^{p} \sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)}F_i\Big) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{15.8}$$

(15.9) H_k^{k-1} est le polynôme distingué associé à Φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

(15.10) H_l^{k-1} est le polynôme distingué associé à $\sigma^{(H_k^{k-1})}H_l^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1;\ l = k+1, \ldots, n)$,

(25) Il s'agit évidemment des substitutions: $x_1 = g_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, x_k = g_k(u_1, \ldots, u_k)$, où $g_1(0, \ldots, 0) = \ldots = g_k(0, \ldots, 0) \neq 0$, g_i sont analytiques (réelles) dans un voisinage de $(0, \ldots, 0)$ et le jacobien ne s'annule pas en $(0, \ldots, 0)$.

définissent par récurrence descendante) un système de polynômes distingués (15.1) et une suite de fonctions

(15.11) $$\Phi_k(x_1, \ldots, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où Φ_k est une fonction analytique réelle dans un voisinage de $x_1 = \ldots \ldots = x_k = 0$.

En effet, comme $\Phi(0, \ldots, 0, x_n) \not\equiv 0$, Φ_n et H_n^{n-1} sont définies par (15.7) et (15.9). Soit $1 < r \leqslant n$ et supposons que (après une rotation en $x_1, \ldots, x_{n-1}$) nous ayons défini les Φ_k et H_l^{k-1} vérifiant (15.7)-(15.10) pour $k = r, \ldots, n$. On a $D_l^{r-1} \not\equiv 0$ $(l = r, \ldots, n)$, $\sigma^{(H_r^{r-1}, \ldots, H_j^{r-1})} \Phi_j \not\equiv 0$ $(j = r, \ldots, n)$, et $\sigma^{(H_r^{r-1}, \ldots, H_n^{r-1})} F_i$, $(i = 1, \ldots, p)$ d'après (15.9) et (15.10) (cf. la proposition du N° 11) et la proposition 1 du N° 14; par conséquent, la formule (15.8) définit pour $k = r-1$ une fonction $\Phi_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1})$ analytique réelle dans un voisinage de $x_1 = \ldots = x_{r-1} = 0$, telle que $\Phi_{r-1} \neq 0$. En effectuant au besoin une rotation (en $(x_1, \ldots, x_{r-1})$) on peut choisir les coordonnées $x_1, \ldots, x_{r-1}$ de façon que l'on ait $\Phi_{r-1}(0, \ldots, 0, x_{r-1}) \not\equiv 0$; selon la remarque faite au début de la démonstration, les relations (15.7)-(15.10), où $k \geqslant r$, subsistent après ce changement des variables et il en est de même de la formule (15.8) pour $k = r-1$. La relation (15.9) (pour $k = r-1$) définit donc un polynôme distingué H_{r-1}^{r-2}. Enfin les relations (15.10) (pour $k = r-1$) définissent des polynômes distingués H_l^{r-2} $(l = r, \ldots, n)$ car, d'après la proposition 4 du N° 14, on a $\sigma^{(H_{r-1}^{r-1})} H_l^{r-1}(0, \ldots, 0, x_{r-1}) \not\equiv 0$.

Nous allons maintenant définir l'intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_n| < \delta_n$. Soit δ un nombre positif tel que l'intervalle: $|x_1| < \delta, \ldots, |x_n| < \delta$ soit contenu dans $\mathcal{U}$, que $F_1, \ldots, F_p$ soient analytiques des variables complexes dans l'ensemble $|z_1| < \delta, \ldots, |z_n| < \delta$ et que l'intervalle $|x_1| < \delta, \ldots, |x_k| < \delta$ soit contenu dans un cube associé à $\sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)} F_i$, quel que soit $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et $i = 1, 2, \ldots, p$ (alors les coefficients des H_l^k sont analytiques dans cet intervalle). Posons $\delta_n = \frac{1}{2}\delta$; ayant défini $\delta_n \geqslant \ldots \geqslant \delta_k$, choisissons $\delta_{k-1} > 0$ de façon que l'on ait $\delta_{k-1} \leqslant \delta_k$ et que les relations $|x_1| < \delta_{k-1}, \ldots, |x_{k-1}| < \delta_{k-1}$ avec $H_l^{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}; \zeta) = 0$ impliquent $|\zeta| < \delta_l$, quel que soit $l = k, \ldots, n$ (cf. (13.2)). Ainsi nous avons défini une suite $\delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_n < \delta$ de façon que les conditions I et II soient remplies. Or, si l'on fait δ suffisamment petit, on voit de plus que les Φ_k sont analytiques et l'égalité (15.8) subsiste dans Q_k, que

(15.12) la proposition 3 du N° 14 s'applique à $\sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_j^k)} \Phi_j$ et à $\sigma^{(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)} F_2$, lorsque $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k) \in Q_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1;$ $j = k+1, \ldots, n;$ $i = 1, 2, \ldots, p)$,

que (cf. (15.9) et la proposition du N° 11)

(15.13) $\Phi_k(x_1, \ldots, x_k) = 0$ équivaut à $H_k^{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k) = 0$ lorsque $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_k| < \delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

que (cf. (15.10), la proposition du N° 11 et la proposition 4 du N° 14)

(15.14) $H_l^k(x_1, \ldots, x_k; x_l) = 0$ et $H_k^{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k)$ impliquent $H_l^{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_l) = 0$ lorsque $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_k| < \delta_k$, $|x_l| < \delta_l$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1;$ $l = k+1, \ldots, n)$.

Soit Z l'ensemble des zéros de Φ dans Q. Considérons les ensembles des $(x_1, \ldots, x_n)$

(15.15) $$V^k\colon\ \Phi_n = \ldots = \Phi_{k+1} = 0,\ \Phi_k \neq 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in Q \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$V^0\colon\ \Phi_n = \ldots = \Phi_1 = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in Q.$$

Nous avons donc (d'après (15.7)) la décomposition

(15.16) $$Z = V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0.$$

Supposons que $(x_1, \ldots, x_n) \in V_k$. Il résulte de (15.13) et (15.14) que l'on a alors: $H_{k+1}^k(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}) = \ldots = H_n^k(x_1, \ldots, x_k; x_n) = 0$.

Dans le cas où $k = 0$, $H_l^0(x_l)$ est égal à x_l ou à 1. Par conséquent, l'ensemble V^0 est vide ou il se réduit à $(0, \ldots, 0)$.

Supposons que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et considérons l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_k)$:

(15.17) $$Z_k\colon\ \Phi_k = 0,\ (x_1, \ldots, x_k) \in Q_k,$$

et l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$:

(15.18) $$\tilde{V}^k\colon\ H_{k+1}^k(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}) = \ldots = H_n^k(x_1, \ldots, x_k; x_n) = 0,$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \in Q_k - Z_k.$$

Nous avons donc (en tenant compte de II)

(15.19) $$V^k \subset \tilde{V}^k \subset Q.$$

Soit $k+1 \leqslant k \leqslant n$ et désignons par s_l^k le degré de H_l^k. Soit $0 \leqslant \nu \leqslant s_l^k$ et désignons par $\Omega_l^{k,\nu}$ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_k) \in Q_k - Z_k$ tels que le nombre des racines réelles de H_l^k au point $(x_1, \ldots, x_k)$ soit égal à ν. Nous avons donc la décomposition

(15.20) $$Q_k - Z_k = \bigcup_{\nu=0}^{s_l^k} \Omega_l^{k,\nu}.$$

Comme, d'après (15.17) et (15.18), $D_l^k \neq 0$ dans $Q_k - Z_k$, toutes les racines de H_l^k en chaque point de $Q_k - Z_k$ sont distinctes. Dans le cas où $\nu > 0$ et $\Omega_l^{k,\nu} \neq 0$ soient

$$\eta_l^{k,1}(x_1, \ldots, x_k) < \ldots < \eta_l^{k,\nu}(x_1, \ldots, x_k)$$

toutes les racines réelles de H_l^k au point $(x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_l^{k,\nu}$. Il résulte de la proposition du N° 12 que l'ensemble $\Omega_l^{k,\nu}$ est ouvert. On en déduit de plus que les fonctions $\eta_l^{k,\sigma}$ sont analytiques dans $\Omega_l^{k,\nu}$. En effet, si $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k) \in \Omega_l^{k,\nu}$, il existe une sphère $\mathcal{U}_0 \subset \Omega_l^{k,\nu}$ de centre $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k)$ et des fonctions $\eta_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \eta_\nu(x_1, \ldots, x_k)$ analytiques réelles et distinctes dans $\mathcal{U}_0$, dont les valeurs forment la suite complète des racines réelles de H_l^k au point $(x_1, \ldots, x_k)$; on a nécessairement $\eta_{\varepsilon_1} < \ldots < \eta_{\varepsilon_\nu}$ dans $\mathcal{U}_0$, où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu)$ est une permutation de $(1, \ldots, \nu)$; par conséquent $\eta_l^{k,\sigma} = \eta_{\varepsilon_\sigma}$ dans $\mathcal{U}_0$, $(\sigma = 1, \ldots, \nu)$, donc les $\eta^{k,\sigma}$ sont analytiques dans un voisinage de $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_k)$.

On tire de (15.20) la décomposition en ouverts

$$Q_k - Z_k = \bigcup \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}, \tag{15.21}$$

où

$$\Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n} = \bigcap_{l=k+1}^{n} \Omega_l^{k,\nu_l} \qquad (\nu_{k+1} = 0, \ldots, s_l^{k+1}; \ldots; \nu_n = 0, \ldots, s_l^n). \tag{15.22}$$

Si l'on introduit les sous-variétés

$$\Gamma^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n}: \begin{cases} x_l = \eta_l^{k,\sigma_l}(x_1, \ldots, x_k), \ l = k+1, \ldots, n, \\ (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}, \end{cases} \tag{15.23}$$

où $1 \leqslant \sigma_l \leqslant \nu_l$ $(l = k+1, \ldots, n)$ et $\Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n} \neq 0$, on trouve donc la décomposition

$$\tilde{V}^k = \bigcup \Gamma^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n}. \tag{15.24}$$

Considérons un des ouverts (15.22), non vide et tel que $\nu_{k+1} > 0, \ldots, \nu_n > 0$. D'après (15.21) et (15.17), on a

$$\Phi_k \neq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n} \tag{15.25}$$

et, par suite, aucun des facteurs du second membre de (15.8) ne s'annule dans $\Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}$. Il en résulte, selon (15.12), que l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}$ vérifiant

$$\Phi_j\big(x_1, \ldots, x_k; \eta_{k+1}^{k,\sigma_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \eta_j^{k,\sigma_j}(x_1, \ldots, x_k)\big) = 0$$

est ouvert, ainsi que l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}$ vérifiant

$$F_i\big(x_1, \ldots, x_k; \eta_{k+1}^{k,\sigma_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \eta_n^{k,\sigma_n}(x_1, \ldots, x_k)\big) = 0,$$

quels que soient $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = k+1, \ldots, n$; $\sigma_{k+1} = 1, \ldots, \nu_{k+1}$; $\ldots$; $\sigma_n = 1, \ldots, \nu_n$. Soit Θ^* l'ensemble des systèmes $(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_j; j)$ tels que $1 \leqslant \sigma_{k+1} \leqslant \nu_{k+1}, \ldots, 1 \leqslant \sigma_j \leqslant \nu_j$ et $k+1 \leqslant j \leqslant n$, et Λ^* l'ensemble des systèmes $(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n; i)$ tels que $1 \leqslant \sigma_{k+1} \leqslant \nu_{k+1}, \ldots, 1 \leqslant \sigma_n \leqslant \nu_n$ et $1 \leqslant i \leqslant p$. Quels que soient $\Theta \subset \Theta^*$ et $\Lambda \subset \Lambda^*$, l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_k)$

$$\Omega_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}: \begin{cases} \Phi_j\big(x_1, \ldots, x_k, \eta_{k+1}^{k,\sigma_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \eta_j^{k,\sigma_j}(x_1, \ldots, x_k)\big) \begin{cases} = 0 \text{ lorsque } (\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_j; j) \in \Theta, \\ \neq 0 \text{ lorsque } (\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_j; j) \in \Theta^* - \Theta, \end{cases} \\ F_i\big(x_1, \ldots, x_k, \eta_{k+1}^{k,\sigma_{k+1}}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \eta_n^{k,\sigma_n}(x_1, \ldots, x_k)\big) \begin{cases} = 0 \text{ lorsque } (\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n; i) \in \Lambda, \\ \neq 0 \text{ lorsque } (\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n; i) \in \Lambda^* - \Lambda, \end{cases} \\ (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}, \end{cases} \tag{15.26}$$

est donc ouvert et nous avons la décomposition

$$\Omega^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n} = \bigcup_{\Theta \subset \Theta, \Lambda \subset \Lambda^*} \Omega_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}. \tag{15.27}$$

Par conséquent la sous-variété (15.23) admet la décomposition

$$\Gamma^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n} = \bigcup \Gamma_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n} \tag{15.28}$$

en sous-variétés

$$\Gamma_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n}: \begin{cases} x_l = \eta_l^{k,\sigma_l}(x_1, \ldots, x_k), \ l = k+1, \ldots, n, \\ (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n} \end{cases} \tag{15.29}$$

$(\Omega_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \sigma_n} \neq 0)$, quels que soient $\sigma_{k+1} = 1, \ldots, \nu_{k+1}; \ldots; \sigma_n = 1, \ldots, \nu_n$.

On voit que les sous-variétés (15.29) jouissent des propriétés 1°-2° et 4°-5° (les relations (15.6) et 4° résultent de (15.25) et (15.27); l'alternative 5° est une conséquence de (15.26)).

Posons pour abréger $\Gamma = \Gamma_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n; \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n}$ et $\Omega = \Omega_{\Theta,\Lambda}^{k;\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n}$. En rapprochant (15.15) de (15.25) et (15.27), nous voyons que

$$V^{k+1} \cup \ldots \cup V^0 \subset (-\Omega) \times \mathcal{E}^{n-k}. \tag{15.30}$$

Comme, d'après (15.21) et (15.27), $Q_k - Z_k$ est une réunion disjointe et finie des ouverts (15.26), on a $Q_k \cap (\bar{\Omega} - \Omega) \subset Z_k$, d'où il résulte que $Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma) \subset Z_k \times \mathcal{E}^{n-k}$. Par conséquent

$$\Phi_k = 0 \quad \text{sur} \quad Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma). \tag{15.31}$$

Il résulte de (15.24) et (15.28) que $\tilde{V}^k$ est une réunion disjointe et finie des sous-variétés (15.29). Or, observons que l'on a, d'après (15.26), $\Phi_j = 0$ partout sur Γ ou $\Phi_j \neq 0$ partout sur Γ, quel que soit $j = k+1, \ldots, n$. En tenant compte de (15.15) et (15.19), on en conclut que chacune des sous-variétés (15.29) est contenue dans V^k ou dans $-V^k$. Par conséquent, comme $V^k \subset \tilde{V}^k$, V^k est aussi une réunion disjointe et finie des sous-variétés (15.29). Il reste donc à montrer que toute sous-variété (15.29) qui est contenue dans V^k satisfait à la condition 3°. Supposons donc que $\Gamma \subset V^k$. D'après (15.30), la seconde des inclusions 3° subsiste. Il résulte de (15.15) que l'on a $\Phi_n = \ldots = \Phi_{k+1} = 0$ sur Γ, donc il en est de même sur $Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma)$. Mais ceci donne avec (15.31), d'après (15.15), $Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma) \cap (V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0) = 0$. Comme on a évidemment $Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma) \subset Z$, donc $Q \cap (\bar{\Gamma} - \Gamma) \subset V^{k-1} \cup \ldots \cup V^0$, ce qui termine la démonstration.

Une inégalité. 16. Nous allons maintenant établir quelques évaluations élémentaires.

LEMME 1. *Soient* $K > 1$ *et* $\delta > 0$. *Si* $|c_i| \leqslant K$ *et* $|\tilde{c}_i - c_i| < \delta$ $(i = 1, \ldots, m)$, *alors pour toute racine* ζ *(complexe) de l'équation*

$$\zeta^m + c_1 \zeta^{m-1} + \ldots + c_m = 0 \tag{16.1}$$

il existe une racine $\tilde{\zeta}$ *de l'équation*

$$\tilde{\zeta}^m + \tilde{c}_1 \tilde{\zeta}^{m-1} + \ldots + \tilde{c}_m = 0 \tag{16.2}$$

telle que

$$|\tilde{\zeta} - \zeta| < 3K\delta^{1/m}. \tag{16.3}$$

Démonstration. Soit ζ une racine de l'équation (16.1). Si l'on pose $\tilde{\zeta} = \zeta + z$ dans (16.1), on obtient l'équation $z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m = 0$. Soit $z_1, \ldots, z_m$ la suite complète des racines; on peut admettre que $|z_1| \leqslant |z_j|$ $(j = 1, \ldots, m)$. On a alors

$$|z_1|^m \leqslant |z_1 \ldots z_m| = |b_m|. \tag{16.4}$$

Mais nous avons $b_m = \zeta^m + \tilde{c}_1 \zeta^{m-1} + \ldots + \tilde{c}_m = (\tilde{c}_1 - c_1)\zeta^{m-1} + \ldots + (\tilde{c}_m - c_m)$. Comme on a (cf. (13.2)) $|\zeta| \leqslant 2K$, donc $|b_m| \leqslant m\delta(2K)^m$, ce qui donne d'après (16.4), l'évaluation (16.3).

LEMME 2. *Soient* $K > 1$ *et* $L > 0$. *Si des fonctions* $c_1(t), \ldots, c_m(t)$ *définies dans un intervalle* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *satisfont aux conditions*

$$|c_i(t)| \leqslant K \quad \text{et} \quad |c_i(t_2) - c_i(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1| \quad \text{lorsque} \quad \alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{16.5}$$

alors toute fonction $\zeta(t)$ *continue et vérifiant*

$$[\zeta(t)]^m + c_1(t)[\zeta(t)]^{m-1} + \ldots + c_m(t) = 0 \quad \text{dans} \quad \langle \alpha, \beta \rangle \tag{16.6}$$

satisfait à la condition

$$|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)| \leqslant 6mKL^{1/m}|t_2 - t_1|^{1/m} \quad \text{lorsque} \quad \alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta. \tag{16.7}$$

Démonstration. Soit $\zeta(t)$ une fonction continue vérifiant (16.6) et supposons que $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$. Soit $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ la suite complète des racines de l'équation $\zeta^m + c_1(t_2)\zeta^{m-1} + \ldots + c_m(t_2) = 0$ et posons $\varepsilon_i = |\zeta_i - \zeta(t_1)|$; on peut admettre que $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_m$. Posons

$$\delta = L(t_2 - t_1); \tag{16.8}$$

d'après (15.5), il résulte du lemme 2 qu'on a $\varepsilon_{i_0} \leqslant 3K\delta^{1/m}$ pour un indice i_0. Soit i_1 le plus petit indice pour lequel l'intervalle $(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_1} + 6K\delta^{1/m})$ ne contient aucun des nombres $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$; on a alors $\varepsilon_{i_1} \leqslant \varepsilon_1 + (m-1)\cdot 6K\delta^{1/m}$, d'où

$$\varepsilon_{i_1} \leqslant (6m-3)K\delta^{1/m}. \tag{16.9}$$

Nous affirmons que l'on a

$$|\zeta(t) - \zeta(t_1)| \neq \varepsilon_{i_1} + 3K\delta^{1/m} \quad \text{pour} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle. \tag{16.10}$$

En effet, soit $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$; d'après (16.5) et (16.8) il résulte du lemme 2 que l'on a $|\zeta_j - \zeta(t)| < 3K\delta^{1/m}$ pour un indice j; si $|\zeta(t) - \zeta(t_1)| = \varepsilon_{i_1} + 3K\delta^{1/m}$, nous aurions

$$\varepsilon_{i_1} < \varepsilon_j = |\zeta_j - \zeta(t_1)| < \varepsilon_{i_1} + 6K\delta^{1/m}$$

contrairement à la définition de i_1.

Le premier membre de (16.10) étant continu pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ et nul pour $t = t_1$, on a nécessairement $|\zeta(t) - \zeta(t_1)| < \varepsilon_{i_1} + 3K\delta^{1/m}$ pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. En posant $t = t_2$, nous obtenons donc, d'après (16.9) et (16.8), $|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)| \leqslant 6mK\delta^{1/m} = 6mKL^{1/m}|t_2 - t_1|^{1/m}$, c. q. f. d.

Le lemme 2 entraîne la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathcal{E}^k$. *Si des fonctions* $A_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, A_m(x_1, \ldots, x_k)$ *satisfont dans* Ω *à la condition de Lipschitz*

$$|A_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k) - A_i(x_1, \ldots, x_k)| \leqslant M(|\tilde{x}_1 - x_1| + \ldots + |\tilde{x}_k - x_k|),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

(*où M est une constante*), *alors toute fonction $\eta(x_1, \ldots, x_k)$ continue et vérifiant*

$$[\eta(x_1, \ldots, x_k)]^m + A_1(x_1, \ldots, x_k)[\eta(x_1, \ldots, x_k)]^{m-1} + \ldots + A_m(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

dans Ω satisfait à la condition (H) *dans Ω* (cf. le N° 4) [26].

On en tire immédiatement (en vertu de la propriété II et de l'égalité (15.5) de la proposition du N° 15):

Corollaire. *Dans les hypothèses et les notations de la proposition du* N° 15, *la fonction ${}^{\varkappa}\eta_l^k$ satisfait à la condition* (H) *dans $\Omega_\varkappa^k$, quels que soient $k, \varkappa, l$.*

17. Théorème. *Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine, telle que $f(0, \ldots, 0) = 0$. Il existe un intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_n| < \delta_n$ contenu dans $\mathcal{U}$, une constante $d > 0$ et un exposant $q > 0$ tels que*

$$|f(x)| \geqslant d\varrho(x, Z_0)^q \quad \textit{lorsque} \quad x \in P,$$

où Z_0 est l'ensemble des zéros de f dans Q et P désigne l'intervalle

$$|x_1| < \frac{\delta_1}{2}, \ldots, |x_n| < \frac{\delta_n}{2} \text{ [27]}.$$

Il en résulte l'énoncé suivant:

Soit $f(x)$ une fonction analytique réelle dans un ouvert Ω de $\mathcal{E}^n$ et supposons que l'ensemble Z des zéros de f dans Ω ne soit pas vide. Soit E un compact contenu dans Ω. Il existe une constante $c > 0$ et un exposant $q > 0$ tels que

$$(17.1) \qquad |f(x)| \geqslant c\varrho(x, Z)^q \quad \textit{lorsque} \quad x \in E.$$

En effet, posons $M = \sup\limits_{x \in E} \varrho(x, Z)$. Comme $\varrho(x, Z \cap Q) \geqslant \varrho(x, Z)$ lorsque $Z \cap Q \neq 0$, il résulte du théorème que l'on peut faire correspondre à tout $x_0 \in E$ un intervalle P_{x_0} de centre x_0, une constante $c_{x_0} > 0$ et un exposant $q_{x_0} > 0$ tels que

$$(17.2) \qquad |f(x)| \geqslant c_{x_0}\left(\frac{\varrho(x, Z)}{M}\right)^{q_{x_0}} \quad \text{lorsque} \quad x \in P_{x_0}.$$

En vertu du théorème de Borel-Lebesgue il existe des $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $E \subset P_{x_1} \cup \ldots \cup P_{x_N}$. Si nous posons $q = \max(q_{x_1}, \ldots, q_{x_N})$ et

[26] On voit d'ailleurs que si les A_i satisfont à la condition (H) dans Ω, il en est de même de η.

[27] Dans le cas de variables complexes le théorème analogue est banal.

$c = \dfrac{1}{M^q}\min(c_{x_1}, \ldots, c_{x_N})$, nous obtenons l'inégalité (17.1) en vertu de (17.2).

On en déduit:

Proposition. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{E}^n$. Si f est une fonction analytique réelle dans un ouvert qui contient $\overline{\Omega}$ et si $f(x) \neq 0$ dans Ω, la restriction de f à Ω appartient à $\mathcal{G}_\Omega$* (cf. le N° 2).

Corollaire. *Supposons la proposition vraie dans le cas de $1, \ldots, n-1$ variables. Admettons les hypothèses et les notations de la proposition du* N° 15. *Si $F_i \neq 0$ sur $\Gamma_\varkappa^k$* (*cf. la propriété* III, 5°), *la fonction*

$$F_i(x_1, \ldots, x_k, {}^{\varkappa}\eta_{k+1}^k(x, \ldots, x_k), \ldots, {}_{\varkappa}\eta_n^k(x, \ldots, x_k))$$

appartient à $\mathcal{G}_{\Omega_\varkappa^k}$.

En effet, soit M une constante telle que $M \geqslant 1$ et $|F_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M$ lorsque $|z_1| < \delta_1, \ldots, |z_n| < \delta_n$ (z_i complexes, cf. la propriété I) et soit $s = s_{k+1} \ldots s_n$, où s_l désigne le degré de H_l^k; selon la proposition 2 du N° 14, d'après la propriété III, 4°, nous avons donc

$$|\sigma(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k F_i(x, \ldots, x_k)|$$
$$\leqslant M^{s-1}|F(x_1, \ldots, x_k, {}^{\varkappa}\eta_{k+1}^k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, {}^{\varkappa}\eta_n^k(x_1, \ldots, x_k))$$

dans $\Omega_\varkappa^k$, d'où résulte notre assertion, car (cf. la propriété II) la fonction $\sigma(H_{k+1}^k, \ldots, H_n^k)F_i$ est analytique dans un ouvert qui contient $\overline{\Omega}_\varkappa^k$.

Passons à la démonstration du théorème. Nous prouvons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Soient $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$ et $f(t)$ une fonction m fois continûment dérivable dans l'intervalle $\langle a-\tau, a+\tau\rangle$. Si l'on a $f(t) \neq 0$, $f'(t) \neq 0$ et $|f^{(m)}(t)| \geqslant \varepsilon$ dans $(a-\tau, a+\tau)$, alors*

$$(17.3) \qquad |f(a)| \geqslant \frac{\varepsilon}{(2m)^m}\tau^m.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. On a $|f(t)| \leqslant |f(a)|$ dans $\langle a, a+\tau\rangle$ ou dans $\langle a-\tau, a\rangle$. Considérons p. ex. le premier cas et posons $t_i = a + i\tau/m$, $i = 0, \ldots, m$. D'après le théorème des accroissements finis (généralisé pour la $m^{\text{ième}}$ dérivée il existe un $t^* \in (a, a+\tau)$ tel que

$$f^{(m)}(t^*) = \left[f(t_m) - \binom{m}{1}f(t_{m-1}) + \ldots + (-1)^m f(t_0)\right]\left(\frac{\tau}{m}\right)^{-m}.$$

Nous avons donc $\varepsilon \leqslant |f^{(m)}(t^*)| \leqslant 2^m|f(a)|(\tau/m)^{-m}$, d'où résulte l'inégalité (17.3).

Démonstration du théorème. Nous prouvons le théorème par récurrence sur le nombre des variables. Le théorème étant évident dans le cas d'une variable, supposons le vrai pour k variables, où $k = 1, \dots, n-1$. Par conséquent, le corollaire est vrai.

Le cas où $f \equiv 0$ étant banal, supposons que $f \not\equiv 0$. En effectuant au besoin une rotation nous pouvons admettre que $f(0, \dots, 0, x_n) \not\equiv 0$. Il existe alors un $m > 0$ tel que $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(0, \dots, 0) \neq 0$. Nous allons appliquer la proposition du N° 15, où l'on posera $\Phi = f\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, $p = 1$, $F_1 = f$ et prendra pour U un voisinage de l'origine dans lequel on a $\left|\dfrac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(\boldsymbol{x})\right| \geqslant \varepsilon$ (ε étant une constante positive). Il existe donc (après une rotation convenable en $x_1, \dots, x_{n-1}$) un intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \dots, |x_n| < \delta_n$ et une décomposition de l'ensemble Z des zéros de $f\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ dans Q, jouissant des propriétés I-III. On a alors

$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}(\boldsymbol{x})\right| \geqslant \varepsilon \quad \text{dans} \quad Q. \tag{17.4}$$

Soit Z_0 l'ensemble des zéros de f dans Q et soit P l'intervalle $|x_1| < \dfrac{\delta_1}{2}, \dots, |x_n| < \dfrac{\delta_n}{2}$. Désignons par Ξ la frontière de l'intervalle Q. Comme Z_0 contient l'origine, on a

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Xi) \geqslant \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0) \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in P. \tag{17.5}$$

Selon la propriété III, 5°, l'ensemble $Z_1 = Z - Z_0$ est une réunion disjointe (et finie) des sous-variétés $\Gamma^k_\varkappa$ sur lesquelles $f \neq 0$.

Considérons une sous-variété $\Gamma^k_\varkappa$ contenue dans Z_1. Posons $\Lambda^k_\varkappa = \overline{\Gamma^k_\varkappa} - \Gamma^k_\varkappa$. D'après la propriété III, 3°, on a

$$\Lambda^k_\varkappa \subset V^{k-1} \cup \dots \cup V^0 \cup \Xi. \tag{17.6}$$

Nous affirmons qu'il existe un ensemble $B^k_\varkappa$, une constante $c > 0$ et un exposant $N > 0$ tels que

$$\Gamma^k_\varkappa \cap P \subset B^k_\varkappa \subset P, \tag{17.7}$$

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant c\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^k_\varkappa)^N \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in B^k_\varkappa \tag{17.8}$$

et

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Gamma^k_\varkappa) \geqslant c\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^k_\varkappa)^N \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in P - B^k_\varkappa. \tag{17.9}$$

En effet, posons $\boldsymbol{u} = (x_1, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{v} = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ et $\boldsymbol{\eta} = ({}^\varkappa\eta^k_{k+1}, \dots, {}^\varkappa\eta^k_n)$ et soit $\varrho(\boldsymbol{u})$ la distance d'un point $\boldsymbol{u} \in \Omega^k_\varkappa$ à la frontière de $\Omega^k_\varkappa$. D'après le corollaire il existe une constante $c' > 0$ et un exposant $N' > 0$ tels que $|f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}))| \geqslant 2c'\varrho(\boldsymbol{u})^{N'}$ lorsque $\boldsymbol{u} \in \Omega^k_\varkappa$. Soit M une constante telle que l'on ait $|f(\tilde{\boldsymbol{x}}) - f(\boldsymbol{x})| \leqslant M|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}|$ pour $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in Q$ et considérons l'ensemble des $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

$$B^k_\varkappa\colon\ |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u})| \leqslant \frac{c'}{M}\varrho(\boldsymbol{u})^{N'}, \ \boldsymbol{u} \in \Omega^k_\varkappa, \ \boldsymbol{x} \in P. \tag{17.10}$$

On voit donc que les inclusions (17.7) ont lieu et que

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant c'\varrho(\boldsymbol{u})^{N'} \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in B^k_\varkappa. \tag{17.11}$$

D'après le corollaire du N° 16 et le lemme 1 du N° 4° il existe une constante $C > 0$ et un exposant $\sigma > 0$ tels que $\varrho(\tilde{\boldsymbol{x}}, \Lambda^k_\varkappa) \leqslant C_{\varrho(\boldsymbol{u})^\sigma}$ lorsque $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{u}))$ et $\boldsymbol{u} \in \Omega^k_\varkappa$. Il en résulte, d'après (17.10), que si $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in B^k_\varkappa$, on a

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^k_\varkappa) \leqslant \varrho(\tilde{\boldsymbol{x}}, \Lambda^k_\varkappa) + |\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}| \leqslant C^{\varrho(\boldsymbol{u})^\sigma} + \frac{c'}{M}\varrho(\boldsymbol{u})^{H'} \leqslant C'_{\varrho(\boldsymbol{u})^{\sigma'}},$$

où $C' > 0$ et $\sigma' > 0$ ne dépendent pas de $\boldsymbol{x}$. Mais ceci donne avec (17.11) l'inégalité $|f(\boldsymbol{x})| \geqslant c_1\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^k_\varkappa)^{N_1}$ pour $\boldsymbol{x} \in B^k_\varkappa$, où $c_1 = c'C'^{-1/\sigma'}$ et $N_1 = N'/\sigma'$. Enfin, il résulte du lemme 2 du N° 4 (puisque, d'après (17.10) $\Gamma^k_\varkappa$ jouit de la propriété (R) par rapport à $\Gamma^k_\varkappa \cup (P - B^k_\varkappa)$) que $\Gamma^k_\varkappa$ et $P - B^k_\varkappa$ sont régulièrement séparés par $\Lambda^k_\varkappa$; on a donc $\varrho(\boldsymbol{x}, \Gamma^k_\varkappa) \geqslant c_2\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^k_\varkappa)^{N_2}$ pour $\boldsymbol{x} \in P - B^k_\varkappa$, où $c_2 > 0$ et $N_2 > 0$ ne dépendent pas de $\boldsymbol{x}$. Evidemment, nous pouvons remplacer les c_1, c_2 et N_1, N_2 par des c, N communs pour (17.8) et (17.9) et pour tous les $k, \varkappa$ (vérifiant $\Gamma^k_\varkappa \subset Z_1$).

Soit G^k la réunion de tous les $B^l_\varkappa$ pour lesquels $l \leqslant k$ (et $\Gamma^k_\varkappa \subset Z_1$), $k = 1, \dots, n-1$. On a, d'après (17.7)

$$Z_1 \cap P \subset G^k, \tag{17.12}$$

$$P = G^1 \cup (G^2 - G^1) \cup \dots \cup (G^{n-1} - G^{n-2}) \cup (P - G^{n-1}). \tag{17.13}$$

Considérons le cas où $k = 1$. Puisque $V^0 \subset Z_0$, il résulte de (17.6) que $\Lambda^1_\varkappa \subset Z_0 \cap \Xi$. Par conséquent (cf. (17.5))

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda^1_\varkappa) \geqslant \varrho(x, Z_0) \quad \text{lorsque } \boldsymbol{x} \in P \quad (\Gamma^1_\varkappa \subset Z_1). \tag{17.14}$$

D'après (17.8) et (17.7) on en conclut que si $G^1 \neq 0$,

$$|f(x)| \geqslant c\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^N \quad \text{lorsque} \quad x \in G^1. \tag{17.15}$$

Maintenant nous allons montrer qu'il existe une constante $c_0 > 0$ et un exposant $N_0 > 0$ tels que

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^k) \geqslant c_0\, \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0^{N_0}) \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in P - G^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1,\ \Gamma_\varkappa^k \subset Z_1 \tag{17.16}$$

(on pose $G^0 = 0$). Procédons par récurrence. Pour $k = 1$ l'inégalité (17.16) a lieu (avec $c_0 = N_0 = 1$), en vertu de (17.14). Soit $2 \leqslant k \leqslant n-1$ et supposons que notre assertion soit vraie pour $1, \ldots, k-1$ (nous pouvons admettre que c_0, N_0 sont communs dans toutes les inégalités en question). Soit $\Gamma_\varkappa^k \subset Z_1$ et soit $\boldsymbol{x} \in P - G^{k-1}$. Il résulte de (17.6) que $\Lambda_\varkappa^k \subset \Xi \cup Z_0 \cup Y$, où $Y = \bigcup\limits_{l<k, \Gamma_k^l \subset Z_1} \Gamma_\varkappa^l$. Dans le cas où $Y = 0$, on a (cf. (17.5)) $\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^k) \geqslant \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)$. Dans le cas où $Y \neq 0$ nous avons (cf. (17.5)) $\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^k) \geqslant \min\big(\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0), \varrho(\boldsymbol{x}, Y)\big)$ et $\varrho(\boldsymbol{x}, Y) = \min\limits_{l \leqslant k, \Gamma_k^l \subset Z_1} \varrho(\boldsymbol{x}, \Gamma_k^l)$; comme on a $P - G^{k-1} \subset P - G^l \subset P - B_\varkappa^l$ lorsque $l < k$, nous avons donc, d'après (17.9) et l'hypothèse de récurrence, $\varrho(\boldsymbol{x}, Y) \geqslant \min\limits_{l<k, \Gamma_k^l \subset Z_1} c\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^l)^N \geqslant cc_0^N \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{N_0 N}$, d'où $\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^k) \geqslant \min\big(\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0), cc_0^N \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{N_0 N}\big)$. Par conséquent, il existe une constante $\bar{c} > 0$ et un exposant $\bar{N} > 0$ tels que $\varrho(\boldsymbol{x}, \Lambda_\varkappa^k) \geqslant \bar{c}\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{\bar{N}}$ dans tous les deux cas.

En combinant les inégalités (17.8) et (17.16) nous obtenons

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant cc_0^N \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{N_0 N} \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{x} \in G^k - G^{k-1} \quad (k = 2, \ldots, n-1). \tag{17.17}$$

Soit $\boldsymbol{x} \in P - G^{n-1}$. Supposons d'abord que $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in Z_0$. D'après (17-12), on a alors $x \in Q - Z$. Soit τ un nombre positif, le plus petit possible, tel que le segment I d'extrémités $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - \tau)$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \tau)$ soit contenu dans $Q - Z$. D'après (17.4), il résulte du lemme que

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant \frac{\varepsilon}{(2m)^m} \tau^m. \tag{17.18}$$

Or, l'une des extrémités, que nous désignerons par $\boldsymbol{x}^*$, appartient nécessairement à la frontière de l'ouvert $Q - Z$, c'est-à-dire à l'ensemble $\Xi \cup Z_0 \cup Z_1$. Si $\boldsymbol{x}^* \in \Xi$, on a $\tau \geqslant \frac{1}{2}\delta^n$. Dans le cas où $\boldsymbol{x}^* \in Z_0$, nous avons $\tau \geqslant \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)$. Supposons enfin que $\boldsymbol{x}^* \in Z_1$; on a alors $\boldsymbol{x}^* \in \Gamma_\varkappa^k \subset Z_1$ et, en tenant compte des inégalités (17.9) et (17.16), nous obtenons $\tau \geqslant \varrho(\boldsymbol{x}, \Gamma_\varkappa^k) \geqslant cc_0^N \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{N_0 N}$. Par conséquent il existe une constante $\tilde{c} > 0$ et un exposant $\tilde{N} > 0$ tels que $\tau \geqslant \tilde{c}\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{\tilde{N}}$ dans tous les trois cas. En vertu de (17.18) nous obtenons ainsi

$$|f(\boldsymbol{x})| \geqslant \frac{\varepsilon \tilde{c}^m}{(2m)^m} \varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^{\tilde{N} m} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{x} \in P - G^{n-1} \tag{17.19}$$

(y compris le cas où $\boldsymbol{x} \in Z_0$).

En rapprochant les inégalités (17.15), (17.17 et (17.19) de la relation (17.13), on voit qu'il existe une constante $d > 0$ et un exposant $q > 0$ tels que $|f(x)| \geqslant d\varrho(\boldsymbol{x}, Z_0)^q$ lorsque $\boldsymbol{x} \in P$, c. q. f. d.

Division par une fonction analytique réelle. 18. Soit $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage de l'origine, qui ne s'annule pas identiquement. On peut choisir les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de façon que $\Phi(0, \ldots, 0, x_n) \not\equiv 0$. Il existe alors un entier positif p tel que $\dfrac{\partial^p \Phi}{\partial x_n p}(0, \ldots, 0) \neq 0$ et, par conséquent, un voisinage $\mathcal{U}$ tel que

$$\frac{\partial^p \Phi}{\partial x_n p}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{U}. \tag{18.1}$$

Appliquons la proposition du N° 15, où $F_i = \dfrac{\partial^i \Phi}{\partial x_m^i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Il existe donc (après un choix convenable des coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-1}$) un intervalle Q et une décomposition de l'ensemble Z des zéros de Φ dans Q, jouissant des propriétés I-III. Vérifions que les hypothèses de la proposition du N° 10 sont satisfaites si l'on prend $G = Q$. En comparant les énoncés des deux propositions, on voit qu'il ne reste qu'à montrer les propriétés suivantes:

La restriction de Φ à $Q - Z$ appartient à $\mathcal{G}_{Q-Z}$. Ceci résulte de la proposition du N° 17 (en tenant compte de I).

La fonction ${}^\varkappa\eta_l^k$ satisfait à la condition (H) *dans $\Omega_\varkappa^k$ (quels que soient k, l, $\varkappa$).* C'est le corollaire du N° 16.

La fonction ${}^\varkappa\eta_l^k$ appartient à $\mathcal{H}_{\Omega_\varkappa^k}$ (quels que soient k, l, $\varkappa$).

En effet, posons $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_k)$ et soit $\varrho(\boldsymbol{u})$ la distance d'un point $\boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k$ à la frontière de $\Omega_\varkappa^k$. D'après (15.6), en vertu de la proposition du N° 17, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un exposant $q > 0$ tels que

$$|D_l^k(\boldsymbol{u})| \geqslant \varepsilon\varrho(\boldsymbol{u})^q \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k \tag{18.2}$$

(on peut exiger que ε et q soient communs pour tous les k, $\varkappa$, l). D'autre part, grâce à la formule (12.2), on a

$$|D_l^k(\boldsymbol{u})| \leqslant \left| \frac{\partial H_l^k}{\partial x_l}\big(\boldsymbol{u}, {}^\varkappa\eta_l^k(\boldsymbol{u})\big) \right| M^{s-1} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k,$$

où s désigne le dégré de H_l^k et M est une constante telle que $\left|\frac{\partial H_l^k}{\partial x_l}(\boldsymbol{u}, z)\right| \leqslant M$ lorsque $\boldsymbol{u} \in Q_k$ et $|z| < \delta_k$ (z complexe, cf. II). En comparant avec (18.2) on voit que la fonction $\frac{\partial H_l^k}{\partial x_l}(\boldsymbol{u}, {}^{\varkappa}\eta_l^k(u))$ appartient à $\mathcal{G}_{\Omega_\varkappa^k}$, ce qui prouve, selon le lemme 3 du N° 2 (cf. (15.5)), que ${}^{\varkappa}\eta_l^k$ appartient à $\mathcal{H}_{\Omega_\varkappa^k}$.

L'hypothèse 3° [28]. Considérons une sous-variété $\Gamma_\varkappa^k$. Grâce à la formule (12.2), nous avons (cf. II et III, 1°) $|D_l^k(\boldsymbol{u})| \leqslant |{}^{\varkappa'}\eta_l^k(\boldsymbol{u}) - {}^{\varkappa}\eta_l^k(\boldsymbol{u})|\,\delta_l^{s(s-1)-1}$ pour $\boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k$ dans le cas où $\Omega_{\varkappa'}^k = \Omega_\varkappa^k$ et ${}^{\varkappa}\eta_l^k \neq {}^{\varkappa'}\eta_l^k$ (cf. III, 2°). En comparant avec (18.2) on voit qu'il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que

$$(18.3)\qquad |{}^{\varkappa}\eta_l^k(\boldsymbol{u}) - {}^{\varkappa'}\eta_l^k(\boldsymbol{u})| > \varepsilon_0\,\varrho(\boldsymbol{u})^q \quad \text{lorsque} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k,$$
$$l = k+1, \ldots, n, \quad \Omega_{\varkappa'}^k = \Omega_\varkappa^k \text{ et } {}^{\varkappa}\eta_l^k \neq {}^{\varkappa'}\eta_l^k.$$

Considérons l'ensemble des $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$

$$B\colon\ |x_{k+1} - {}^{\varkappa}\eta_{k+1}^k(\boldsymbol{u})| < \varepsilon_0\,\varrho(u)^q, \ldots, |x_n - {}^{\varkappa}\eta_n^k \boldsymbol{u})| < (\varepsilon_0)\,\varrho(u)^q, \ \boldsymbol{u} \in \Omega_\varkappa^k.$$

Nous avons $V^k \cap B = \Gamma_\varkappa^k$, en vertu de (18.3) et III, 2°. Comme on a, d'après la seconde des inclusions III, 3°, $(V^{k-1} \cup \ldots \cup V^0) \cap B = 0$, donc $(V^k \cup \ldots \cup V^0) \cap B = \Gamma_\varkappa^k$, ce qui prouve que $\Gamma_\varkappa^k$ jouit de la propriété (R) par rapport à $V^k \cup \ldots \cup V^0$.

L'hypothesè 4°. Elle résulte du corollaire du N° 17, en vertu de (18.1).

Nous pouvons donc appliquer la proposition du N° 10: l'équation $\Phi S = T$ admet une solution $S \in \mathcal{P}'_Q$, quelle que soit la distribution $T \in \mathcal{P}'_Q$.

Ainsi, nous avons démontré que la division d'une distribution par une fonction analytique réelle (qui ne s'annule pas identiquement) est toujours possible localement. Mais ceci entraîne déjà (cf. [10], p. 126) qu'elle est possible globalement et nous obtenons finalement le

Théorème. *Soit $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction analytique réelle dans un ouvert G de $\mathcal{E}^n$ qui ne s'annule identiquement dans aucun ouvert contenu dans G. Pour toute distribution T définie dans G il existe une distribution S définie dans G telle que $\Phi S = T$.*

Appendice *

Le but de cet appendice est la démonstration d'une propriété d'un ensemble analytique réel appelée *propriété de Whitney* (cf. [11], p. 98; la définition est répétée dans le N° III).

---

(28) Cf. la remarque du N° 4.

* Ajouté, le 5 octobre 1958.

I. D'abord nous allons démontrer la suivante propriété d'un ensemble analytique réel:

Soit D un ensemble compact de $\mathcal{E}^n$ et soit Z l'ensemble des zéros d'une fonction analytique réelle dans un ouvert qui contient D. Il existe alors un entier N tel que le nombre des points de l'intersection de Z avec un segment quelconque, situé dans D, ne surpasse pas N, à moins que ce segment ne soit pas contenu dans D.

Evidemment, grâce au théorème de Borel-Lebesgue, il suffit de prouver cette propriété dans le cas d'un cube $|x_1| \leqslant \sigma, \ldots, |x_n| \leqslant \sigma$, où la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ qui définit la variété Z soit définie dans $|x_1| \leqslant 4\sigma, \ldots, |x_n| \leqslant 4\sigma$. Si l'on introduit la fonction $g(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, t) = f(x_1 + u_1 t, \ldots, x_n + u_n t)$, on voit qu'il suffit de prouver cette propriété pour l'ensemble des zéros de g et pour les segments parallèles à l'axe t et situés dans le cube $|x_0| \leqslant \sigma, \ldots, |x_n| \leqslant \sigma, |u_1| \leqslant 2\sigma, \ldots, |u_n| \leqslant 2\sigma$, $|t| \leqslant 1$ (la fonction g est analytique dans un ouvert qui contient ce cube).

Or ceci résulte de la suivante proposition que nous allons démontrer:

Proposition. *Soit $F(z_1, \ldots, z_k, t)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le compact D donné par $(z_1, \ldots, z_k) \in C$, $|z-a| \leqslant \sigma$. Il existe un entier N tel que pour tout $(z_1, \ldots, z_k) \in C$ le nombre des racines de la fonction $\varphi(t) = F(z_1, \ldots, z_k, t)$ dans le cercle $|t-a| \leqslant \sigma$ ne surpasse pas N, à moin que φ ne s'annule pas identiquement.*

Prouvons d'abord le

Lemme. *A chaque couple d'une constante $A > 0$ et d'un entier $N \geqslant 0$ on peut attacher un $\delta = \delta(A, N)$ de manière à satisfaire à la condition suivante: si $r < \delta$ et si $f(t)$ est une fonction holomorphe vérifiant*

$$(1)\qquad |f^{(N+1)}(t)| \leqslant A\left(|f(t)| + \ldots + |f^{(N)}(t)|\right)$$

dans un cercle $|t-t_0| < 3r$, le nombre des racines de f dans le cercle $|t-t_0| < r$ ne surpasse pas N, à moins que f ne s'annule pas identiquement.

Démonstration du lemme. Soit δ un nombre positif que nous allons choisir et soient r, f comme dans l'énoncé du lemme. On a $|f(^{(k)}t_1)| = \max\limits_{\nu=0,\ldots,} \{\max\limits_{|t-t_0| \leqslant 2r} |f^{(\nu)}(t)|$ pour un k et un t_1 vérifiant $0 \leqslant k \leqslant N$ et $|t-t_1| = 2r$. Nous avons ensuite

$$(2)\qquad f(t) = P(t) + \varepsilon(t),$$

où

$$(3)\qquad P(t) = f(t_1) + f'(t_1)(t-t_1) + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_1)(t-t_1)^k$$
$$= \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_1)(t-\tau_1)\ldots(t-\tau_k)$$

et

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t_1) + \ldots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(t_1)(t-t_1)^N + \int_{t_1}^{t} \frac{(t-u)^N}{N!} f^{(N+1)}(u)\,du$$

(l'intégrale sur le segment d'extrémités t_1, t). En tenant compte de (1) on en déduit

$$(4) \qquad |\varepsilon(t)| \leqslant A_1 |f^{(k)}(t_1)| r^{k+1} \quad \text{dans} \quad |t-t_0| \leqslant 2r,$$

où la constante positive A_1 ne dépend que de A et de N. Or, il existe un r_1 vérifiant $r < r_1 < 2r$ et tel que $\big||\tau_i|-r_1\big| \geqslant r/2N$, $i = 1, \ldots, N$, et on a par conséquent

$$(5) \qquad |P(t)| \geqslant \frac{1}{k!} |f^{(k)}(t_1)| \frac{r}{(2N)^k} \quad \text{sur} \quad |t-t_1| = r_1,$$

en vertu de (3). Maintenant il suffit d'admettre $\delta = 1/2A_1 N!(2N)^N$. En effet, on a alors $A_1 r^{k+1} < r^k/k!(2N)^k$, donc, sauf le cas où $f^{(k)}(t_1) = 0$ dans lequel $f \equiv 0$, on a, d'après (4) et (5), $|\varepsilon(t)| < |P(t)|$ sur $|t-t_0| = r_1$ et par conséquent, d'après (2), selon le théorème de Rouché, le nombre des racines de f dans le cercle $|t-t_0| < r_1$ est égale à celui de P.

Démonstration de la proposition. Soit $(z_{10}, \ldots, z_{k0}, t_0)$ un point de D; grâce au théorème de Borel-Lebesgue il suffit de prouver la thèse pour un polycylindre $|z_1 - z_{10}| < \varepsilon, \ldots, |z_k - z_{k0}| < \varepsilon$, $|t-t_0| < \varepsilon$. Considérons l'idéal (de fonctions holomorphes) au point $(z_{10}, \ldots, z_{k0}, t_0)$ engendré par la suite $F, \partial F/\partial t, \partial^2 F/\partial t^2, \ldots$ Selon un théorème de H. Cartan (cf. [12], p. 191, théorème α) il existe un entier N et un voisinage compact W de $(Z_{10}, \ldots, z_{k0}, t_0)$ (contenu dans le domaine de holomorphie de F), tels que toute fonction Φ de cet idéal, holomorphe dans un ouvert contenant W, est de la forme $\Phi = g_0 F_0 + \ldots + g_N \partial^N F/\partial t^N$ dans W, où $g_1, \ldots, g_N$ sont holomorphes dans un ouvert contenant W. En prenant pour Φ la dérivée $\partial^{N+1} F/\partial t^{N+1}$, on en déduit l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^{N+1} F}{\partial t^{N+1}}\right| \leqslant A\left(|F| + \ldots + \left|\frac{\partial^N F}{\partial t^N}\right|\right).$$

où A est une constante. Soit δ le nombre associé à A et N selon le lemme. Si l'on choisi $\varepsilon > 0$ de façon que le polycylindre $|z_1 - z_{10}| < \varepsilon, \ldots, |z_k - z_{k0}| < \varepsilon$, $|t-t_0| < \varepsilon$ soit contenu dans W, on obtient, conformément au lemme, la thèse da la proposition pour ce polycylindre, c. q. f. d.

II. Revenons aux idées et aux notations du N° 15. Nous avons l'énoncé que voici:

Soient $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage U de l'origine. En effectuant au besoin une rotation on peut choisir les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ d'une telle façon qu'il existe un intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_n| < \delta_n$ et un système des polynomes distingués:

$$H_l^k(x_1, \ldots, x_k; x_l) \quad (k = 0, \ldots, n-1;\ l = k+1, \ldots, n),$$

à discriminants $D_l^k(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$, ayant les propriétés I et II de la proposition 1 ainsi que la propriété suivante.

III'. Il existe la décomposition $Q = V^n \cup \ldots \cup V^0$, avec les propriétés suivantes. L'ensemble V^0 est vide ou se réduit à l'origine. L'ensemble V^k $(k > 0)$ est une réunion disjointe et finie

$$V^k = \bigcup_{\varkappa} \Gamma_\varkappa^k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

où $\Gamma_\varkappa^n = \Omega_\varkappa^n$ sont des ouverts et $\Gamma_\varkappa^k$ jouissent des propriétés:

1°, 2°, 4° (de la proposition 1) pour $k < n$;

3° pour $k < n$, et $Q \cap (\bar{\Omega}_\varkappa^n - \Omega_\varkappa^n) \subset V^{n-1} \cup \ldots \cup V^0 \subset -\Omega_\varkappa^n$;

5°° (pour $k \leqslant n$): quel que soit $i = 1, \ldots, p$, on a $F = 0$ sur $\Gamma_\varkappa^k$ ou $F_i > 0$ sur $\Gamma_\varkappa^k$ ou $F < 0$ sur $\Gamma_\varkappa^k$.

En effet, on observe d'abord que l'on peut remplacer la propriété 5° par la propriété 5°° dans l'énoncé de la proposition 1; à cet effet on modifie les définitions (15.26) dans la démonstration (en prenant les décompositions de A en trois parties). Maintenant il suffit appliquer cette proposition dans le cas de $n+1$ variables, où $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}$ (les $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ étant considérées comme des fonctions de $n+1$ variables).

Or cet énoncé entraîne la

PROPOSITION. *Soient $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions analytiques réelles dans un voisinage U de l'origine. En effectuant au besoin une rotation on peut choisir les coordonnées d'une telle façon qu'il existe un intervalle Q: $|x_1| < \delta_1, \ldots, |x_n| < \delta_n$ et un système des polynomes distingués:*

$$H_l^k(x_1, \ldots, x_k; x_l) \quad (k = 0, \ldots, n-1;\ l = k+1, \ldots, n),$$

à discriminants $D_l^k(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$, ayant les propriétés I *et* II *de la proposition* 1 *ainsi que la propriété suivante:*

III''. *Pour chaque ensemble E qui peut être obtenu par un nombre fini de réunions et d'intersections des ensembles donnés par $F_i \geqslant 0$ ou par $F_i \leqslant 0$, il existe la décomposition $Q \cap E = V^n \cup \ldots \cup V^0$ avec toutes les propriétés de l'énoncé précédent.*

III. On dit qu'un ensemble localement fermé E est *régulier* (cf. [11], p. 98) ou qu'il possède la *propriété de Whitney*, si pour tout $a \in E$ il existe un voisinage U de a, une constante $M > 0$ et un exposant $\sigma > 0$ tels que deux points quelconques x_1, x_2 de $W \cap E$ puissent être joints par un arc rectifiable contenu dans E, dont la longueur ne surpasse pas $M|x_2 - x_1|^\sigma$.

THÉORÈME. *Soient $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions analytiques dans un ouvert G. Chaque ensemble E qui peut être obtenu par un nombre fini de réunions et d'intersections des ensembles donnés par $F_i \geqslant 0$, possède la propriété de Whitney.*

Démonstration. Soit $a \in E$; nous pouvons admettre que $a = 0$. Appliquons la proposition du N° II, et admettons toutes les notations de cette proposition. Prenons pour W le pavé $|x_1| < \delta_1/2^n, \ldots, |x_n| < \delta_n/2^n$.

Il résulte de la proposition du N° 16 (cf. le corollaire) que la fonction ${}^{\varkappa}\eta_l^k$ satisfait à la condition (H) dans $\Omega_\varkappa^k$, quels que soient $k, \varkappa, l$ $(k < n)$. Il existe donc une constante $M_1 > 0$ et un exposant $\sigma_1 > 0$ tels que pour $k, \varkappa, l$ $(k < n)$ quelconques on a

$$|\eta_\varkappa^k(u_2) - \eta_\varkappa^k(u_1)| \leqslant M_1 |u_2 - u_1|^{\sigma_1}, \tag{6}$$

où $\eta_\varkappa^k = ({}^{\varkappa}\eta_{k+1}^k, \ldots, {}^{\varkappa}\eta_n^k)$, pourvu que le segment $I_{u_1u_2}$ d'extrémités u_1, u_2 soit contenu dans $\Omega_\varkappa^k$. Selon la propriété démontré dans l'appendice, il existe un entier N (qui ne dépend pas de $k, \varkappa, l, u_1, u_2$) tel que le nombre des $u \in I_{u_1u_2}$ pour lesquels on a ${}^{\varkappa}\eta_l^k(u) = \xi$ ne surpasse pas N, quel que soit ξ; il en résulte que la longueur $l_\varkappa^k(u_1, u_2)$ de l'arc: $v = \eta_\varkappa^k(u)$, $u \in I_{u_1u_2}$ ne surpasse pas $(n-k)NM_1|u_1 - u_2| + |u_1 - u_2|$. Par conséquent il existe une constante $M_2 > 0$ et un exposant $\sigma_2 > 0$ tels que pour $k, \varkappa$ $(k < n)$ quelconques on a

$$l_\varkappa^k(u_1, u_2) \leqslant M_2 |u_2 - u_1| \quad \text{pourvu que } I_{u_1u_2} \subset \Omega_\varkappa^k. \tag{7}$$

Si $k < n$, chaque $\Gamma_\varkappa^k$ jouit de la propriété (R) par rapport à $V^k \cup \ldots \cup V^0$; la démonstration est identique à celle du N° 18 (vérification de l'hypothèse 3°). Par conséquent, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un exposant $q > 0$ tels qu'on a $(V^k \cup \ldots \cup V^0) \cap B_\varkappa^k = \Gamma_\varkappa^k$ pour l'ensemble B donné par

$$|v - \eta_\varkappa^k(u)| < \varepsilon \varrho_\varkappa^k(u)^q, \quad u \in \Omega_\varkappa^k,$$

où $\varrho_\varkappa^k(u)$ désigne la distance du point u à la frontière de $\Omega_\varkappa^k$, quels que soient $k, \varkappa$ $(k < n)$. En tenant compte de (6) on en déduit facilement qu'il existe une constante $M_3 > 0$ et un exposant $\sigma_3 > 0$ tels qu'on a

$$\varrho_\varkappa^k(u) \leqslant M_3 |x' - x|, \text{ lorsque } x = (u, v) \in \Gamma_\varkappa^k \text{ et } x' \in (V^k \cup \ldots \cup V^0) - \Gamma_\varkappa^k, \tag{8}$$

quels que soient $k, \varkappa$ $(k < n)$.

Il existe un s tel que $V^s \neq 0$ et $V^{s-1} \cup \ldots \cup V^0 = 0$. Notre théorème est banal dans le cas où $s = n$, car on a alors $E \cap Q = \Omega_\varkappa^n = Q$, en vertu de la propriété 3°. Supposons donc que $s < n$. Désignons par U_k le pavé: $|x_1| < \delta_1/2^k, \ldots, |x_k| < \delta^k/2^k, |x_{k+1}| < \delta_{k+1}, \ldots, |x_n| < \delta_n$. On a $W = U_n \subset \ldots \subset U_1 \subset U_0 = Q$.

Il suffit de prouver l'assertion suivante: il existe une constante $M > 0$ et un exposant $\sigma > 0$ tels que deux points quelconques $x_1 \in V^{k_1} \cap U_{k_1}$ et $x_2 \in V^{k_2} \cap U_{k_2}$ peuvent être joints par un arc rectifiable contenu dans E, dont la longueur ne surpasse pas $M|x_2 - x_1|^\sigma$, quels que soient $k_1, k_2 = s, \ldots, n$.

Procédons par récurrence sur $k_1 + k_2$.

Supposons que $k_1 + k_2 = 2s$ ou, ce qui revient au même, que $k_1 = k_2 = s$. Le cas où $s = 0$ étant banal, admettons que $s > 0$. Grâce à la propriété 3°, on a alors $\Omega_\varkappa^s = Q_s$. Mais, selon la propriété 1°, tous les $\Gamma_\varkappa^s$ contiennent l'origine, comme H_1^s sont des polynômes distingués. On a donc $V^s = \Gamma_\varkappa^s$, d'où il résulte, d'après (7), que l'assertion est vraie.

Soit $2s < p \leqslant 2n$; supposons que l'assertion soit vraie lorsque $2s \leqslant k_1 + k_2 < p$ et considéronsle cas où $k_1 + k_2 = p$. Nous pouvons admettre que $k_1 \geqslant k_2$; on a alors $k_1 > s$. Soient $x_1 \in V^{k_1} \cup U_{k_1}$ et $x_2 \in V^{k_2} \cap U_{k_2}$; on a donc $x_1 \in \Gamma_{\varkappa_1}^{k_1}$ et $x_2 \in \Gamma_{\varkappa_2}^{k_2}$. Quel que soit $i = 1, 2$, on a $x_i = (u_i, \eta_{\varkappa_2}^{k_2}(u_i))$, où $u_i \in \Omega_{\varkappa_i}^{k_i}$, si $k_i < n$, et nous posons $u_i = x_i$, si $k_i = n$. Dans le cas où $k_1 = k_2$, $\Gamma_{\varkappa_1}^{k_1} = \Gamma_{\varkappa_2}^{k_2}$ et $I_{u_1u_1} \subset \Omega_{\varkappa_1}^{k_1} = \Omega_{\varkappa_2}^{k_2}$, les points x_1, x_2 sont joints par le segment contenu dans E, lorsque $k_1 = k_2 = n$, tandis que, si $k_1 = k_2 < n$, ils sont joints par l'arc: $v = \eta_{\varkappa_1}^{k_1}(u)$, $u \in I_{u_1u_2}$, dont la longueur ne surpasse pas $M_2|x_1 - x_2|^{\sigma_2}$, en vertu de (7). Il reste donc à considérer le cas contraire. Soit u_0 un point tel que $I_{u_1u_2} - \Omega_{\varkappa_1}^{k_1}$ se réduit à u_0. Il lui correspond un arc γ_1 d'extrémités x_1, x_0, situé (saufle point x_0) sur $\Gamma_{\varkappa_1}^{k_1}$, égal à $I_{u_1u_0}$, si $k_1 = n$, et donné (sauf le point x_0) par: $v = \eta_\varkappa^k(u)$, $u \in I_{u_1u_2}$, lorsque $k_1 < n$, Dans le deuxième cas, d'après (7), la longueur de γ_1 ne surpasse pas $M_2|u_1 - u_0|^{\sigma_2}$. Supposons que $x_0 \in U_{k_1-1}$. Selon la propriété 3°, on a alors $x_0 \in V^{k_0} \cap U_{k_0}$ pour un $k_0 < k_1$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, les points x_0, x_2 peuvent être joints par un arc rectifiable γ_2, dont la longueur ne surpasse pas $M|x_2 - x_0|^\sigma$. On en conclut que

(9) la longueur de $\gamma_1 \cup \gamma_2$ est

$$\leqslant \begin{cases} |u_1 - u_0| + M(|x_2 - x_1| + |u_1 - u_0|)^\sigma & \text{lorsque } k_1 = n, \\ M_2|u_1 - u_0|^{\sigma_2} + M(|x_2 - x_1| + M_2|u_1 - u_0|^{\sigma_2})^\sigma & \text{lorsque } k_1 < n. \end{cases}$$

Choisissons maintenant le point u_0 de la manière suivante. Dans le cas où $\Gamma_{\varkappa_1}^{k_1} = \Gamma_{\varkappa_2}^{k_2}$ le point u_0 peut être déterminé par la condition que

$I_{u_1 u_0} \subset I_{u_1 u_0}$ et que $I_{u_1 u_0} - \Omega_{\varkappa 1}^{k_1}$ se reduit à u_0, car nous avons admis que $I_{u_1 u_2} \subset \Omega_{\varkappa 2}^{k_1}$. Comme $x_1, x_2 \in U_{k_1}$, on a alors $x_0 \in U_{k_1} \subset U_{k_1-1}$, grâce à la propriété II. Nous avons évidemment

$$|u_1 - u_0| \leqslant |x_2 - x_1|. \tag{10}$$

Dans le cas où $\Gamma_{\varkappa 1}^{k_1} \neq \Gamma_{\varkappa 2}^{k_2}$, choisissons u_0 sur la frontière de $\Omega_{\varkappa 1}^{k_1}$ de façon que l'on ait $|u_1 - u_0| = \varrho_{\varkappa 1}^{k_1}(u_1)$. Comme V^s contient l'origine et $k_1 > s$, donc $\Omega_{\varkappa 1}^{k_1}$ ne contient pas $(0, \ldots, 0)$, en vertu de la propriété 3°. Comme u_1 appartient à l'intervalle $|x_1| < \delta_1/2^{k_1}, \ldots, |x_k| < \delta_{k_1}/2^{k_1}$, il en résulte que u_0 appartient à l'intervalle $|x_1| < \delta_1/2^{k_1-1}, \ldots, |x_k| < \delta_{k_1}/2_{k_1-1}$ et, par conséquent, que $x_0 \in U_{k_1-1}$. Comme $x_2 \in V^{k_1} \cup \ldots \cup V^0 - \Gamma_{\varkappa 1}^{k_1}$, nous avons, selon (8),

$$|u_1 - u_0| \leqslant M_3 |x_2 - x_1|^{\sigma_3}, \tag{11}$$

lorsque $k_1 < n$. Si $k_1 = n$ on a

$$|u_1 - u_0| \leqslant |x_2 - x_1|, \tag{12}$$

parsque $x_1 = u_1$ et $x_2 = u_2 \notin \Omega_{\varkappa 1}^{k_1}$. En comparant les inégalités (9)-(12) nous voyons que l'assertion est vraie pour le couple k_1, k_2 considéré, c. q. f. d.

Travaux cités

[1] A. Albert, *Modern higher algebra*, Chicago 1947.

[2] A. Bielecki, *O integralnym przedstawieniu m-wymiarowych powierzchni za pomocą funkcji uwikłanych*, Dodatek do Rocznika PTM, Tom VII, Kraków 1935.

[3] S. Bochner, W. Martin, *Several complex variables*, Princeton 1948.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre, Chap. II, Algèbre linéaire*, Paris 1955.

[5] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[6] S. Łojasiewicz, *Division d'une distribution par une fonction analytique des variables réelles*, Comptes Rendus Paris 246 (1958), p. 683-686.

[7] C. C. Mac Duffee, *An introduction to abstract algebra*, New York 1940.

[8] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie, II,1*, Leipzig 1929.

[9] L. Schwartz, *Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique*, Summa Brasil. Math. 39 (1955), p. 181-209.

[10] — *Théorie des distributions, I*, Paris 1957.

[11] B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra, I*, Berlin 1937.

[12] H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes*, Annales Ec. Norm. Sup. 61 (1944), p. 149-197.

Reçu par la Rédaction le 26. 7. 1958

STUDIA MATHEMATICA publient des travaux de recherches (en langues des congrès internationaux) concernant l'Analyse fonctionnelle, les méthodes abstraites d'Analyse et le Calcul de probabilité. Chaque volume contient au moins 300 pages.

Les manuscrits dactylographiés sont à adresser à

M. Hugo Steinhaus

Wrocław 12 (Pologne), ul. Orłowskiego 15,

ou à

M. Marceli Stark

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Les auteurs sont priés d'indiquer dans tout renvoi bibliographique le nom de l'auteur et le titre du travail cité, l'édition, le volume et l'année de sa publication, ainsi que les pages initiale et finale.

Adresse de l'échange:

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

STUDIA MATHEMATICA sont à obtenir par l'intermédiaire de

ARS POLONA

Warszawa (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

Le prix de ce fascicule est 2 $.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA