ACTA ARITHMETICA
VI (1960)

Über einige Abschätzungen in Idealklassen

von

W. Staś (Poznań)

1. Es sei ϑ — eine beliebige algebraische Zahl, ferner K — der durch ϑ erzeugte algebraische Zahlkörper, ν — der Grad des Körpers K und Δ — die Diskriminante des Körpers.

Es bezeichne $\mathfrak{f}$ — irgendein festes Ideal des Körpers K, $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ — die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ — Primideal.

Es bezeichne weiter $\mathcal{H}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})$ eine Idealklasse $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$ ([2], Df. VIII), $\mathcal{H}_0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})$ — die Hauptklasse $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$, $h(\mathfrak{f})$ — die Klassenzahl $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$, $\chi(\mathcal{H})$ — irgendeinen der $h(\mathfrak{f})$ Charaktere der Abelschen Gruppe der Klassen $\mathcal{H}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})$, $\chi(\mathfrak{a})$ einen Charakter $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$ ([2], Df. X); $\zeta(s,\chi)$ — die Landauschen ζ-Funktionen ([2], Df. XVII), $\zeta_K(s)$ — die Dedekindschen ζ-Funktionen.

Es bedeute endlich

$$\Delta(x,\mathcal{H}) = \sum_{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m\leqslant x,\ \mathfrak{p}^m\in\mathcal{H}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})} \log\mathfrak{N}\mathfrak{p} - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}, \tag{1.1}$$

$$\Delta(x,\mathcal{H}_0) = \sum_{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m\leqslant x,\ \mathfrak{p}^m\in\mathcal{H}_0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})} \log\mathfrak{N}\mathfrak{p} - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}. \tag{1.2}$$

Ich werde mit den Methoden von Turán den folgenden Satz zeigen:

Satz. *Sei $\mathfrak{f}$ irgendein festes Ideal des Körpers K, χ ein Charakter* $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$ *und $A_{\mathfrak{f}}$ die Menge der nichttrivialen Nullstellen aller $\zeta(s,\chi)$-Funktionen.*

Sei ferner $\varepsilon(\tau) = \max\limits_{\varrho=\beta+\gamma i\in A_{\mathfrak{f}},|\gamma|\leqslant\tau}\beta$ und *c_1, c_2 die explizit angebbaren numerischen Konstanten.*

Dann für

$$T > \max\left(c_1, \exp\exp\left(c_2^{\nu^3}|\Delta|^5(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{13}h^4(\mathfrak{f})\right)\right) \tag{1.3}$$

gilt

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathcal{H})| \leqslant T^{\delta(T)}\exp\left(8\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}\right)\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathcal{H}_0)| \tag{1.4}$$

und

(1.5) $$\delta(T) = \varepsilon(T+1) - \varepsilon(\exp\sqrt{\log\log\log T}).$$

Einige Abschätzungen solcher Art für die arithmetischen Progressionen hat S. Knapowski untersucht [3].

2. Ich stelle jetzt aus der Theorie der $\zeta(s,\chi)$-Funktionen einige Sätze ohne Beweis zusammen, welche im folgenden notwendig sein werden.

I. $\zeta(s,\chi)$ ist ganz, wenn χ nicht der Hauptcharakter ist. Für den Hauptcharakter ist $\zeta(s,\chi)$ überall regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s=1$ ([2], Satz LXIII).

II. $\zeta(s,\chi)$ hat unendlich viele Wurzeln im Streifen $0<\sigma<1$.

III. Für $\sigma>1$ ist

(2.1) $$\zeta(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^s}},$$

also

(2.2) $$\zeta(s,\chi) \neq 0$$

([2], Satz LVIII).

IV. Fur $\sigma>1$ ist

(2.3) $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) = \sum_n \frac{G(n,\chi)}{n^s}$$

und

(2.4) $$G(n,\chi) = \sum_{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m=n} \chi(\mathfrak{p}^m)\log\mathfrak{N}\mathfrak{p}$$

([2], Satz LX).

V. Es gilt

(2.5) $$G(n,\chi) \leqslant L_1\log^2 n; \quad L_1 = \frac{\nu}{\log 2}$$

([4], Lemma 2).

Zum Beweis des Satzes (1.4) benötigen wir noch einige Hilfssätze:

LEMMA 1. *Auf der Gerade $\sigma=2$ gilt*

(2.6) $$|\zeta(s,\chi)| > L_2 > 0; \quad L_2 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^\nu.$$

Beweis. Wegen (2.1) für $\sigma=2$, hat man

$$\frac{1}{|\zeta(s,\chi)|} = \left|\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^s}\right)\right| \leqslant \prod_{\mathfrak{p}}\left(1+(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{-2}\right) < \prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^2}\right)^{-1} = \zeta_K(2).$$

Aber es ist $\zeta_K(2) \leqslant \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^\nu$ ([4], Seite 184).

LEMMA 2. *In dem Streifen $2\leqslant\sigma\leqslant 4$ gilt*

(2.7) $$|(s-1)\zeta(s,\chi)| \leqslant \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^\nu (|t|+3).$$

Beweis. Aus der Definition der $\zeta(s,\chi)$-Funktionen ergibt sich

$$|\zeta(s,\chi)| \leqslant \sum_{\mathfrak{b}} \frac{|\chi(\mathfrak{b})|}{(\mathfrak{N}\mathfrak{b})^\sigma} \leqslant \sum_{\mathfrak{b}} \frac{1}{(\mathfrak{N}\mathfrak{b})^\sigma} \leqslant \sum_{\mathfrak{b}} \frac{1}{(\mathfrak{N}\mathfrak{b})^2} = \zeta_K(2).$$

LEMMA 3. *In dem Streifen $-\frac{1}{100}\leqslant\sigma\leqslant 2$ — zuerst grob — gilt*

(2.8) $$|(s-1)\zeta(s,\chi)| \leqslant A_1 e^{A_2|t|};$$

dabei sind A_1, A_2 von K, $\mathfrak{f}$ und χ abhängige Konstanten.

Beweis. Die Behauptung folgt aus [2] (Satz LXX) und I.

LEMMA 4. *Für $\sigma = -\frac{1}{100}$, $-\infty<t<+\infty$ gilt*

(2.9) $$|(s-1)\zeta(s,\chi)| \leqslant c_3^\nu |\Delta|^{51/100} (\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100} (|t|+1)^{(51/100)\nu}$$

und c_3 ist eine numerische Konstante.

Beweis. Es sei zunächst χ eigentlich ([2], Df. XII). Wir betrachten die Formel ([2], Satz LXVI):

$$f(s,\chi) = \frac{\zeta(s,\chi)}{\zeta(1-s,\bar\chi)} = (-i)^q W(\lambda)\left(\frac{(2\pi)^s}{2}\right)^\nu |\Delta|^{1/2-s} (\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{1/2-s} \times$$
$$\times \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{-r_1+q-r_2} \left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{-q-r_2} (\Gamma(s))^{-\nu};$$

dabei ist $|W(\lambda)|=1$ ([2], Seite 99, (51)), und verfahren so wie in [4], Lemma 6. Wir bekommen dann für $\sigma=-\frac{1}{100}$ einfach

(2.10) $$|\zeta(s,\chi)| \leqslant c_4^\nu |\Delta|^{51/100} (\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{51/100} t^{(51/100)\nu}.$$

Es sei jetzt χ uneigentlich. Nach [2], Satz LXII, ist

$$\zeta(s,\chi) = \zeta_0(s,X) \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})X(\mathfrak{b})}{(\mathfrak{N}\mathfrak{b})^s}.$$

Für $\sigma = -\frac{1}{100}$ ist aber

(2.11) $$|\zeta(s,\chi)| \leqslant |\zeta_0(s,X)| \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} (\mathfrak{N}\mathfrak{b})^{1/100}.$$

Es is aber

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} 1 \leqslant \mathfrak{N}\mathfrak{f} \tag{2.12}$$

und der Charakter X ist schon eigentlich ([2], Satz XLIV).

Aus (2.10), (2.11) und (2.12) hat man für $\sigma = -\frac{1}{100}$

$$|\zeta(s,\chi)| \leqslant c_5^{\nu}|\Delta|^{51/100}(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100}t^{(51/100)\nu}.$$

Lemma 5. *In dem Streifen* $-\frac{1}{100} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $-\infty < t < +\infty$ *gilt*

$$|(s-1)\zeta(s,\chi)| \leqslant L_3(|t|+1)^{L_4}, \tag{2.13}$$

wobei

$$L_3 = c_6^{\nu}|\Delta|^{51/100}(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100}, \tag{2.14}$$

$$L_4 = \tfrac{51}{100}\nu+1 \tag{2.15}$$

und c_6 *ist eine numerische Konstante.*

Beweis. Wir nehmen die Funktion

$$G(s) = \frac{(s-1)\zeta(s,\chi)}{(s+3)^{(51/100)\nu+1}}$$

in Betracht. Aus (2.9) folgt einfach für $\sigma = -\frac{1}{100}$

$$|G(s)| \leqslant c_6^{\nu}|\Delta|^{51/100}(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100}.$$

Aus dem Lemma 2, hat man für $\sigma = 2$, $|G(s)| \leqslant 1$. Wir wenden jetzt [4], Lemma 1 und Lemma 3 an. Daraus bekommt man, daß in dem ganzen Bereich $-\frac{1}{100} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $-\infty < t < +\infty$ gilt

$$|G(s)| \leqslant c_6^{\nu}|\Delta|^{51/100}(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100}.$$

Daraus folgt einfach (2.13).

Lemma 6. *Es sei* $\mathfrak{f}$ *irgendein festes Ideal des Körpers* K, χ *ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$. *Es sei* $V(T)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s,\chi)$ *im Parallelogramm* $\sqrt{\delta} \leqslant x \leqslant 1$, $T \leqslant y \leqslant T+1$, $0 < \delta < \frac{1}{100}$; *dann ist*

$$V(T) \leqslant c_7(\delta)\log\left(\frac{L_3}{L_2}(|T|+3)^{L_4}\right) \tag{2.16}$$

bei jedem reellen T. *Dabei hat man* $L_2 = (6/\pi^2)^{\nu}$, $L_3 = c^{\nu}|\Delta|^{51/100}(\mathfrak{N}\mathfrak{f})^{152/100}$ $L_4 = (\frac{51}{100})\nu+1$ *und* $c_7(\delta) = 4\delta^{-5/6}$.

Beweis. Diese Behauptung kann man nach dem Muster von [4], Lemma 8, zeigen.

Lemma 7. *Sei* $N(T)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s,\chi)$ *im Parallelogramm* $\sqrt{\delta} \leqslant x \leqslant 1$, $|y| \leqslant T$. *Dann ist*

$$N(T) \leqslant c_8(\delta)(T+1)\log\left(\frac{L_3}{L_2}(T+3)^{L_4}\right) \tag{2.17}$$

und $c_8(\delta) = 8\delta^{-5/6}$.

Beweis. Das gewinnt man leicht aus dem Lemma 6.

Man kann endlich nach dem Muster von [4], Lemma 11, folgendes Lemma zeigen:

Lemma 8. *Wenn* $0 < \delta < \frac{1}{4^4\cdot 10^{24}}$, *dann kann man in dem Streifen* $\delta^{1/10} \leqslant x \leqslant 2\delta^{1/10}$ *der komplexen Ebene eine gebrochene Linie* $\mathfrak{L}$ *angeben, deren Strecken parallel mit der* X- *bzw.* Y-*Achse sind. Auf* $\mathfrak{L}$ *gelten folgende Abschätzungen:*

Wenn die Ordinaten der Strecken, welche mit der X-*Achse parallel sind,* T_k *heißen, dann gilt für jede ganze Zahl* k *wenn* $k < T_k < k+1$,

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\right| < c_9\,\delta^{-5/3}\log^2\left(\frac{L_3}{L_2}(|k|+6)^{L_4}\right); \tag{2.18}$$

c_9 *ist eine numerische Konstante. Bei* $|k| > 1$, *gilt diese Formel auch für* $32\delta^{1/4} \leqslant x \leqslant 3$, $y = T_k$.

Auf den Strecken die mit der Y-*Achse parallel sind, ist*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\right| \leqslant c_{10}\,\delta^{-53/30}\log^2\left(\frac{L_3}{L_2}(|y|+5)^{L_4}\right) \tag{2.19}$$

und c_{10} *ist eine numerische Konstante.*

3. Es bezeichne

$$\Delta(x,\mathfrak{K}) = \sum_{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m \leqslant x,\ \mathfrak{p}^m \in \mathfrak{K}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})} \log\mathfrak{N}\mathfrak{p} - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}. \tag{3.1}$$

Wir beweisen nunmehr auf klassischem Weg folgenden Satz:

Satz. *Sei* $\varepsilon(\tau) = \max_{\varrho=\beta+\gamma i\in A_{\mathfrak{f}},\ |\gamma|\leqslant\tau} \beta$, $A_{\mathfrak{f}}$ *die Menge der nichttrivialen Nullstellen aller* $\zeta(s,\chi)$-*Funktionen und* c_{11}, c_{12} *die explizit angebbaren numerischen Konstanten.*

Für

$$T > \max\left(c_{11}, \exp\exp c_{12}\left(\nu+\log(|\Delta|\mathfrak{N}\mathfrak{f})\right)\right)^2 \tag{3.2}$$

gilt

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathfrak{K})| \leqslant T^{\varepsilon(T+1)}\log^4 T. \tag{3.3}$$

Beweis. Wir nehmen die Funktion

$$f_{\mathcal{H}}(s) = -\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\chi}\frac{1}{\chi(\mathcal{H})}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) \tag{3.4}$$

in Betracht. Für $\sigma > 1$, aus (2.3) folgt

$$f_{\mathcal{H}}(s) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\chi}\frac{1}{\chi(\mathcal{H})}\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)\log\mathcal{N}\mathfrak{p}}{(\mathcal{N}\mathfrak{p})^{ms}}$$

$$= \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\log\mathcal{N}\mathfrak{p}}{(\mathcal{N}\mathfrak{p})^{ms}}\sum_{\chi}\chi(\mathfrak{p}^m)\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \sum_{\mathfrak{p}^m\in\mathcal{H}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\frac{\log\mathcal{N}\mathfrak{p}}{(\mathcal{N}\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{n}\frac{\gamma(n)}{n^s}$$

und

$$\gamma(n) = \sum_{(\mathcal{N}\mathfrak{p})^m=n,\,\mathfrak{p}^m\in\mathcal{H}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\log\mathcal{N}\mathfrak{p}.$$

Sei weiter $k = [T]$, $k < T_k < k+1$, T_k aus Lemma 8 und L_1 aus (2.5). Aus [5], Lemma 3.12 für $T > c_{13}$, gilt

$$\left|\sum_{n\leqslant T}\gamma(n) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1+1/\log T-iT_k}^{1+1/\log T+iT_k}\frac{T^w}{w}f_{\mathcal{H}}(w)\,dw\right| \leqslant L_1 c_{14}\log^3 T. \tag{3.5}$$

Jetzt führen wir eine Konturintegration aus. Der geschloßene Integrationsweg c_T ist folgendermaßen bestimmt:

Sei $\delta = (1/2\cdot 10^3)^{-10}$;

I_1: längs der Linie $\mathcal{L}$ aus Lemma 8;

I_2: $\sigma' \leqslant \sigma \leqslant 1+\dfrac{1}{\log T}$, $t = T_k$, $\delta^{1/10} \leqslant \sigma' \leqslant 2\delta^{1/10}$;

I_3: $\sigma'' \leqslant \sigma \leqslant 1+\dfrac{1}{\log T}$, $t = -T_k$, $\delta^{1/10} \leqslant \sigma'' \leqslant 2\delta^{1/10}$;

I: $\sigma = 1+\dfrac{1}{\log T}$, $-T_k \leqslant t \leqslant +T_k$.

Aus dem Residuensatz folgt dann

$$I(T)+I_1(T)+I_2(T)+I_3(T) = \sum_{c_T}\mathrm{Res}\left(\frac{T^w}{w}f_{\mathcal{H}}(w)\right). \tag{3.6}$$

Ganz grob abschätzend, für $T > c_{15}$,

$$|I_1(T)| \leqslant c_{16}\,\delta^{-28/15}\left(\log\frac{L_3}{L_2}+L_4\right)^2 T^{2\delta^{1/10}}\log^3 T, \tag{3.7}$$

$$|I_2(T)| \leqslant c_{17}\,\delta^{-5/3}\left(\log\frac{L_3}{L_2}+L_4\right)^2\log^2 T \tag{3.8}$$

und dasselbe gilt auch für das Integral $I_3(T)$.

Wegen I, II und (3.4) hat man weiter

$$\sum_{c_T}\mathrm{Res}\left(\frac{T^w}{w}f_{\mathcal{H}}(w)\right) = \frac{T}{h(\mathfrak{f})} - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\varrho=\beta+\gamma i\in A_{\mathfrak{f}},\,|I\varrho|<T_k,\,\varrho>\mathcal{L}}\bar{\chi}(\mathcal{H})\frac{T^\varrho}{\varrho}. \tag{3.9}$$

Wegen Lemma 6, für $T > c_{18}$ gilt:

$$\left|\sum_{\varrho}\bar{\chi}(\mathcal{H})\frac{T^\varrho}{\varrho}\right| \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant T_k}\frac{T^\beta}{|\varrho|} \leqslant T^{\varepsilon(T+1)}\sum_{|\gamma|\leqslant T_k}\frac{1}{|\varrho|} \tag{3.10}$$

$$\leqslant c_{19}h(\mathfrak{f})T^{\varepsilon(T+1)}\delta^{-56/60}\left(\log\frac{L_3}{L_2}+L_4\right)\log^2 T.$$

Aus (3.6)-(3.10) für $x > \max\left(c_{20}, \exp\left(\log(L_3/L_2)+L_4\right)^2\right)$ gilt

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\gamma(n) - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}\right| \leqslant x^{\varepsilon(x+1)}\log^3 x. \tag{3.11}$$

Für $x \leqslant \max\left(c_{20}, \exp\left(\log(L_3/L_2)+L_4\right)^2\right)$ gilt einfach

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\gamma(n) - \frac{x}{h(\mathfrak{f})}\right| \leqslant c_{21}L_1\exp\left(\log\frac{L_3}{L_2}+L_4\right)^2. \tag{3.12}$$

Insgesamt für (3.2) und wegen (3.1) gilt (3.3).

4. Jetzt finden wir mit den Methoden von Turán eine untere Abschätzung von $\Delta(x,\mathcal{H}_0)$, wo $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})$ die Hauptklasse mod $\mathfrak{f}$ bezeichnet. Wir beweisen folgenden Satz:

SATZ. *Sei $A_{\mathfrak{f}}$ die Menge der nichttrivialen Nullstellen aller $\zeta(s,\chi)$-Funktionen, $\varepsilon(\tau) = \max\limits_{\varrho=\beta+\gamma i\in A_{\mathfrak{f}},\,|\gamma|\leqslant\tau}\beta$ und c_{21}, c_{22} die explizit angebbaren numerischen Konstanten, dann für* (1.3) *gilt*

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathcal{H}_0)| > T^{\varepsilon(\exp\sqrt{\log\log\log T})}\exp\left(-7\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}\right). \tag{4.1}$$

Beweis (vergl. [4]). Es bezeichnen $c_{23}, c_{24}, \ldots$ die explizit angebbaren numerischen Konstanten.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$K_0 = 2\frac{\log T}{\log\log T}, \qquad N_0 = \log^{1/2} T (\log\log T)^2. \tag{4.2}$$

Für $T > c_{23}$,

$$K_0 > N_0 \geqslant 3. \tag{4.3}$$

Ferner, gibt es für $T > c_{24}$ ein ganzes $L > 2$, so daß

$$(L^{K_0} <) L^{K_0+N_0} \leqslant T < L^{K_0+N_0+1} (< L^{3K_0}): \tag{4.4}$$

Für dieses L gilt

$$\log^{1/6} T \leqslant L < \log^{1/2} T. \tag{4.5}$$

Es sei T_L eine in Lemma 8 definierte Größe, also

$$L < T_L < L+1. \tag{4.6}$$

Von der ganzen Zahl k fordern wir vorläufig nur

$$K_0 \leqslant k+1 \leqslant K_0+N_0. \tag{4.7}$$

Bezeichnen wir weiter

$$L^{k+1} = \xi, \qquad 1/\log\xi = \eta. \tag{4.8}$$

Wir betrachten das Integral

$$I(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\eta-iT_L}^{1+\eta+iT_L} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\,ds, \tag{4.9}$$

mit

$$F(s) = -\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\chi}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\zeta(s); \tag{4.10}$$

$\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion.

Für $\sigma > 1$ hat man

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\chi}\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)\log\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{ms}} - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\zeta(s) \\ &= \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\log\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms}}\sum_{\chi}\chi(\mathfrak{p}^m) - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\zeta(s) \\ &= \sum_{\mathfrak{p}^m \in \mathcal{H}_0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\frac{\log\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms}} - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)-1/h(\mathfrak{f})}{n^s} \end{aligned} \tag{4.11}$$

und

$$g(n) = \sum_{(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m = n,\ \mathfrak{p}^m \in \mathcal{H}_0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})} \log\mathfrak{N}\mathfrak{p}.$$

Aus (4.9) und (4.11) in $\sigma > 1$ gilt

$$I(T) = \sum_n \Big(g(n) - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\eta-iT_L}^{1+\eta+iT_L}\frac{(\xi/n)^s}{s^{k+1}}\,ds. \tag{4.12}$$

Unter Verwendung der bekannten Integralformel ([4], (5.13)), durch leichte Abschätzung und die partielle Summation, für $T > C_{24}$ gilt

$$|I(T)| \leqslant c_{25} L_1 \log^4 T + \frac{\log^k T}{k!}\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathcal{H}_0)|, \tag{4.13}$$

mit

$$\Delta(x,\mathcal{H}_0) = \sum_{n\leqslant x} g(n) - \frac{1}{h(\mathfrak{f})}x.$$

Wir wählen $\delta = (2\cdot 10^3)^{-10}$ und führen eine Konturintegration aus ([4], Seite 192).

Nach dem Residuensatz und leichten Abschätzungen hat man für (1.3)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\Big|\sum_{|I\varrho|<T_L,\ \varrho\in A_{\mathfrak{f}},\ R\varrho>\sigma_{\varrho}}\frac{\xi^{\varrho}}{\varrho^{k+1}}\Big| \\ &\qquad \leqslant \frac{\log^k T}{k!}\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\mathcal{H}_0)| + c_{26} L_1 T^{2\delta^{1/10}+\frac{4\log(\delta-1/10)}{\log\log T}}\log^4 T. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Wir wählen jetzt $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ folgendermaßen:

(4.15)

$$\beta_0 = \varepsilon(\exp\sqrt{\log\log\log T}), \quad |\gamma_0| \leqslant \exp\sqrt{\log\log\log T}, \quad \beta_0 \geqslant \tfrac{1}{2}, \quad \varrho_0 \in A_{\mathfrak{f}}.$$

Wir haben weiter

$$\Big|\sum_{\varrho}\frac{\xi^{\varrho}}{\varrho^{k+1}}\Big| = \Big(\frac{L^{\beta_0}}{|\varrho_0|}\Big)^{k+1}\Big|\sum_{\varrho}\Big(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\Big)^{k+1}\Big|. \tag{4.16}$$

Aus (1.3) folgt

$$L^{\beta_0} > (\log^{1/6} T)^{\beta_0} > \log^{1/12} T > |\varrho_0|. \tag{4.17}$$

Daraus kommt

$$\Big(\frac{L^{\beta_0}}{|\varrho_0|}\Big)^{k+1} \geqslant T^{\beta_0} e^{-2(\log\log T)^3\log^{1/2} T}|\varrho_0|^{-2\frac{\log T}{\log\log T}}. \tag{4.18}$$

Bei der Abschätzung von $\sum_{\varrho}\left(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{k+1}$ wir wenden den Satz von P. Turán an ([6], Satz X) und verfahren so wie in [4], Seite 193. In unserem Fall ist die Bedingung [4], 5.28, auch erfüllt, weil

$$T_L \geqslant L > \log^{1/6} T > \exp\left(\tfrac{1}{3}\log\log\log T\right) > |\varrho_0| > |I\varrho_0|. \tag{4.19}$$

Nach dem Muster von [4] (Seite 193-195), kommen wir einfach zum Schluß des Beweises.

Durch Vergleich der beiden Abschätzungen (3.3) und (4.1) bekommt man (1.4).

Literaturverzeichnis

[1] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin 1927.

[2] — *Über Ideale und Primideale in Idealklassen*, Math. Zeitschrift, 2. Band, Berlin 1918.

[3] S. Knapowski, *On prime numbers in an arithmetical progression*, Acta Arithm. 4 (1958), p. 57-70.

[4] W. Staś, *Über eine Anwendung der Methode von Turán, auf die Theorie des Restgliedes im Primidealsatz*, Acta Arithm. 5 (1959), p. 179-195.

[5] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford at the Clarendon Press 1951.

[6] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 11. 8. 1959

ACTA ARITHMETICA
VI (1960)

On the representation of $1, 2, \ldots, n$ by sums

by

L. Moser (Edmonton, Canada)

If A: $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ is a set of integers such that every positive integer not exceeding n is the sum of two elements of A then A is called a *2-basis for n*. In what follows we let $k = k(n)$ be the smallest integer for which a 2-basis for n with k elements exists, and let A be such a minimal 2-basis. The problem of estimating $k(n)$ was first proposed by I. Schur. Since we can form only $k(k-1)/2$ pairs of distinct elements of A (disregarding order) and k sums of the form $2a_r$, we have $(k^2+k)/2 \geqslant n+1$. On the other hand, the numbers $0, 1, 2, \ldots, [\sqrt{n}-1], [\sqrt{n}], 2[\sqrt{n}], \ldots, [\sqrt{n}+1][\sqrt{n}]$ are easily seen to form a 2-basis with $2[\sqrt{n}]+1$ elements. The only improvements on these trivial estimates seem to be those of Rohrbach [1] who proved that for n sufficiently large

$$\frac{k^2}{2}(1-.0016) > n. \tag{1}$$

Although Rohrbach conjectured that $.25k^2 \sim n$ his proof of the much weaker result (1) is rather complicated. The object of this note is to prove the better estimate

$$\frac{k^2}{2}(1-.0197) > n. \tag{2}$$

To the set A we make correspond the generating function

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{a_j} \tag{3}$$

and let

$$g(x) = \left(f^2(x)+f(x^2)\right)/2. \tag{4}$$

The coefficient of x^j in $g(x)$ will be the number of representations of j in the form $a_r + a_s$ where order is not taken into account. We now define $\delta(j)$ by

$$g(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\sum_{j=0}^{2n}\delta(j)x^j. \tag{5}$$