J. Mioduszewski

contrary to (24). If a=1, then by (27) we obtain L=A, contrary to (26).

REMARK 4. The hypotheses of theorem 2 hold if $n_i = pi+1$, i = 1, $2, \ldots, L-1$, where p is an integer and p is not a divisor of n-1.

The function which possesses this property has, up to (n-1)-th term, the same Taylor expansion as a p-symetric function.

REMARK 5. The hypotheses of theorem 2 hold if 1° $n_i = ip+1$, where p is an integer and $n_i \leq (n-1)/2$, 2° p is not a divisor of $n-n_i$ for $n_i > (n-1)/2$ and 3° p is not a divisor of n-1.

III. The above estimations cannot be improved.

140

The hypotheses of theorem 1 are satisfied by the coefficient b_n of the function $f(z) = z(1+z^{-n-1})^{2/(n+1)}$, because $b_k = 0$ if k < n; but $b_n = 2/(n+1)$.

The hypotheses of theorem 2 are satisfied by the coefficient a_n of the function $g(z) = z(1+z^{n-1})^{2/(n-1)}$, because $a_k = 0$ if k < n; but $a_n = 2/(n-1)$.

References

[1] W. Wolibner, Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes à l'extérieur d'un cercle, Studia Mathematica 11 (1949), p. 125-132.

[2] G. M. Goluzin, Über p-valente Funktionen, Récucil Mathematique 8 (1940), p. 277-284.

[3] M. Biernacki, Sur les fonctions en moyenne multivalentes, Bulletin des Sciences Mathématiques 70 (1946), p. 51-76.

Recu par la Rédaction le 4. 6. 1955



ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Propriétés des intégrales d'une équation de l'hydrodynamique d'un fluide visqueux

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Les équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible ont la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{W} \times \mathbf{v} = -\mathbf{F} - v \operatorname{rot} \mathbf{W},$$

où $W = \operatorname{rot} v$, v désigne la vitesse du fluide, v est le coefficient de viscosité cinématique, F le vecteur des forces extérieures.

D'après la transformation

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{v}] = -\operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \operatorname{vrot} (\operatorname{rot} \boldsymbol{W})$$

et d'après l'équation de continuité div v = 0, nous obtenons les équations (1) sous la forme

(2)
$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{W} + \operatorname{rot} \mathbf{F},$$

où 7 désigne l'opérateur de Hamilton.

Les équations (2) deviennent plus simples pour le mouvement plan, puisque dans ce cas $v_s = 0$, v_x et v_y ne dépendent pas de la coordonnée z, ce qui permet d'introduire, grâce à la supposition $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, la fonction du courant $\psi(x, y, t)$ définie par les égalités

$$v_{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et de remplacer les équations (2) par une seule équation

$$(4) v \Delta (\Delta \psi) - \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial y} + \Phi,$$

où la fonction $\Phi(x, y, t) = \text{rot}_x F$ est connue.

Dans ce travail nous étudierons quelques propriétés des intégrales de l'équation homogène

(5)
$$v\Delta(\Delta\psi) - \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial t} = 0,$$

analogues aux potentiels. Nos raisonnements concernent un domaine borné D limité par la courbe fermée C, satisfaisant aux conditions suivantes: La ligne fermée C a une tangente continue en tout point et l'angle que fait cette tangente avec une direction fixe satisfait à la condition de Hölder de la forme suivante:

(6)
$$\delta_{QQ_1} < cr_{QQ_1}^{\alpha} \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

où δ_{QQ_1} désigne l'angle que font les tangentes en deux points arbitraires Q et Q_1 de la courbe C.

2. Étude des intégrales de l'équation homogène. Nous allons d'abord étudier l'équation homogène suivante:

(7)
$$\nu \Delta (\Delta \psi) - \frac{\partial (\Delta \psi)}{\Delta t} = 0.$$

En substituant $\Delta \psi = u$, nous obtenons l'équation de la chaleur $\nu \Delta u - \partial u/\partial t = 0$, dont la solution fondamentale est de la forme

$$u(A, t; B, \tau) = \frac{1}{t-\tau} \exp\left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)}\right],$$

où A(x,y) et $B(\xi,\eta)$ sont deux points arbitraires du domaine D et $t>\tau$. Pour obtenir la solution fondamentale de l'équation (7) nous considérons l'équation

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = \frac{1}{t - \tau} \exp \left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t - \tau)} \right],$$

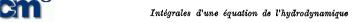
dont la solution a la forme suivante:

(8)
$$\Omega(A,t;B,\tau) = \int_{r_{AB/2\sqrt{\tau(t-\tau)}}}^{\infty} \frac{e^{-q^2}}{q} dq + \varphi(t) \log r_{AB},$$

où la fonction φ est arbitrairement choisie dans la classe C_1 . La première partie de la solution fondamentale (8) de l'équation (7), c'est-à-dire la fonction

(9)
$$\omega(A,t;B,\tau) = \int_{\tau_{AB}/2\sqrt{r(t-\tau)}}^{\infty} \frac{e^{-q^2}}{q} dq$$

fera l'objet de notre étude.



Nous allons d'abord chercher une limitation de la fonction $\omega(A, t; B, \tau)$. Écrivons donc

$$|\omega(A,t;B,\tau)| = \Big|\int\limits_{r_{\mathcal{A}B}/2\sqrt{\nu(t-\tau)}}^{\infty} q^{\lambda} \frac{e^{-q^2}}{q^{1+\lambda}} dq \Big| < \operatorname{const} \int\limits_{r_{\mathcal{A}B}/2\sqrt{\nu(t-\tau)}}^{\infty} \frac{dq}{q^{1+\lambda}},$$

où λ est une constante positive arbitraire. Nous en tirons la limitation suivante, à singularité séparée,

$$|\omega(A,t;B,\tau)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{\lambda}} (t-\tau)^{\lambda/2}$$

pour chaque point $A \neq B$ du domaine D, pour $\lambda > 0$ et $t > \tau$. Remarquons que la fonction $\omega(A,t;B,\tau)$ est continue pour chaque $t > \tau$ et tend vers zéro si $t \to \tau$, mais $A \neq B$.

2.1. Potentiel de charge plane. Appelons potentiel de charge plane, relatif à l'équation (7), l'intégrale suivante:

(11)
$$V(A,t) = \int_0^t \int_D \omega(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_B d\tau,$$

où $\varrho(B,\tau)$ est une fonction bornée et intégrable dans le domaine $B \in \mathcal{D}$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. L'intégrale généralisée (11) est uniformément et absolument convergente dans le domaine $A \in D+C$, $0 \leqslant t \leqslant T$, puisque pour $0 < \lambda < 2$ la singularité de la limitation (10) sera faible. Évidemment on a

$$(11') |V(A,t)| < K_{\omega} t^{\lambda/2+1} \sup |\varrho|,$$

 K_{m} étant une constante positive.

THÉORÈME 1. Si la fonction $\varrho(B,\tau)$ est bornée et intégrable dans le domaine D et pour $0 \le t \le T$, le potentiel de charge plane (11) admet des dérivées premières par rapport aux coordonnées du point A(x,y) qui s'expriment par les formules

(12)
$$\begin{aligned} V_{\boldsymbol{x}}'(A,t) &= \int_{0}^{t} \iint_{B} \omega_{\boldsymbol{x}}'(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_{B} d\tau, \\ V_{\boldsymbol{y}}'(A,t) &= \int_{0}^{t} \iint_{B} \omega_{\boldsymbol{y}}'(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_{B} d\tau. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\omega_x' = \frac{\exp\left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}{r_{AB}} \cdot \frac{x-\xi}{r_{AB}}, \qquad \omega_y' = \frac{\exp\left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}{r_{AB}} \cdot \frac{y-\eta}{r_{AB}}.$$

Nous en tirons que

$$|\omega_{A}'(A,t;B,\tau)| < \frac{q^{\lambda}e^{-q^2}}{q^{1+\lambda}2\sqrt{\nu(t-\tau)}} < \frac{\mathrm{const}}{r_{AB}^{1+\lambda}} \cdot (t-\tau)^{\lambda/2},$$

où λ est une constante positive, arbitrairement choisie. La singularité de la limitation (13) sera faible si $0 < \lambda < 1$, donc les intégrales (12) sont uniformément et absolument convergentes.

Nous prouverons notre théorème pour la dérivée $V_x'(A,t)$. La preuve pour la dérivée $V_y'(A,t)$ sera la même. Écrivons

(14)
$$V(A,t) = \int_0^t J(A,t,\tau)d\tau,$$

σù

(15)
$$J(A,t,\tau) = \iint_{D} \omega(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_{B}.$$

La fonction $J(A, t, \tau)$ est continue et bornée, si $\tau \to t$. On peut démontrer, de même que dans la théorie du potentiel logarithmique, que la fonction $J(A, t, \tau)$ possède une dérivée de la forme

(16)
$$J'_x(A, t, \tau) = \iint_D \omega'_x(A, t; B, \tau) \varrho(B, \tau) d\sigma_B$$

continue pour $t > \tau$. La fonction $J_x'(A, t, \tau)$ reste continue et bornée si $\tau \to t$, d'où

$$V_x'(A,t) = \int_0^t J_x'(A,t,\tau) d\tau = \int_0^t \int_D \omega_x'(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_B d\tau$$

ce qui est la conclussion de notre théorème. En outre nous obtenons immédiatement, en vertu de l'inégalité (13), la limitation suivante des dérivées (12)

$$|V'_{A}(A,t)| < K'_{m} t^{\lambda/2+1} \sup |\rho|.$$

où $0 < \lambda < 1$.

Il en résulte de même que la fonction V(A,t) satisfait à la condition de Lipschitz pour $A \in D + C$

$$|V(A,t) - V(A_1,t)| < \sqrt{2} K_{\omega}^* t^{\lambda/2 + 1} \sup |\varrho| r_{AA_1}$$

 K_{ω}^* étant une constante positive.

THÉORÈME 2. Si le fonction $\varrho(B,\tau)$, continue et bornée dans le domaine $B \in D$, $0 \le \tau \le T$, vérifie la condition de Hölder

$$(18) \qquad |\varrho(A,t)-\varrho(A_1,t)| < \operatorname{constr}_{AA_1}^h \quad (0 < h \leqslant 1),$$

le potentiel de charge plane (11) admet des dérivées secondes V''_{xx} , V''_{yy} , continues dans le domaine $A \in D$, $0 \le t \le T$, exprimées par les formules

$$V_{xx}^{\prime\prime}(A,t) = \int_{0}^{t} \varrho(A,t) \left[-\int_{C_{K}} \omega_{x}^{\prime}(A,t;Q,\tau) \cos \gamma_{x} dl_{Q} + \int_{D-K} \omega_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau) d\sigma_{B} \right] d\tau + \\ + \int_{0}^{t} \int_{D} \omega_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau) [\varrho(B,\tau) - \varrho(A,\tau)] d\sigma_{B} d\tau,$$

$$V_{yy}^{\prime\prime}(A,t) = \int_{0}^{t} \varrho(A,t) \left[-\int_{C_{K}} \omega_{y}^{\prime}(A,t;Q,\tau) \cos \gamma_{y} dl_{Q} + \\ + \int_{D-K} \omega_{yy}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau) d\sigma_{B} \right] d\tau + \\ + \int_{0}^{t} \int_{D} \omega_{yy}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau) [\varrho(B,\tau) - \varrho(A,\tau)] d\sigma_{B} d\tau$$

K désignant le cercle dans le domaine D, contenant à l'intérieur le point A, γ_x et γ_y les angles que fait avec l'axe OX ou OY la tangente à la circonférence C_K du cercle K au point Q.

Démonstration. Nous nous appuyerons sur la démonstration analogue, donnée par W. Pogorzelski dans les travaux [1] et [4], dans la théorie du potentiel relatif aux équations du type elliptique et parabolique.

. Prenons la fonction auxiliaire

(20)
$$\bar{\omega}(A, t; B, \tau; z) = \int_{\sqrt{r_{AB}^2 + z^2}/2\sqrt{r(t-\tau)}}^{\infty} \frac{e^{-q^2}}{q} dq \quad (\tau < t)$$

z étant un paramètre réel. Évidemment on a

$$\bar{\omega}(A,t;B,\tau,0)=\omega(A,t;B,\tau).$$

La dérivée $\bar{\omega}'_x$ a la forme

$$ar{arphi_{x}'(A,t;B, au;z)} = rac{\exp\left[-rac{r_{AB}^{2}+z^{2}}{4v(t- au)}
ight]}{\sqrt{r_{AB}^{2}+z^{2}}} \cdot rac{x-\xi}{r_{AB}}.$$

Nous allons étudier l'intégrale

(21)
$$I'_{\boldsymbol{x}}(A,t;\tau;z) = \iint_{D} \varpi'_{\boldsymbol{x}}(A,t;B,\tau;z) \varrho(B,\tau) d\sigma_{B}.$$

L'intégrale I'_x a la propriété évidente:

$$\lim_{x\to 0}\ I_x'(A,\,t;\,\tau;z)=\int\limits_{D}\omega_x'(A,\,t;\,B,\,\tau)\,\varrho(B,\,\tau)d\sigma_B.$$

Écrivons l'intégrale (21) sous la forme

(22)
$$I'_{\boldsymbol{x}}(A,t;\tau;z) = \varrho(M,\tau) \iint_{\mathcal{D}} \varpi'_{\boldsymbol{x}}(A,t;B,\tau;z) d\sigma_{B} +$$
$$+ \iint_{\mathcal{D}} \varpi'_{\boldsymbol{x}}(A,t;B,\tau;z) [\varrho(B,\tau) - \varrho(M,\tau)] d\sigma_{B},$$

où M est un point arbitraire du domaine D. (Choisissons à l'intérieur du domaine D le cercle K dont le centre est un point fixé A_0 et le point A est un point intérieur. En appliquant à la première intégrale (22) le théorème de Green dans le plan, nous aurons

$$(23) \quad I'_{x}(A,t;\tau;z) = \varrho(M,\tau) \Big[-\int\limits_{C_{K}} \bar{\omega}(A,t;Q,\tau;z) \cos \gamma_{x} dl_{Q} + \\ + \int\limits_{D-K} \bar{\omega}'_{x}(A,t;B,\tau;z) d\sigma_{B} \Big] + \\ + \int\limits_{D} \bar{\omega}'_{x}(A,t;B,\tau;z) [\varrho(B,\tau) - \varrho(M,\tau)] d\sigma_{B}.$$

Les intégrales dans l'expression (23) étant régulières pour $\tau < t$ et z > 0, la fonction I'_x possède des dérivées continues à l'intérieur du cercle K:

$$\begin{split} I''_{xx}(A,t;\,\tau;z) &= \varrho(M,\tau) \Big[- \int\limits_{C_K} \varpi'_x(A,t;\,Q,\,\tau;z) \cos\gamma_x dl_Q + \\ &+ \int\limits_{D-K} \varpi''_{xx}(A,t;\,B,\,\tau;z) d\sigma_B \Big] + \\ &+ \int\limits_{D} \int\limits_{C} \varpi''_{xx}(A,t;\,B,\,\tau;z) \big[\varrho(B,\,\tau) - \varrho(M,\,\tau) \big] d\sigma_B. \end{split}$$

En substituant M = A, nous aurons

$$(24) \quad I_{xx}^{\prime\prime}(A,t;\tau;z) = \varrho(A,\tau) \Big[-\int_{C_K} \bar{\omega}_x^{\prime}(A,t;Q,\tau;z) \cos \gamma_x dl_Q + \\ + \int_{D-K} \bar{\omega}_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau;z) d\sigma_B \Big] + \\ + \int_{D} \bar{\omega}_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau;z) [\varrho(B,\tau) - \varrho(A,\tau)] d\sigma_B.$$

Le point A étant extérieur aux ensembles C_K et D-K, la somme des deux premières intégrales (24) tend vers une limite définie:

$$-\int\limits_{\mathcal{O}_{K}}\omega_{x}^{\prime}(A\,,\,t;\,Q\,,\,\tau)\cos\gamma_{x}dl_{Q}+\int\limits_{\mathcal{D}-K}\omega_{xx}^{\prime\prime}(A\,,\,t;\,B\,,\,\tau)\,d\sigma_{B}$$

si $z \to 0$. La dérivée $\bar{\omega}_{xx}^{"}$ dans la troisième intégrale est

$$\bar{\omega}_{xx}^{\prime\prime} = -\frac{\exp\left[-\frac{r_{AB}^2 + z^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}{2(t-\tau)} - \frac{\exp\left[-\frac{r_{AB}^2 + z^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}{r_{AB}^2},$$

d'où nous pouvons tirer l'évaluation suivante:

$$(25) \quad |\varpi_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau;z)[\varrho(B,\tau)-\varrho(A,\tau)]| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \cdot \frac{r_{AB}^{h}}{(r_{AB}^{2}+z^{2})^{1+\lambda/2}},$$

où $0 < \lambda < h$. De l'inégalité (25) nous pouvons déduire, par un raisonnement classique, que la trosième intégrale dans l'expression (24) tend vers une limite définie

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \omega_{xx}^{\prime\prime}(A,t;B,\tau) [\varrho(B,\tau) - \varrho(A,\tau)] d\sigma_{B}$$

si $z \to 0$, uniformément dans un voisinage suffisamment petit du point A_0 . Nous en déduisons qu'il existe une dérivée seconde de la fonction (15) sous la forme:

(26)
$$\lim_{x \to 0} I_{xx}^{"}(A, t; \tau; z) = J_{xx}^{"}(A, t; \tau).$$

D'après l'inégalité (25), nous avons l'évaluation suivante:

(27)
$$|J_{xx}''(A,t,\tau)| < \frac{C_A}{(t-\tau)^{\lambda}} \quad (0 < \lambda < h)$$

où la constante positive C_A est définie dans un voisinage suffisamment petit du point intérieur A. De l'inégalité (27) nous pouvons déduire que l'intégrale

(28)
$$V^{**}(A,t) = \int_{0}^{t} J''_{xx}(A,t,\tau) d\tau$$

est absolument convergente. Pour démontrer que l'intégrale (28) est égale à la seconde dérivée $V''_{xx}(A,t)$ de la fonction (11), étudions la différence:

(29)
$$\delta = \frac{V'_{x}(A_{1}, t) - V'_{x}(A, t)}{Ax} - V^{**}(A, t)$$

$$= \int_{0}^{t} \left[\frac{J'_{x}(A_{1}, t, \tau) - J'_{x}(A, t, \tau)}{Ax} - J''_{xx}(A, t, \tau) \right] d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \left[J''_{xx}(A', t, \tau) - J''_{xx}(A, t, \tau) \right] d\tau,$$



où A' est un point arbitraire à l'intérieur du segment AA_1 , parallèle à l'axe OX. D'après l'inégalité (27), on peut trouver pour chaque nombre positif ε un $t_* < t$ tel que l'on ait

(30)
$$\int_{t_{-}}^{t} |J_{xx}^{\prime\prime}(A,t,\tau)| d\tau < \varepsilon/3 \quad \text{si} \quad A \in D.$$

Décomposons maintenant la différence (29) en une somme de trois intégrales:

$$\delta = \int\limits_0^{t_{\mathrm{e}}} [J_{xx}^{\prime\prime}(A^\prime,\,t,\,\tau) - J_{xx}^{\prime\prime}(A,\,t,\,\tau)] d\tau + \int\limits_{t_{\mathrm{e}}}^t J_{xx}^{\prime\prime}(A^\prime,\,t,\,\tau) d\tau - \int\limits_{t_{\mathrm{e}}}^t J_{xx}^{\prime\prime}(A,\,t,\,\tau) d\tau.$$

La valeur de t_s étant fixée, nous pouvons trouver pour le nombre arbitraire $\varepsilon>0$ un nombre $\eta(\varepsilon)$, indépendante de τ , tel qu'on ait

$$(31) \qquad |J_{xx}^{\prime\prime}(A^{\prime},t,\tau)-J_{xx}^{\prime\prime}(A,t,\tau)|<\frac{\varepsilon}{3t_{\rm s}}\quad {\rm si}\quad |\varDelta x|<\eta(\varepsilon).$$

Enfin, d'après les inégalités (30) et (31), nous obtenons

$$|\delta| < \varepsilon$$
 si $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$

ce qui signifie que les dérivées secondes du potentiel (11) s'expriment par les expressions (19).

La preuve pour la dérivée V''_{yy} sera la même.

THÉORÈME 3. Si la fonction $\varrho(B,\tau)$ est continue et bornée dans le domaine D et si elle vérifie la condition de Hölder (18), le laplacien du potentiel (11) s'exprime par la formule

(32)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Delta V(A, t) = \int_0^t \iint_B \Delta \omega(A, t; B, \tau) \varrho(B, \tau) d\sigma_B d\tau$$

dans le domaine $A \in D$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\Delta\omega(A, t; B, \tau) = -\frac{1}{2(t-\tau)} \exp\left[\frac{-r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)}\right],$$

d'où on obtient la limitation

(33)
$$|\Delta\omega| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \cdot \frac{1}{r_{AB}^{2-2\lambda}} \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda < 1.$$

L'intégrale à droite de l'expression (32) est donc absolument convergente. Étudions l'intégrale

$$I(A, t; \tau; z) = \iint_{\mathcal{D}} \bar{\omega}(A, t; B, \tau; z) \varrho(B, \tau) d\sigma_{B},$$

où la fonction ω est de la forme (20). La fonction sous le signe d'intégrale ω ne possède pas de singularités, si $z \neq 0$, même quand A = B, et nous en tirons que

(34)
$$\Delta I(A, t; \tau; z) = \iint_{D} \Delta \bar{\omega}(A, t; B, \tau; z) \varrho(B, \tau) d\sigma_{B},$$

οù

$$\Delta \bar{\omega}(A,t;B,\tau;z)$$

$$= -\frac{1}{2\left(t-\tau\right)} \exp{\left[-\frac{r_{AB}^2 + z^2}{4\nu(t-\tau)}\right]} \cdot \frac{r_{AB}^2}{r_{AB}^2 + z^2} + \frac{2z^2}{\left(r_{AB}^2 + z^2\right)^2} \exp{\left[-\frac{r_{AB}^2 + z^2}{4\nu(t-\tau)}\right]}.$$

Évidemment on a

$$\Delta \varpi(A, t; B, \tau; 0) = \Delta \omega(A, t; B, \tau)$$

et la singularité de la fonction dans l'intégrale (34) est faible.

De même que dans la théorie du potentiel, nous pouvons démontrer que pour $z \to 0$ l'intégrale (34) a la propriété limite

$$\lim_{z\to 0} \varDelta I(A,t;\tau;z) = \iint\limits_{D} \varDelta \omega(A,t;B,\tau) \varrho(B,\tau) d\sigma_{B} = \varDelta J(A,t,\tau).$$

D'après l'inégalité (33), nous avons

$$|\Delta J(A, t, \tau)| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \quad (0 < \lambda < 1)$$

et l'intégrale

$$\int\limits_0^t \varDelta J(A,t,\tau) d\tau$$

est absolument convergente.

En s'appuyant sur le théorème 2, nous constatons que

$$\begin{split} \varDelta V(A,t) &= \int\limits_0^t \big[J_{xx}^{\prime\prime}(A,t,\tau) + J_{yy}^{\prime\prime}(A,t,\tau)\big]d\tau \\ &= \int\limits_0^t \varDelta J(A,t,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_B \varDelta \omega(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)d\sigma_Bd\tau \end{split}$$

c. q. f. d.

. Corollaire. La fonction $\Lambda V(A,t)$ est identique au potentiel de charge plane relatif à l'équation de la chaleur

$$\Delta V(A,t) = -\frac{1}{2} \int_{0}^{t} \int_{D} \int \frac{1}{(t-\tau)} \exp \left[-\frac{r_{AB}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right] \varrho(B,\tau) d\sigma_{B} d\tau$$

icm[©]

et à l'intérieur du domaine $[A \in D, 0 \le t \le T]$, en admettant que la condition (18) est remplie par la fonction $\varrho(B, \tau)$, elle satisfait à l'équation de Poisson:

(35)
$$\Delta(\Delta V) - \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = -4\pi \varrho.$$

Si le point A est extérieur au domaine D, la fonction $\Delta V(A,t)$ satisfait à l'équation de la chaleur

$$\Delta(\Delta V) - \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire la fonction V(A, t) satisfait à l'équation homogène (7).

En outre nous avons la limitation

$$|\Delta V| < K_{\omega}' t^{1-\lambda} \sup |\varrho|$$

et, d'après les propriétés connues de l'équation de la chaleur, nous voyons que la fonction $\Delta V(A,t)$ satisfait à la condition de Lipschitz

$$(36) \qquad |\Delta V(A,t) - \Delta V(A_1,t)| < H_{\omega}' t^{1-\lambda} \sup |\varrho| r_{AA_1}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. Si la densité $\varrho(B,\tau)$ est une fonction bornée et continue, le laplacien du potentiel de charge plane (11) admet des dérivées premières par rapport au point A, données par la formule

(37)
$$(\Delta V)'_{\mathcal{A}} = \int_{0}^{t} \iint_{B} [\Delta \omega(A, t; B, \tau)]'_{\mathcal{A}} \varrho(B, \tau) d\sigma_{B} d\tau.$$

La dérivée (37) admet la limitation

$$(38) \qquad (\Delta V)'_{\mathcal{A}} < K''_{\omega} t^{1-\lambda'} \sup |\varrho| \qquad (\frac{1}{2} < \lambda' < 1)$$

et, d'aprés les raisonnements du travail [1], elle satisfait à la condition de Hölder suivante:

(39)
$$|[\Delta V(A,t)]'_{A} - [\Delta V(A_1,t)]'_{A}| < H''_{\omega} t^{1-\lambda'} \sup_{\alpha} |\varrho| r_{AA_1}^{2\lambda'-1}.$$

Ensuite nous pouvons énoncer, sans démonstration, le théorème suivant:

THEORÈME 5. Si la densité $\varrho(B,\tau)$ est bornée et intégrable dans le domaine $[B \in D,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$, le potentiel de charge plane (11) admet une dérivée par rapport au temps de la forme

$$\begin{split} \frac{\partial V(A,t)}{\partial t} &= \int_0^t \int_D \int \frac{\partial}{\partial t} \, \omega(A,t;B,\tau) \, \varrho(B,\tau) \, d\sigma_B d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \int_D \int \frac{\varrho(B,\tau)}{(t-\tau)} \exp \left[-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)} \right] \, \varrho(B,\tau) \, d\sigma_B d\tau. \end{split}$$

Cette dérivée admet la limitation suivante:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| < K'_{\omega} t^{1-\lambda} \sup |\varrho|$$

et elle satisfait à la condition de Lipschitz:

$$\left|\frac{\partial V(A,t)}{\partial t} - \frac{\partial V(A_1,t)}{\partial t}\right| < H_{\omega}' t^{1-\lambda} \sup |\varrho| r_{AA_1}$$

A et A_1 étant des points arbitraires de l'ensemble D+C.

2.2. Potentiel de simple couche. Nous appelons potentiel de simple couche, relatif à l'équation (7), la fonction suivante

(42)
$$W(A,t) = \int_{0}^{t} \int_{Q} \omega(A,t;Q,\tau) \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau$$

où la courbe fermée C limite le domaine D. La fonction $\mu(Q,\tau)$ est bornée et intégrable pour chaque point $Q \in C$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. La fonction W(A,t) admet des dérivées d'ordre arbitraire, si le point A n'est pas situé sur le contour C, et elle vérifie l'équation (7) en tout point A à l'intérieur du domaine D. Au point arbitraire P de la frontière C, le potentiel W(P,t) s'exprime par l'intégrale généralisée

(43)
$$W(P,t) = \int_0^t \int_C \omega(P,t;Q,\tau) \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau.$$

Nous voyons que la dernière intégrale est absolument convergente, en choisissant la constante arbitraire λ dans l'inégalité (10) à l'intérieur de l'intervalle (0,1). Évidemment on a

$$|W(P,t)| < k_{\omega} t^{\lambda/2+1} \sup |\mu|.$$

THÉORÈME 6. Si la fonction $\mu(Q,\tau)$ est bornée et intégrable dans la région $[Q \in C, \ 0 \leqslant \tau \leqslant T]$, le potentiel de simple couche (42) est continu, lorsque le point A tend vers le point $P \in C$, c'est-à-dire

$$\lim_{A \to PeG} W(A, t) = W(P, t).$$

La démonstration s'appuye sur l'inégalité (10) et elle est analogue à la démonstration classique dans la théorie du potentiel.

2.3. Potentiel de double couche. Nous appelons potentiel de double couche, relatif à l'équation (7), la fonction

$$(45) U(A,t) = \int_0^t \int_Q \frac{d}{dn_Q} \left[\omega(A,t;Q,\tau)\right] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau$$
$$= \int_0^t \int_Q \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \cdot \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau,$$

où γ_{QA} est l'angle que fait la normale intérieure au point Q de la courbe C, avec le vecteur QA, $\mu(Q,\tau)$ étant bornée et intégrable dans le domaine $Q \in C$, $0 \le t \le T$. La fonction U(A,t) vérifie l'équation (7) en tout point A extérieur à la frontière C et pour $0 \le t \le T$. Au point P de la courbe C la fonction U(P,t) s'exprime par l'intégrale généralisée

$$U(P,t) = \int\limits_0^t \int\limits_Q \exp\left[-rac{r_{PQ}^2}{4v(t- au)}\right] \cdot rac{\cos\gamma_{QP}}{r_{PQ}} \, \mu(Q,\, au) \, dl_Q \, d au \, .$$

Cette intégrale est absolument convergente, puisque le rapport $(\cos\gamma_{QP})/r_{PQ}$ admet une singularité faible, si $r_{PQ} \to 0$, d'après l'évaluation connue

$$\left| rac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}}
ight| < rac{\mathrm{const}}{r_{PQ}^{1-lpha}},$$

 α étant l'exposant positif dans l'inégalité admise (6). En outre $U(P\,,\,t)\to 0\,,$ si $t\to 0\,.$

THÉORÈME 7. Si la fonction $\mu(Q, \tau)$ est bornée et continue dans le domaine $Q \in C$, $0 \le t \le T$, le potentiel de double couche (45) possède des valeurs limites, si le point A tend vers le point P de la frontière C, et ces valeurs sont les suivantes:

(46)
$$\lim_{A\to PaO} U(A,t) = U(P,t) \pm \pi \int_0^t \mu(P,\tau) d\tau,$$

où le signe + correspond à la valeur limite intérieure, le signe - à la valeur limite extérieure.

Démonstration. On démontre dans la théorie du potentiel les propriétés de l'intégrale suivante:

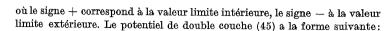
$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \tilde{\mu}(P,\,t)\,dl_Q = \begin{cases} 2\,\pi\tilde{\mu}(P,\,t), & \text{ si A est un point intérieur à C,} \\ \pi\tilde{\mu}(P,\,t), & \text{ si A est sur C,} \\ 0, & \text{ si A est le point extérieur à C,} \end{cases}$$

où nous avons posé

$$\tilde{\mu}(P,t) = \int_{0}^{t} \mu(P,\tau) d\tau.$$

Comme dans la théorie du potentiel logarithmique, on peut démontrer que le potentiel de double couche, dont la densité est variable, possède les valeurs limites suivantes:

$$(47) \qquad \lim \int \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \tilde{\mu}(Q,t) \, dl_Q = \int \frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \tilde{\mu}(Q,t) \, dl_Q \pm \pi \tilde{\mu}(P,t),$$



(48)
$$U(A,t) = \int_{C} \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \mu_0(A,Q,t) dl_Q,$$

où l'on a posé

$$\mu_0(A,Q,t) = \int\limits_0^t \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4v(t- au)}\right] \mu(Q, au) d au.$$

Évidemment

$$\lim_{A\to P}\mu_0(A,P,t)=\mu_0(P,P,t)=\int\limits_0^t\mu(P,\tau)d\tau.$$

De l'expression (47) nous pouvons déduire que le potentiel (48), et de même (45), possède la propriété (46) c. q. f. d.

2.4. La dérivée normale du potentiel de simple couche. La dérivée normale du potentiel (42) s'exprime comme il suit:

$$(49) \qquad \frac{dW(A,t)}{dn_P} = \int_0^t \int_Q \frac{d}{dn_P} [\omega(A,t;Q,\tau)] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau$$

$$= \int_0^t \int_Q \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{\cos\gamma_{AQ}^P}{r_{AQ}} \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau,$$

où \mathcal{P}_{AQ}^{P} désigne l'angle que fait le vecteur AQ avec la normale intérieure au point P de la frontière C; le point A se trouve sur cette normale.

THÉORÈME 8. La dérivée normale du potentiel de simple couche (42) possède la propriété limite suivante:

(50)
$$\lim_{A\to P_e\mathcal{O}} \frac{dW(A,t)}{dn_P} = \int_0^t \int_{\mathcal{O}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{\cos\gamma_{PQ}}{r_{PQ}} \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau \mp \pi \int_0^t \mu(P,\tau) d\tau,$$

la fonction $\mu(Q, \tau)$ étant supposée continue par rapport au point Q de la courbe C. Le signe — correspond à la valeur limite intérieure, le signe + à la valeur limite extérieure.

Démostration. Soit la fonction auxiliaire

(51)
$$W^*(A,t) = \int_{\mathcal{O}} \frac{\cos \gamma_{AQ}^P}{r_{AQ}} \mu^*(A,Q,t) dl_Q + \int_{\mathcal{O}} \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \mu^*(A,P,t) dl_Q,$$

οù

(52)
$$\mu^*(A,Q,t) = \int_0^t \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) d\tau,$$

$$\mu^*(A,P,t) = \int_0^t \exp\left[-\frac{r_{AP}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) d\tau.$$

Désignons par Θ l'angle que fait la normale au point Q avec la normale au point P sur laquelle est situé le point A. Nous avons

$$\gamma_{AQ}^{P} = \pi - (\Theta + \gamma_{QA}), \quad \cos \gamma_{AQ}^{P} = -\cos \Theta \cos \gamma_{QA} + \sin \Theta \sin \gamma_{QA}.$$

La fonction (51) s'exprime donc comme il suit:

$$(53) W^*(A,t) = \int_{\mathcal{C}} \left[\mu^*(A,P,t) - \mu^*(A,Q,t)\cos\Theta\right] \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} dl_Q + \int_{\mathcal{C}} \frac{\sin\Theta\sin\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \mu^*(A,Q,t) dl_Q.$$

La première intégrale dans l'expression (53) représente le potentiel de double couche, dont la densité est nulle au point P. Ce potentiel est donc continu au point P de la courbe C. La seconde intégrale (53) est aussi continue. Pour prouver ce fait il suffit de remarquer que

$$|\sin \Theta| < \operatorname{const} r_{PQ}^{\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

d'après l'hypothèse concernant le contour C (inégalité (6)). Il en résulte

$$\begin{split} \lim_{A \to P_\theta \mathcal{O}} W^*(A, t) &= \int_{\mathcal{O}} \frac{\cos \gamma_{PQ}}{r_{PQ}} \, \mu^*(P, Q, t) \, dl_Q + \int_{\mathcal{O}} \frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \, \mu^*(P, P, t) \, dl_Q \\ &= \int_{\mathcal{O}} \frac{\cos \gamma_{PQ}}{r_{PQ}} \, \mu^*(P, Q, t) \, dl_Q + \pi \int_{0}^{t} \mu(P, \tau) \, d\tau \end{split}$$

et nous arrivons à la propriété limite (50) c. q. f. d.

2.5. La dérivée tangentielle du potentiel de simple couche. La dérivée dans la direction d'une tangente au point $P \epsilon C$ du potentiel (42) s'exprime comme il suit:

(54)
$$\frac{dW(A,t)}{dl_P} = \int_0^t \int_Q \frac{d}{dl_P} [\omega(A,t;Q,\tau)] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau$$
$$= \int_0^t \int_Q \frac{\sin \gamma_{AQ}^P}{r_{AQ}} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau,$$

où γ_{AQ}^{P} désigne l'angle orienté que fait la normale au point arbitraire P de la courbe C avec le vecteur AQ.

THÉORÈME 9. Si la densité $\mu(Q,\tau)$ est continue dans le domaine $[Q \in C, 0 \leqslant \tau \leqslant T]$ et vérifie la condition de Hölder

(55)
$$|\mu(Q, \tau) - \mu(Q_1, \tau)| < H_{\mu} r_{QQ_1}^{\beta},$$

si la courbe C vérifie la condion (6) la dérivée du potentiel de simple couche au point $A \in D$ dans la direction d'une tangente au point arbitraire P de la courbe C, tend uniformément vers une limite déterminée par une intégrale singulière, au sens de la valeur principale de Cauchy:

$$\lim \frac{dW(A,t)}{dl_{\mathbf{P}}} = \int_{0}^{t} \int_{C} \frac{\sin \gamma_{PQ}}{r_{PQ}} \exp \left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right] \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau$$

si le point A tend vers le point P d'une façon arbitraire. (γ_{PQ} désigne l'angle que fait la normale au point arbitraire P de la courbe C avec le vecteur PQ; observons que cet angle est orienté, donc qu'il a une mesure positive ou négative).

Démonstration. Désignons d'abord

$$W^*(A,t) = dW(A,t)/dl_P$$

en admettant que le point A est situé sur la normale à la ligne C au point P. Remarquons qu'on a:

$$\begin{split} W^{\bullet}(A,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{\sin\gamma_{AQ}^P}{r_{AQ}} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau - \\ &- \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{\sin\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(P,\tau) dl_Q d\tau \\ &= \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{\sin\gamma_{AQ}^P - \sin\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{\sin\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \left[\mu(Q,\tau) - \mu(P,\tau)\right] dl_Q d\tau, \end{split}$$

où γ_{QA} désigne l'angle que fait la normale au point Q avec le vecteur AQ. Désignons ensuite

(56)
$$W^{*}(P,t) = \int_{0}^{t} \int_{C} \frac{\sin \gamma_{PQ} - \sin \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \exp \left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right] \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} \int_{C} \frac{\sin \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \exp \left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right] [\mu(Q,\tau) - \mu(P,\tau)] dl_{Q} d\tau.$$

Intégrales d'une éguation de l'hudrodunamique

Les suppositions faites permettent de constater que la singularité des fonctions figurant dans les intégrales dans les expressions (56) est faible.

Par une méthode identique à celle qu'on utilise dans la théorie du potentiel logarithmique nous pouvons démontrer que

$$|W^*(A,t)-W^*(P,t)|<\varepsilon$$
 si $|AP|<\eta_{\varepsilon}$

c. q. f. d. Le résultat reste vrai si le point A tend vers le point P d'une façon arbitraire.

THÉORÈME 10. Si la densité $\mu(Q, \tau)$ est continue et vérifie la condition (55), si la courbe C satisfait à la condition (6), les valeurs limites des dérivées tangentielles du potentiel de simple couche:

(57)
$$W^{*}(P,t) = \int_{0}^{t} \int_{Q} \frac{\sin \gamma_{PQ} - \sin \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau + \int_{0}^{t} \int_{Q} \frac{\sin \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] [\mu(Q,\tau) - \mu(P,\tau)] dl_{Q} d\tau$$

dans les directions des tangentes s_P à la courbe C, satisfont à la condition de $H\ddot{o}lder$ de la forme

$$|W^*(P,t) - W^*(P_1,t)| < (c_1 \sup |\mu| + \tilde{c}_1 H_{\mu}) t^{1-\lambda_p} P_{PP_1}$$

 c_1 et \tilde{c}_1 étant des constantes positives ne dépendant que de la courbe C, λ une constante arbitraire de l'intervalle (0,1).

Démonstration. Considérons le cercle Γ de rayon $r_{\Gamma}=2r_{PP_1}$ et de centre P. Il suffit d'étudier le cas $r_{PP_1}<\frac{1}{2}\delta$ où la constante positive δ est le rayon du cercle K de centre arbitraire $P \in C$, suffisamment petit pour que la partie de la courbe C située à l'intérieur du cercle K soit coupée par chaque parallèle à la normale en un point au plus.

Décomposons maintenant les intégrales (57) en trois parties:

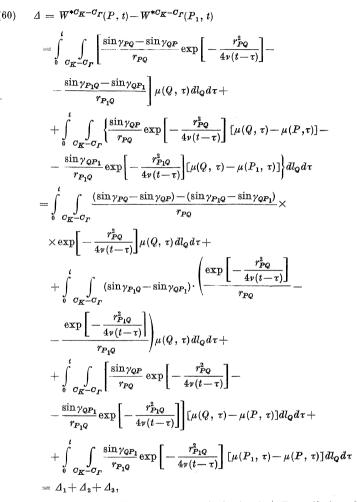
$$W^*(P,t) = W^{*C_{\Gamma}}(P,t) + W^{*C_{K}-C_{\Gamma}}(P,t) + W^{*C-C_{K}}(P,t),$$

où C_{Γ} désigne la partie de la courbe C intérieure au cercle Γ , C_{K} la partie de la courbe C intérieure au cercle K. Nous aurons évidemment:

$$(59) |W^{*C_{\Gamma}}(P,t)| \leq \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot t \int_{\mathcal{O}_{\Gamma}} \frac{dl_{Q}}{r_{PQ}^{1-\alpha}} + \operatorname{const} H_{\mu} t \int_{\mathcal{O}_{\Gamma}} \frac{dl_{Q}}{r_{PQ}^{1-\beta}}$$

$$< \operatorname{const} (\sup |\mu| + H_{\mu}) t \cdot r_{PP}^{\beta},$$

et la même inégalité pour $W^{*\mathcal{O}}r(P_1,\,t)$. Étudions maintenant la différence :



puisque la quatrième différence (60) est égale à zéro. Pour limiter la première partie Δ_1 de la différence (60), remarquons que, d'après la condition (6), on aura

$$|(\sin \gamma_{PQ} - \sin \gamma_{QP}) - (\sin \gamma_{P_1Q} - \sin \gamma_{QP_1})| < \operatorname{const} r_{PP_1}^a.$$

Il en résulte

$$(61) \qquad |\varDelta_1| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \tau_{PP_1}^{\alpha} \cdot t \cdot \int\limits_{2kr_{PP_1}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi} < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot t \cdot \tau_{PP_1}^{\Theta\alpha},$$

où $0 < \Theta < 1$, k est une constante positive telle que $r_{PQ'}/r_{PQ} > k$, Q' désigne la projection du point Q sur la tangente PX. Pour évaluer la seconde partie 1, de la différence (62) remarquons d'abord que, d'après la théorie des accroissements, nous aurons

(61')
$$\left| \frac{\exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right]}{r_{PQ}} - \frac{\exp\left[-\frac{r_{P1Q}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right]}{r_{P1Q}} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2\nu(t-\tau)} + \frac{1}{r_{P^{*}Q}^{2}} \right) \exp\left[-\frac{r_{P^{*}Q}^{2}}{4\nu(t-\tau)} \right] \cos(r_{P^{*}Q}, r_{PP_{1}}) \cdot r_{PP_{1}} \right|$$

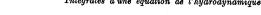
$$< \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \cdot \frac{r_{PP_{1}}}{r_{P^{*}Q}^{2-2\lambda}} + \frac{\text{const}}{r_{P^{*}Q}^{2}} \cdot r_{PP_{1}}.$$

Il en résulte, d'après l'inégalité évidente $\frac{1}{2}r_{PQ} < r_{PQ} < \frac{3}{2}r_{PQ}$, la limitation suivante:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{2}| &< \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{1-\lambda} \cdot r_{PP_{1}} \int_{2kr_{PP_{1}}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{2-2\lambda-\alpha}} + \\ &+ \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot t \cdot r_{PP_{1}} \int_{2kr_{PP_{1}}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{2-\alpha}} &< \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{1-\lambda} r_{PP_{1}}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, pour la troisième partie Δ_3 de la différence (62) nous obtenons

$$\begin{split} \varDelta_{3} &= \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{C_{K}-C_{I}} \frac{\sin \gamma_{QP} - \sin \gamma_{QP_{1}}}{r_{PQ}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \left[\mu(Q,\,\tau) - \mu(P,\,\tau)\right] dl_{Q} d\tau + \\ &+ \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{C_{K}-C_{I}} \sin \gamma_{QP_{1}} \left[\frac{\exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right]}{r_{PQ}} - \right. \\ &\left. - \frac{\exp\left[-\frac{r_{P_{1}Q}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right]}{r_{P_{1}Q}}\right] \left[\mu(Q,\,\tau) - \mu(P,\,\tau)\right] dl_{Q} d\tau \,. \end{split}$$



(63) $|A_3| < \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP_1}^{\alpha} \cdot t \cdot \int_{\xi^{1-\beta}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{1-\beta}} + \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP_1} - t \cdot \int_{\xi^{1-\beta}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{2-\beta}} +$ $+\operatorname{const} H_{\mu} r_{PP_1} t^{1-\lambda} \int\limits_{2t = \infty}^{\sigma} \frac{d\xi}{\xi^{2-2\lambda-\beta}}$ $< \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP}^{a}, t + \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP}^{\beta}, t + \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP}^{\beta+2\lambda} \cdot t^{1-\lambda}$ $< \operatorname{const} H_{\mu} r_{PP}^{\beta} \cdot t^{1-\lambda}$.

Il reste à étudier la dernière différence $W^{*C-C_K}(P, t) - W^{*C-C_K}(P_1, t)$. Maintenant la distance r_{PQ} n'est pas inférieure au rayon du cercle K, et le point P_1 se trouve à l'intérieur du cercle de centre P et de rayon $\frac{1}{2}\delta$. La fonction $W^{*C-C_K}(P, t)$ possède donc des dérivées bornées dans le voisinage du point P et elle vérifie l'inégalité de Lipschitz. Nous en tirons. en rapprochant les inégalités (61)-(65), la conclusion du théorème 10.

2.6. Limitations des dérivées. Pour trouver une limitation des dérivées du potentiel (42) écrivons

$$\begin{split} W_{A}'(A,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathcal{O}} \omega_{A}'(A,t;Q,\tau) \mu(Q,\tau) dl_{\mathbf{Q}} d\tau \\ &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathcal{O}} \omega_{A}'(A,t;Q,\tau) [\mu(Q,\tau) - \mu(P,\tau)] dl_{\mathbf{Q}} d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t \mu(P,\tau) \int\limits_{\mathcal{O}} \omega_{A}'(A,t;Q,\tau) dl_{\mathbf{Q}} d\tau \end{split}$$

P étant le point de la courbe C le plus rapproché du point intérieur A. Il en résulte, d'après l'inégalité admise (55) et les propriétés des dérivées du potentiel (42), la limitation suivante:

(64)
$$|W'_{\mathcal{A}}(A,t)| < k'_{\omega}[\sup |\mu| + H_{\omega}]t^{\lambda^{0}/2+1},$$

où λ^* est un nombre positif arbitraire vérifiant l'inégalité $\lambda^* < \beta$, et k'_{m} — un nombre positif ne dépendant que de la courbe C. Il en résulte, de même, que le potentiel W(A,t) satisfait à la condition de Lipschitz

(65)
$$|W(A,t) - W(A_1,t)| < k'_{\omega}(\sup |\mu| + H_{\mu})t^{\lambda^{*}/2+1} \cdot r_{AA_1},$$

où $A \in D + C$. Nous aurons encore la limitation suivante:

66)
$$\left| \int_{0}^{t} \int_{C} [\Delta\omega(A,t;Q,\tau)]'_{A}\mu(Q,\tau) dl_{Q}d\tau \right|$$

$$< \sup |\mu| \cdot \left| \int_{0}^{t} \int_{C} (\Delta\omega)'_{A} dl_{Q}d\tau \right| + \int_{0}^{t} \int_{C} |(\Delta\omega)'_{A}| \cdot |\mu(Q,\tau) - \mu(P,\tau)| dl_{Q}d\tau$$

$$< k_{\infty}'' [\sup |\mu| t^{1-\lambda_{1}} + H_{\mu}t^{1-\lambda_{2}}],$$
où $1 - a < \lambda_{1} < 1$: $1 - \frac{1}{2}\beta < \lambda_{2} < 1$.

2.7. La dérivée par rapport à la variable t du potentiel de double couche.

THÉORÈME 11. La dérivée par rapport à la variable t du potentiel de double couche (45) s'exprime par la formule

$$(67) \quad \frac{\partial U(A,t)}{\partial t} = \int_0^t \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dn_Q} \omega(A,t;Q,\tau) \right] \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau$$

$$= \int_0^t \int_Q \frac{r_{AQ}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)} \right] \cos \gamma_{QA} \mu(Q,\tau) dl_Q d\tau,$$

où $A \in D + C$, $0 \leq t \leq T$.

Démonstration. La propriété est évidente si le point A n'est pas situé sur la frontière C. Dans le cas $A = P \in C$, considérons la fonction

(68)
$$\overline{U}(P, t, \tau) = \int_{C} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{PQ}}\mu(Q, \tau) dl_{Q}.$$

La fonction (68) tend vers zéro si $\tau \to t$. En effet nous avons

$$\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]\frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{PQ}} = \left[\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}\right]^{\lambda} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]\frac{\cos\gamma_{QA}\cdot4^{\lambda}(t-\tau)^{\lambda}}{r_{PQ}^{1+2\lambda}}.$$

Nous en tirons, en choisissant $0 < \lambda < \frac{1}{2}\alpha$,

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \exp \left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)} \right] \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{PQ}} \, \mu(Q,\,\tau) \, dl_Q \right| < (t-\tau)^{\lambda} \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{const} \cdot \sup |\mu|}{r_{PQ}^{1+2\lambda-\alpha}} \, dl_Q \to 0$$

si $\tau \to t$. La fonction $\overline{U}(P, t, \tau)$ est continue dans le domaine $0 \le t \le T$, $0 \le \tau < t$, $P \in C$ et sa dérivée est:

$$\begin{split} \frac{\partial \, \overline{U}(P,\,t,\,\tau)}{\partial t} &= \int\limits_{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)} \right] \right] \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{PQ}} \mu(Q,\,\tau) \, dl_Q \\ &= \int\limits_{Z} \frac{r_{PQ}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)} \right] \cos \gamma_{QA} \mu(Q,\,\tau) \, dl_Q. \end{split}$$

Or nous avons la limitation

$$\left|\frac{r_{PQ}}{4\nu(t-\tau)^2}\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]\cos\gamma_{QA}\right|<\frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^\lambda}\cdot\frac{1}{r_{PQ}^{3-2\lambda-\alpha}},$$

d'où nous pouvons conclure, que

$$\left| rac{\partial}{\partial t} \, \overline{U}(P,t, au)
ight| < rac{ ext{const}}{(t- au)^{\lambda}}, \quad ext{ où } \quad 1-a/2 < \lambda < 1.$$

L'inégalité précédente pour la fonction $\frac{\partial}{\partial t} \overline{U}(P, t, \tau)$ nous permet de déduire, de même que dans le travail [1], que la dérivée $\partial U/\partial t$ s'exprime par la formule (67).

THÉORÈME 12. Si la fonction $\mu(Q, \tau)$, definie dans le domaine $Q \in C$, $0 \le \tau \le T$, est bornée et intégrable et si la courbe C vérifie la condition (6), la fonction (67) vérifie la condition de Hölder par rapport au point P de la courbe C avec un exposant arbitrairement inférieur à l'exposant α de l'hypothèse (6) et, par rapport à la variable t, la condition de Hölder avec un exposant arbitrairement inférieur à la moitié, c'est-à-dire:

$$(70) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} U(P,t) - \frac{\partial}{\partial t} U(P_1,t_1) \right| < c_2 \sup |\mu| \left[r_{PP_1}^{\theta a} \cdot t^{(1-\theta)a/2} + |t-t_1|^{\theta'/2} \right]$$

 θ et θ' désignent deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité $(t_1 < t)$.

Démonstration. D'abord nous allons démontrer la propriété (70) si $t_1=t$. Les valeurs de la fonction (67) correspondant à deux points arbitraires P et P_1 de la courbe C s'expriment par les intégrales généralisées suivantes:

$$\begin{split} \frac{\partial U(P,t)}{\partial t} &= \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{r_{PQ}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \cos\gamma_{QP}\mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau\,, \\ (71) &\qquad \frac{\partial U(P_1,t)}{\partial t} &= \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{r_{P1Q}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \cos\gamma_{QP_1}\mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau\,. \end{split}$$

Considérons le cercle Γ de rayon $2r_{PP1}$ et de centre P. Il suffit d'étudier le cas $r_{PP1} < \frac{1}{2}\delta$, où la constante positive δ est le rayon du cercle K de centre arbitraire $P \in C$, assez petit pour que la partie de la courbe C intérieure au cercle K puisse être coupée par chaque parallèle à la normale en P en un point au plus.

Décomposons maintenant les intégrales (71) en trois parties:

$$(72) \qquad \frac{\partial U(P,t)}{\partial t} = U_t^{C_F}(P,t) + U_t^{C_K-C_F}(P,t) + U_t^{C-C_K}(P,t),$$

$$\frac{\partial U(P_1,t)}{\partial t} = U_t^{C_F}(P_1,t) + U_t^{C_K-C_F}(P_1,t) + U_t^{C-C_K}(P_1,t),$$

où C_F désigne la partie de la courbe C intérieure au cercle F, C_K la partie de la courbe C intérieure au cercle K. Nous aurons évidemment, d'après l'inégalité (69),

(73)
$$|U_t^{C_F}| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{(1-\theta)\alpha/2} r_{PP_1}^{\theta\alpha},$$

où nous avons posé $\alpha - 2 + 2\lambda = \theta \alpha$.

Étudions maintenant la différence

$$\Delta = U_t^{C_K - C_\Gamma}(P, t) - U_t^{C_K - C_\Gamma}(P_1, t)$$

en la décomposant en deux parties:

(74)
$$\Delta = \int_{0}^{t} \int_{C_{K}-C_{\Gamma}} \frac{r_{PQ}\cos\gamma_{QP} - r_{P_{1}Q}\cos\gamma_{QP_{1}}}{4\nu(t-\tau)^{2}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} \int_{C_{K}-C_{\Gamma}} \frac{r_{P_{1}Q}\cos\gamma_{QP_{1}}}{4\nu(t-\tau)^{2}} \left[\exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] -$$

$$- \exp\left[-\frac{r_{P_{1}Q}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \mu(Q,\tau) dl_{Q} d\tau.$$

Pour limiter la première partie de Δ , considérons un système de coordonnées OXY dont l'origine est au point P et l'axe PY est la normale intérieure à la courbe C. Les coordonnées des points P, Q, P_1 sont: P(0,0), $Q(\xi,\eta)$, $P_1(\bar{x},\bar{y})$. Alors nous aurons

$$\begin{aligned} |r_{PQ}\cos\gamma_{QP} - r_{P_1Q}\cos\gamma_{QP_1}| &= |\overline{x}\cos(x, n_Q) + \overline{y}\cos(y, n_Q)| \\ &< |\overline{x}\cos(x, n_Q)| + |\overline{y}\cos(y, n_Q)|. \end{aligned}$$

D'après les inégalités connues:

$$|\overline{x}| < \operatorname{const} r_{PP_1}^{a+1}, \quad |\cos(y, n_Q)| < \operatorname{const} r_{PQ}^a, \quad |\overline{y}| < r_{PP_1}, \quad |\cos(x, n_Q)| \leqslant 1,$$

nous obtenons

(75) $|r_{PQ}\cos\gamma_{QP} - r_{P_1Q}\cos\gamma_{QP_1}| < \operatorname{const}(r_{PP_1}^{a+1} + r_{PP_1} \cdot r_{PQ}^a)$, si $Q \in C_K$. D'après l'inégalité (75) et la limitation

$$\left|\frac{1}{4\nu(t-\tau)^2}\exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right]\right| < \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{4-2\lambda}} \quad (0 < \lambda < 1),$$

le premier membre Δ_1 de la différence Δ (74) vérifie l'inégalité

$$\begin{split} |\varDelta_1| &< \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\lambda} \bigg[r_{PP_1}^{a+1} \int\limits_{C_K - C_F} \frac{dl_Q}{r_{PQ}^{4-2\lambda}} + r_{PP_1} \int\limits_{C_K - C_F} \frac{dl_Q}{r_{PQ}^{4-2\lambda-a}} \bigg] \\ &< \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{1-\lambda} \bigg[r_{PP_1}^{a+1} \int\limits_{2k\tau_{PP_1}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{4-2\lambda}} + r_{PP_1} \int\limits_{2k\tau_{PP_1}}^{\delta} \frac{d\xi}{\xi^{4-2\lambda-a}} \bigg], \end{split}$$

où k est une constante positive telle que $r_{PQ'}/r_{PQ} > k$, Q' désignant la projection du point Q sur la tangente PX. Il en résulte l'inégalité suivante:

(76)
$$|\Delta_1| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{1-\lambda} r_{PP_1}^{\alpha+2\lambda-2} = \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{(1-\theta)\alpha/2} r_{PP_1}^{\theta\alpha},$$

où nous avons posé $\alpha+2\lambda-2=\theta\alpha$, $0<\theta<1$. Pour évaluer la seconde partie Δ_2 de la différence (74), remarquons d'abord que, d'après le théorème des accroissements, nous aurons

$$\begin{split} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{r_{P_1Q}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \\ = \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{r_{P^*Q}}{2\nu(t-\tau)} \cos(r_{P^*Q}, r_{PP_1}) \cdot r_{PP_1}, \end{split}$$

où P^* désigne un point à l'intérieur du segment PP_1 . Si le point Q est extérieur au cercle Γ , alors pour chaque point P^* du segment PP_1 nous aurons l'inégalité

$$\frac{1}{2}r_{PQ}\leqslant r_{P^*Q}\leqslant \frac{3}{2}r_{PQ}.$$

D'après les remarques précédentes nous obtenons

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{2}| &< \operatorname{const} r_{PP_{1}} \int_{0}^{t} \int_{C_{K}-C_{I}} \frac{r_{PQ}^{2+\alpha}}{4\nu(t-\tau)^{3}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] |\mu| \, dl_{Q} d\tau \\ &< \operatorname{const} \cdot \sup|\mu| r_{PP_{1}} \int_{0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\lambda}} \cdot \int_{C_{K}-C_{I}} \frac{dl_{Q}}{r_{PQ}^{4-2\lambda-\alpha}} \\ &< \operatorname{const} \cdot \sup|\mu| \, t^{1-\lambda} r_{PP_{1}}^{\alpha+2\lambda-2} &= \operatorname{const} \cdot \sup|\mu| \, t^{(1-\theta)\alpha/2} r_{PP_{1}}^{\theta\alpha}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (76) et (77), on obtient enfin

(78)
$$|\Delta| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| t^{(1-\theta)a/2} r_{PP_1}^{\theta a}.$$

Il reste à étudier la dernière différence

$$U_t^{C-C_K}(P,t)-U_t^{C-C_K}(P_1,t)$$
.

Maintenant la distance r_{PQ} n'est pas inférieure au rayon du cercle K, et le point P_1 est intérieur au cercle de centre P et de rayon $\frac{1}{2}\delta$. La fonction $U_t^{\mathcal{C}-\mathcal{C}_K}(P,t)$ possède donc des dérivées bornées dans le voisinage du point P et elle vérifie l'inégalité de Lipschitz. Nous en tirons la première partie de la conclusion du théorème 12.

Nous allons maintenant montrer que l'inégalité (70) est vraie par rapport à la variable t. Les valeurs de la fonction (67) pour deux valeurs arbitraires t et t_1 ($t_1 < t$) de l'intervalle (0, T) s'expriment par les intégrales suivantes:

(79)
$$\frac{\partial U(P,t)}{\partial t} = \int_{0}^{t} \int_{Q} \frac{r_{PQ}}{4\nu(t-\tau)^{2}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t-\tau)}\right] \cos\gamma_{QP}\mu(Q,\tau) dl_{Q}d\tau,$$

$$\frac{\partial U(P,t_{1})}{\partial t} = \int_{0}^{t} \int_{Q} \frac{r_{PQ}}{4\nu(t_{1}-\tau)^{2}} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^{2}}{4\nu(t_{1}-\tau)}\right] \cos\gamma_{QP}\mu(Q,\tau) dl_{Q}d\tau.$$

Décomposons la différence des valeurs de la fonction $\partial U/\partial t$ aux deux points (P,t) et (P,t_1) de la façon suivante:

(80)

$$\begin{split} U_t'(P,t) - U_t'(P,t_1) &= \int_{t_1}^t \int_{\mathcal{O}} \frac{r_{PQ}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \cos\gamma_{QP}\mu(Q,\tau) \, dl_Q d\tau + \\ &+ \int_{t}^{t_1} \int_{\mathcal{O}} \left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_{QP}}{4\nu(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}\right] - \\ &- \frac{r_{PQ}\cos\gamma_{QP}}{4\nu(t_1-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}\right]\right] \mu(Q,\tau) \, dl_Q d\tau. \end{split}$$

La première des intégrales (80), en vertu de l'inégalité (69) et de l'existence de la borne supérieure de l'intégrale

$$\int\limits_{C} \frac{\mu(Q,\,\tau)\,dl_Q}{r_{PQ}^{3-2\lambda-\alpha}}, \quad \text{ où } \quad 1-a/2 < \lambda < 1,$$

admet la limitation

$$|J_1| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \, |t - t_1|^{1-\lambda}.$$

Pour étudier la seconde intégrale (80), considérons encore le cercle Π de centre P et dont le rayon r_{Π} n'est pas fixé pour le moment. Décomposons la seconde intégrale J_2 de la différence (80) en deux parties:

$$J_2 = J_2^{C_{II}} + J_2^{C-C_{II}}$$

prises suivant la portion C_H de la courbe C intérieure au cercle H et la portion $C-C_H$ extérieure au cercle H. Il suffit d'étudier le cas où le rayon r_H est suffisamment petit pour que la courbe C_H soit intérieure au cercle K précisé dans la première partie de notre démonstration.

Écrivons encore

$$\begin{split} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathcal{O}_H} \frac{r_{PQ} \cos \gamma_{QP}}{4\nu (t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu (t-\tau)}\right] \mu(Q,\,\tau) \, dl_Q d\tau \\ &= \int\limits_{\mathcal{O}_H} \left[\int\limits_0^t \frac{r_{PQ}^2}{4\nu (t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu (t-\tau)}\right] \mu(Q,\,\tau) \, d\tau\right] \frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \, dl_Q \\ &= \int\limits_{\mathcal{O}_H} \left[\int\limits_{r_{PQ}^2/4\nu l}^\infty e^{-q} \mu\left(Q,\,t-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu q}\right) dq\right] \frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \, dl_Q, \end{split}$$

où nous avons posé $q = r^2/4\nu(t-\tau)$. Nous en tirons

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_{Q_H} \frac{r_{PQ} \cos \gamma_{QP}}{4\nu (t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu (t-\tau)} \right] \mu(Q,\,\tau) \, dl_Q d\tau \, \right|$$

$$<\sup |\mu| \cdot \left| \int\limits_{C_H} rac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} dl_Q
ight| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \, r_H^a.$$

Il en résulte que

$$|J_2^{C_H}| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| r_H^a.$$

Soit maintenant la fonction

$$N(r,t) = rac{r\cos\gamma_{QP}}{4
u t^2} \exp\left[-rac{r^2}{4
u t}
ight].$$

Sa dérivée $N'_t(r, t)$ est

$$N_t'(r,t) = \left[-rac{r}{2\nu t^3} + rac{r^3}{16
u^2 t^4}
ight] \exp\left[-rac{r^2}{4
u t}
ight] \cos \gamma_{QP} \ = \left[-\left(rac{r^2}{4
u t}
ight)^{3-\lambda} + \left(rac{r^2}{4
u t}
ight)^{4-\lambda}
ight] \exp\left[-rac{r^2}{4
u t}
ight] \cos \gamma_{QP} rac{2^{5-2\lambda}}{r^{5-2\lambda}}.$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante k_N telle qu'on ait

$$|N_t'(r,t)| < \frac{k_N}{r^{\delta-2\lambda-\alpha}} \cdot \frac{1}{t^{\lambda}}$$

pour chaque r et $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. La seconde intégrale $J_2^{C-C_H}$ de la différence (80) admet la limitation

$$\begin{split} |J_2^{C-C_H}| &< \int_0^{t_1} \left[\int_{C-C_H} \frac{k_N |t-t_1| \, dl_Q}{r_{PQ}^{5-2\lambda-\alpha}} \right] \frac{\mu \left(Q,\,\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\lambda}} \, d\tau \\ &< \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot |t-t_1| \int_{C-C_H} \frac{dl_Q}{r_{PQ}^{5-2\lambda-\alpha}} \, . \end{split}$$

Pour évaluer l'intégrale à droite de l'inégalité (84), remarquons que

$$\int_{C-C_H} \frac{dl_Q}{r_{PQ}^{5-2\lambda-\alpha}} < 2 \int_{k_1 r_H}^L \frac{d\xi}{\xi^{5-2\lambda-\alpha}} < \frac{\mathrm{const}}{r_H^{4-2\lambda-\alpha}},$$

où k_1 désigne la borne inférieure du rapport PQ'/PQ, L — le diamètre de l'ensemble C. Nous en tirons que

$$|J_2^{C-C_{II}}| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot |t - t_1| \cdot \frac{1}{r_H^{n-2\lambda - \alpha}},$$

où la constante ne dépend pas de $r_{I\!\!I}$. Choisissons maintenant le rayon $r_{I\!\!I}$ en posant

$$r_{II} = \operatorname{const}|t - t_1|^{\lambda^{\bullet}} < \delta,$$

où la constante positive λ* vérifie l'inégalité

$$\lambda^*(4-2\lambda-a)<1.$$

Le choix de la constante positive λ^* sera le plus avantageux si l'on prend

$$1-\lambda^*(4-2\lambda-\alpha)=\lambda^*\alpha.$$

d'où

$$\lambda^* = \frac{1}{4-2\lambda}.$$

D'après les inégalités (82) et (85), nous avons

$$|J_2| < \operatorname{const} \cdot \sup |\mu| \cdot |t - t_1|^{\theta'/2}, \quad \text{ où } \quad 0 < \theta' < 1.$$

En rapprochant les inégalités (81) et (86), nous obtenons la seconde partie de la conclusion du théorème 12. Évidemment nous aurons la limitation

(87)
$$\left| \frac{\partial .U}{\partial t} \right| < k_{\omega}^{\mathbf{IV}} t^{(\mathbf{1} - \theta)a/2} \sup |\mu|.$$

Remarque. Les résultats précédents peuvent être obtenus, par la même méthode, dans le cas de la dérivée normale du potentiel de simple couche. Les inégalités (70) et (87) sont aussi vraies pour la fonction ΔU , puisque la fonction U satisfait à l'équation de la chaleur $\Delta U - -\partial U/\partial t = 0$.

2.8. Potentiel logarithmique de double couche. Considérons le potentiel logarithmique de double couche:

(88)
$$Z(A,t) = \int_{Q} \frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \zeta(Q,t) dl_{Q},$$

où γ_{QA} désigne l'angle que fait la normale intérieure au point Q de la courbe C avec le vecteur QA; la fonction ζ est bornée et intégrable en tout point $Q \in C$, pour $0 \le t \le T$. La fonction (88) satisfait à l'équation (4) en tout point A extérieur à la courbe C, et en tout point $P \in C$ elle s'exprime par l'intégrale absolument convergente

$$Z(P,t) = \int\limits_{C} rac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \zeta(Q,t) dl_{Q}.$$

Il est bien connu, d'après la théorie du potentiel logarithmique, que le potentiel (88) admet des valeurs limites si le point A tend vers le point $P \in C$, qui s'expriment comme il suit:

(89)
$$\lim Z(A,t) = Z(P,t) \pm \pi \zeta(P,t)$$

(où le signe + correspond à la valeur limite intérieure, le signe - à la valeur limite extérieure).

THÉORÈME 13. Si la fonction $\zeta(Q,t)$ est continue et bornée dans la région $[Q \in C, 0 \le t \le T]$ et si la courbe C vérifie la condition (6), le potentiel (88) satisfait à la condition de Hölder par rapport au point P de la courbe C avec un exposant arbitrairement inférieur à l'exposant a, c'est-à-dire:

(90)
$$|Z(P,t)-Z(P_1,t)| < c_3 \sup |\zeta| r_{PP_1}^{\theta a} \quad (0 < \theta < 1),$$

où la constante positive c3 ne dépend que de la courbe C.

La preuve de ce théorème a été donnée dans le travail de W. Pogorzelski [2].

2.9. La dérivée normale du potentiel logarithmique de double couche. Écrivons le potentiel (88) sous la forme suivante:

$$\begin{split} (91) \quad Z(A\,,\,t) &= \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \left[\zeta(Q\,,\,t) - \zeta(P\,,\,t) \right] dl_Q + \zeta(P\,,\,t) \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \, dl_Q \\ &= \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\cos\gamma_{QA}}{r_{AQ}} \left[\zeta(Q\,,\,t) - \zeta(P\,,\,t) \right] dl_Q + 2\pi\zeta(P\,,\,t) \end{split}$$

P étant un point arbitrairement choisi de la courbe C. Il en résulte que la dérivée du potentiel (88) dans la direction d'une normale au point P de la courbe C (le point A est situé sur cette normale) s'exprime par l'intégrale

(92)
$$\frac{dZ(A,t)}{dn_P} = \int_{C} \frac{d}{dn_P} \left(\frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \right) \left[\zeta(Q,t) - \zeta(P,t) \right] dl_Q.$$

Dans le travail [5] J. Schauder a démontré que la dérivée normale du potentiel newtonien de double couche admet des valeurs limites si le point A tend vers le point $P \in C$ et que cette dérivée tend uniformément vers ses valeurs au bord, sous la condition que la densité de la charge possède une dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder, et que la courbe C satisfasse à la condition (6). Sous les mêmes conditions J. Schauder a démontré que la dérivée normale satisfait à la condition de Hölder en tout point P de la courbe C.

En profitant des résultats de J. Schauder nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 14. Si la fonction $\zeta(Q,t)$ possède une dérivée par rapport à l'arc continue, vérifiant la condition de Hölder:

(93)
$$\left| \frac{d\zeta(Q,t)}{dt} - \frac{d\zeta(Q_1,t)}{dt} \right| < \tilde{H}_{\xi} r_{\mathbf{Q} \mathbf{Q}_1}^{\theta}$$

et si la courbe C vérifie la condition (6) $(0 < \beta \le a)$, la dérivée normale du potentiel (88) sous la forme (92) tend uniformément vers la valeur limite

$$\lim_{A \to P \in \mathcal{O}} \frac{dZ(A,t)}{dn_P} = \frac{dZ(P,t)}{dn_P} = \int_{\mathcal{O}} \frac{d}{dn_P} \left(\frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \right) \left[\zeta(Q,t) - \zeta(P,t) \right] dl_Q$$

et la valeur limite existe dans le sens de la valeur principale de Cauchy

Démonstration. La valeur limite

$$\begin{split} \frac{dZ(P,t)}{dn_P} &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d}{dn_P} \left(\frac{\cos \gamma_{QP}}{r_{PQ}} \right) \left[\zeta(Q,t) - \zeta(P,t) \right] dl_Q \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{2\cos \gamma_{QP} \cdot \cos \gamma_{PQ} - \cos \theta}{r_{PQ}^2} \left[\zeta(Q,t) - \zeta(P,t) \right] dl_Q \end{split}$$

(où θ est l'angle entre la normale au point P et la normale au point Q) a le sens de la valeur principale de Cauchy. En effet, en vertu des hypothèses nous pouvons écrire

$$(94) \quad \frac{dZ(P,t)}{dn_{P}} = \int_{C} \frac{2\cos\gamma_{QP}\cdot\cos\gamma_{PQ}-\cos\theta}{r_{PQ}^{2}} \cdot \frac{d\zeta(Q^{*},t)}{dl} (l_{Q}-l_{P}) dl_{Q}$$

$$= \frac{d\zeta(P,t)}{dl} \int_{C} \frac{2\cos\gamma_{QP}\cos\gamma_{PQ}}{r_{PQ}^{2}} (l_{Q}-l_{P}) dl_{Q} - \frac{d\zeta(P,t)}{dl} \int_{C} \frac{\cos\theta}{r_{PQ}^{2}} (l_{Q}-l_{P}) dl_{Q} +$$

$$+ \int_{C} \frac{2\cos\gamma_{QP}\cos\gamma_{PQ}-\cos\theta}{r_{PQ}^{2}} \left[\frac{d\zeta(Q^{*},t)}{dl} - \frac{d\zeta(P,t)}{dl} \right] (l_{Q}-l_{P}) dl_{Q},$$

 Q^* étant un point intérieur de l'arc PQ. Remarquons que la première et la troisième intégrale dans l'expression (94) possèdent une singularité faible. La deuxième intégrale peut être exprimée par deux intégrales

$$\begin{split} (94') \qquad & \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos \theta}{r_{PQ}'} (l_{Q} - l_{P}) \, dl_{Q} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos \theta - 1}{r_{PQ}^{2}} \, (l_{Q} - l_{P}) \, dl_{Q} + \int_{\mathcal{C}} \frac{l_{Q} - l_{P}}{r_{PQ}^{2}} \, dl_{Q} \\ & = -2 \int_{\mathcal{C}} \frac{\sin^{2} \theta / 2}{r_{PQ}^{2}} \, (l_{Q} - l_{P}) \, dl_{Q} + \int_{\mathcal{C}} \frac{l_{Q} - l_{P}}{r_{PQ}^{2}} \, dl_{Q}. \end{split}$$

La première intégrale (94') possède une singularité faible, ou bien elle est régulière, la seconde existe dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

Par la méthode connue dans la théorie classique du potentiel, on peut démontrer que

$$\left|rac{dZ(P,t)}{dn} - rac{dZ(A,t)}{dn}
ight| < arepsilon \quad ext{si} \quad |AP| < \eta_{m{s}}.$$

En s'appuyant maintenant sur la transformation (94) nous pouvons démontrer la limitation suivante:

(95)
$$\left|\frac{dZ(P,t)}{dn_P}\right| < \left(c' \sup \left|\frac{d\zeta}{dt}\right| + c'_4 \tilde{H}_{\xi}\right).$$

THÉORÈME 15. Si la fonction $\zeta(Q,t)$ satisfait à la condition (93) et si la courbe C satisfait à la condition (6), la valeur limite de la dérivée normale (92) satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$\left|\frac{dZ(P,t)}{dn_{P}} - \frac{dZ(P_{1},t)}{dn_{P_{1}}}\right| < \left(\tilde{c}\sup\left|\frac{d\zeta}{dl}\right| + c_{4}\tilde{H}_{\xi}\right) \cdot r_{PP_{1}}^{\theta},$$

où la constante positive c, ne dépend que de la courbe C.

Le théorème précédent peut être démontré par une méthode analoone à celle du travail [4].

En outre, en profitant des résultats de J. Schauder [5], nous pouvons énoncer un théorème concernant la dérivée tangentielle du potentiel (88):

Théorème 16. Si la fonction $\zeta(Q,t)$ vérifiant la condition de Hölder

$$|\zeta(Q,t) - \zeta(Q_1,t)| < H_{\zeta} r_{PP_1}^{\beta_1}$$

est continue par rapport à la variable t et si $\alpha + \beta_1 > 1$, le potentiel (88) admet, en tout point P de la courbe C elle-même, une dérivée par rapport à l'arc véritiant la condition de Hölder

$$\left|\frac{dZ(P,t)}{dl} - \frac{dZ(P_1,t)}{dl}\right| < (c_5H_{\zeta} + c_6\sup|\zeta|) \cdot r_{PP_1}^{a+\beta_1-1},$$

où les constantes c_5 , c_6 ne dépendent que de la courbe C.

On obtient de même la limitation suivante de la dérivée en tout point P de la courbe C

(98')
$$\left|\frac{dZ(P,t)}{dl}\right| < (c_{\mathtt{S}}'H_{\xi} + c_{\mathtt{S}}'\sup|\zeta|),$$

où les constantes c_s' , c_s' ne dépendent que de la courbe C.

Nous aurons encore besoin de la propriété concernant la limitation des dérivées par rapport au point A du potentiel de double couche (88).

Théorème 16'. Si la densité $\zeta(Q,t)$ satisfait à la condition (93) et si la courbe C satisfait à la condition (6), le potentiel de double couche (88) admet des dérivées par rapport aux coordonnées du point A

$$Z'_{\mathcal{A}}(A,t) = \int\limits_{C} \left(\frac{\cos \gamma_{QA}}{r_{AQ}} \right)'_{\mathcal{A}} \left[\zeta(Q,t) - \zeta(P,t) \right] dl_{Q},$$

qui ont des valeurs limites déterminées si le point A tend vers le point P & C, et admettent une limitation de la forme

$$(99) Z_{A}^{\prime}(A,t) < \tilde{c}^{\prime} \sup \left| \frac{d\zeta}{dl} \right| + \tilde{c}^{\prime\prime\prime} \tilde{H}_{\xi},$$



 $ilde{c}'$ et $ilde{c}''$ étant des constantes positives ne dépendant que de la frontière C.Démonstration. Nous pouvons transformer la dérivée $Z_A^\prime(A\,,\,t)$ de la manière suivante:

$$\begin{split} Z_{\mathcal{A}}'(A,t) &= \int\limits_{\mathcal{C}} \left(\frac{\cos\gamma_{Q\mathcal{A}}}{r_{AQ}}\right)_{\mathcal{A}}' \frac{d\zeta(Q^*,t)}{dl} \left(l_Q - l_P\right) dl_Q \\ &= \int\limits_{\mathcal{C}} \left(\frac{\cos\gamma_{Q\mathcal{A}}}{r_{AQ}}\right)_{\mathcal{A}}' \left[\frac{d\zeta(Q^*,t)}{dl} - \frac{d\zeta(P,t)}{dl}\right] \left(l_Q - l_P\right) dl_Q + \\ &+ \frac{d\zeta(P,t)}{dl} \int\limits_{\mathcal{C}} \left(\frac{\cos\gamma_{Q\mathcal{A}}}{r_{AQ}}\right)_{\mathcal{A}}' \left(l_Q - l_P\right) dl_Q \end{split}$$

 $P \epsilon C$ désignant le point le plus proche du point intérieur A. D'après la transformation (94), la limitation (95) et (98') nous pouvons démontrer l'existence d'une limite de la dérivée $Z_A'(A,t)$ si le point A tend vers le point $P \in C$, et de plus la limitation (99).

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique, Ricerche di Matematica 5 (1956), p. 1-33.

[2] - Problème aux limites de Poincaré généralisé, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 257-270.

[3] - Propriétés des intégrales de l'équation parabolique générale, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 407-410.

[4] - Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 247-284.

[5] J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen, Math. Zeit. 33 (1931), p. 602-640.

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1957