On démontre sans peine que la courbe C ainsi construite jouit de la propriété formulée au n° 2. Le théorème se trouve ainsi démontré.

5. Remarque I. La construction de la courbe C suffit pour démontrer l'existence d'une au moins solution périodique de l'équation (1) seulement dans le cas de l'unicité des solutions de cette équation. Dans le cas contraire, on devrait construire deux suites de fonctions $\{f_n(x, v)\}$, $\{g_n(x)\}$ de classe C^1 satisfaisant aux hypothèses (2), (3) et (8) et uniformément convergentes vers les fonctions $f(x, v)$ et $g(x)$. Alors chacune des équations

$$x''+f_n(x, x')x'+g_n(x) = e(t) \tag{1_n}$$

admettrait au moins une solution $x_n(t)$ périodique de période ω. De la démonstration exposée aux n^os^ précédents il résulte que ces solutions pourraient être choisies de sorte que l'on ait

$$|x_n(t)| \leqslant L, \quad |x'_n(t)| \leqslant L \quad (t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots)$$

où L est une constante indépendante de n. Des équations (1_n) il suit que l'on aurait aussi

$$|x''_n(t)| \leqslant L' \quad (t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

De la suite $\{x_n(t)\}$ on pourrait donc extraire une suite partielle convergente vers une solution périodique de l'équation (1).

Remarque. II. De la démonstration du théorème il résulte immédiatement que, dans les hypothèses de ce théorème, toutes les intégrales de l'équation (1) sont bornées avec leurs dérivées premières dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$. Cela cesse d'être vrai si, dans l'inégalité (8), on remplace la constante $Ma+E$ par une autre plus petite. En effet, l'équation (1) où

$$g(x) = Ma+E-M\varepsilon, \quad e(t) = E \quad \text{et} \quad f(x, a-\varepsilon) = -M \quad (x \geqslant 0, \varepsilon > 0)$$

admet la solution $x(t) = (a-\varepsilon)t$ qui n'est pas bornée.

Travaux cités

[1] C. Langenhop, *Note on Levinson's existence theorem for forced periodic solutions of a second order differential equation*, Journ. Math. Phys. 30 (1951), p. 36-39.

[2] S. Lefschetz, *Differential equations*, New York 1957.

[3] N. Levinson, *On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term*, Journ. Math. Phys. 22 (1943), p. 41-48.

[4] R. Reissig, *Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied*, Math. Nachrichten 14 (1956), p. 341-348.

[5] G. Sansone, R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Roma 1956.

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

Sur une inégalité différentielle

par C. Olech et Z. Opial (Kraków)

1. Supposons que la fonction $f(x, y)$ définie dans l'ensemble B: $0 \leqslant x \leqslant h$, $-\infty < y < +\infty$ vérifie les conditions (C) de Carathéodory (cf. [4], p. 665), c'est-à-dire:

(i) pour tout y $f(x, y)$ est mesurable par rapport à x;

(ii) pour tout $x \in \langle 0, h\rangle$ $f(x, y)$ est continue par rapport à y;

(iii) il existe une fonction mesurable $M(x)$ telle l'on a pour tout point $(x, y) \in B$:

$$|f(x, y)| \leqslant M(x) \quad \text{et} \quad \int_0^h M(x)\,dx < +\infty. \tag{1}$$

Envisageons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Toute fonction absolument continue $y(x)$ pour laquelle la relation

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

est vérifiée presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ est appelée solution de l'équation (2). On sait (cf. [4], p. 665-674 et [8], p. 140-146) que si la fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions (C), pour tout point $(x_0, y_0) \in B$ il existe au moins une solution de l'équation (2), définie dans tout l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à y_0 au point x_0. En particulier, il existe une solution de l'équation (2), définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à 0 au point 0. Bien plus, de même que pour les équations (2) à seconds membres continus, il existe une solution supérieure à droite de l'équation (2), définie dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et égale à 0 au point 0 (cf. [3], § 1). Dans toute la suite nous la désignerons par $\psi(x)$.

2. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Supposons qu'elle satisfasse presque partout dans l'intervalle envisagé à l'inégalité différentielle

$$\underline{D}_+\varphi(x) \leqslant f(x, \varphi(x)) \tag{3}$$

où $\underline{D}_+\varphi(x)$ désigne le nombre dérivé inférieur à droite de la fonction $\varphi(x)$ au point x.

Dans certaines hypothèses sur les fonctions $f(x,y)$ et $\varphi(x)$ l'inégalité différentielle (3) a été déjà envisagée par plusieurs auteurs. Ainsi, par exemple, E. Baiada [1], J. Szarski [9], S. Tchaplyguine [10] et T. Ważewski [11] l'ont étudiée en admettant que la fonction $f(x,y)$ est continue et L. Giuliano [5] dans l'hypothèse que $f(x,y)$ est une fonction linéaire par rapport à y et satisfaisant aux conditions de Carathéodory. Enfin F. Cafiero [2] a envisagé le cas le plus général où la fonction $f(x,y)$ vérifie les conditions de Carathéodory. Dans tous ces cas on démontre que l'inégalité (3) (remplie partout s'il s'agit des notes [1], [10], [11], ou presque partout avec quelques hypothèses supplémentaires sur la fonction $\varphi(x)$ s'il s'agit des notes [2], [5] et [9]) a pour conséquence l'inégalité

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant h) \tag{4}$$

pourvu que $\varphi(0) \leqslant 0$.

On démontre même davantage: notamment on a non seulement l'inégalité (4), mais aussi pour tout $\xi \in \langle 0, h\rangle$:

$$\varphi(x) \leqslant \psi\big(x;\xi,\varphi(\xi)\big) \qquad (\xi \leqslant x \leqslant h) \tag{5}$$

où $\psi\big(x;\xi,\varphi(\xi)\big)$ désigne l'intégrale supérieure à droite de l'équation (2), égale à $\varphi(\xi)$ au point ξ. Nous pouvons donc dire que la fonction $\varphi(x)$ est non croissante par rapport aux courbes intégrales de l'équation (2). Pour abréger, nous dirons dans toute la suite qu'une telle fonction jouit de la propriété (K).

Comme nous l'avons déjà dit, dans le cas où $f(x,y)$ est une fonction continue, toute fonction continue $\varphi(x)$ satisfaisant partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ à l'inégalité différentielle (3) jouit de la propriété (K). Il n'en est pas de même si l'on suppose seulement que l'inégalité (3) est satisfaite presque partout dans l'intervalle envisagé. Dans ce cas la continuité de la fonction $\varphi(x)$ n'est pas suffisante pour assurer la propriété (K), comme le montre l'exemple bien connu de la fonction de Lebesgue dont la dérivée est presque partout égale à zéro et qui est pourtant une fonction croissante.

Dans la présente note nous nous proposons de résoudre, toujours dans l'hypothèse que le second membre de l'équation (2) satisfait aux conditions de Carathéodory et que l'inégalité (3) est satisfaite presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, le problème suivant:

Quelle sont les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une fonction continue $\varphi(x)$ pour que l'on puisse démontrer que l'inégalité (3) *entraîne la propriété* (K), *quelle que soit l'équation* (2)?

3. La recherche des conditions nécessaires est bien simple puisque l'on peut les obtenir en partant de l'inégalité (3) dans un cas particulier — notamment dans l'hypothèse que la fonction $f(x,y)$ ne dépend que de la variable x.

Soit donc $\alpha(x)$ une fonction absolument continue dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Supposons que l'on ait presque partout dans cet intervalle

$$\underline{D}_+\varphi(x) \leqslant \alpha'(x) \tag{6}$$

et que la fonction $\varphi(x)$ jouisse de la propriété (K) par rapport aux intégrales de l'équation différentielle

$$y' = \alpha'(x).$$

Cela veut dire que la différence $\alpha(x)-\varphi(x)$ est une fonction non décroissante dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Elle est donc à variation bornée dans le même intervalle. Il en vient que la fonction $\varphi(x)$ est, elle aussi, à variation bornée. D'après le théorème bien connu de Lebesgue, $\varphi(x)$ est la somme d'une fonction absolument continue $\varphi_1(x)$ et d'une fonction singulière $\sigma(x)$ dont la dérivée est presque partout égale à zéro. Or, la différence $\alpha(x)-\varphi(x)$ étant non décroissante, cette fonction singulière $\sigma(x)$ doit être non croissante, ce qui résulte immédiatement du lemme suivant:

LEMME. *Soit $\lambda(x)$ une fonction absolument continue et $\sigma(x)$ une fonction singulière continue dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Si la différence $\lambda(x)-\sigma(x)$ est non décroissante dans cet intervalle, la fonction $\sigma(x)$ est non croissante.*

En effet, sans restreindre la généralité on peut admettre que la fonction $\lambda(x)$ est croissante au sens strict et que l'on a presque partout $\lambda'(x) \geqslant 1$ (si la fonction $\lambda(x)$ ne satisfait pas à cette hypothèse, on peut évidemment la remplacer par l'intégrale de la fonction $|\lambda'(x)|+1$). On a par hypothèse, pour tout couple de nombres x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle 0, h\rangle$):

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1) \leqslant \lambda(x_2)-\lambda(x_1). \tag{7}$$

La fonction $x = \mu(\xi)$, inverse de la fonction $\xi = \lambda(x)$, est absolument continue dans l'intervalle $\Delta = \langle \lambda(0), \lambda(h)\rangle$. En posant $\bar\sigma(\xi) = \sigma\big(\mu(\xi)\big)$ on obtient une fonction singulière pour laquelle on a, en vertu de l'inégalité (7):

$$\bar\sigma(\xi_2)-\bar\sigma(\xi_1) \leqslant \xi_2-\xi_1 \qquad (\xi_1, \xi_2 \in \Delta,\ \xi_1 < \xi_2). \tag{8}$$

De l'inégalité (8) il vient que pour tout $\xi \in \Delta$ on a

$$\overline{D}_+\bar\sigma(\xi) \leqslant 1.$$

Le nombre dérivé supérieur à droite de la fonction $\bar\sigma(\xi)$ est donc borné, d'où il vient que cette fonction singulière doit être non croissante (cf. [6], p. 235).

Le lemme se trouve ainsi démontré.

4. Remarquons que si la fonction $\varphi(x)$ satisfait pour une fonction $f(x,y)$ à l'inégalité (3), elle vérifie aussi, pour $a'(x) = M(x)$, l'inégalité (6). Bien plus, si la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété (K) par rapport aux intégrales de l'équation (2), elle en jouit à plus forte raison par rapport aux intégrales de l'équation $y' = M(x)$. En effet, en vertu de l'inégalité (1), pour toute intégrale $y(x)$ de l'équation (2) et tout $\xi \epsilon \langle 0, h\rangle$ on a

$$y(x) = y(\xi) + \int_\xi^x f\big(s, y(s)\big)\,ds \leqslant y(\xi) + \int_\xi^x M(s)\,ds \qquad (\xi \leqslant x \leqslant h).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si pour une fonction $f(x,y)$ satisfaisant aux conditions de Carathéodory de l'inégalité* (3) *il résulte que la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété* (K) *par rapport aux intégrales de l'équation* (2), *la fonction $\varphi(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et sa partie singulière est non croissante.*

5. Il est immédiat que pour toute fonction continue $\varphi(x)$ à variation bornée et à partie singulière non croissante de l'inégalité (6) (où $a(x)$ est une fonction absolument continue) il résulte que la différence $a(x) - \varphi(x)$ est non décroissante et, par suite, $\varphi(x)$ jouit de la propriété (K) par rapport aux intégrales de l'équation $y' = a'(x)$. Donc, pour les équations (2) dont le second membre ne dépend que de x, la condition donnée par le théorème 1 est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante. Nous allons montrer au n° suivant qu'il en est de même aussi pour l'équation générale (2).

6. THÉORÈME 2. *Si la fonction continue $\varphi(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et à partie singulière non croissante satisfait presque partout dans cet intervalle à l'inégalité différentielle* (3), *elle jouit de la propriété* (K) *par rapport aux intégrales de l'équation différentielle* (2).

Démonstration. F. Cafiero ([2], cf. aussi [3]) a donné la démonstration de ce théorème dans l'hypothèse que la fonction $\varphi(x)$ est absolument continue. Pour en obtenir une démonstration du théorème 2 il suffit d'y introduire quelques légères modifications.

Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que $\varphi(0) \leqslant 0$. Il suffit de démontrer l'inégalité (4) puisque la démonstration de l'inégalité (5) est tout à fait analogue.

Introduisons une fonction auxiliaire

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pour} \quad y \geqslant \varphi(x), \\ f\big(x, \varphi(x)\big) & \text{pour} \quad y < \varphi(x), \end{cases}$$

qui vérifie évidemment dans l'ensemble B: $0 \leqslant x \leqslant h$, $-\infty < y < +\infty$ les conditions de Carathéodory. Désignons par $\overline{\varphi}(x)$ l'intégrale supérieure à droite de l'équation différentielle

$$y' = F(x,y),$$

issue du point (0,0). Il suffit de démontrer que dans tout l'intervalle $\langle 0, h\rangle$:

$$(9) \qquad \varphi(x) \leqslant \overline{\varphi}(x)$$

puisqu'il en résulte immédiatement que $\psi(x) = \overline{\varphi}(x)$ et, par conséquent, l'inégalité (9) est équivalente à (4).

Pour la démonstration par l'absurde supposons que l'inégalité (9) ne soit pas vraie. Il existe donc un intervalle $\langle \xi, \eta\rangle \subset \langle 0, h\rangle$ tel que

$$(10) \qquad \varphi(x) > \overline{\varphi}(x) \quad \text{pour} \quad x \epsilon (\xi, \eta\rangle \quad \text{et} \quad \varphi(\xi) = \overline{\varphi}(\xi).$$

D'autre part $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \sigma(x)$, où $\varphi_1(x)$ est une fonction absolument continue et $\sigma(x)$ ($\sigma(\xi) = 0$) une fonction singulière non croissante. On a donc

$$\varphi(\eta) - \overline{\varphi}(\eta) = \sigma(\eta) + \varphi_1(\eta) - \overline{\varphi}(\eta)$$
$$\leqslant \int_\xi^\eta \Big(\varphi_1'(x) - F\big(x, \overline{\varphi}(x)\big)\Big)\,dx = \int_\xi^\eta \Big(\varphi'(x) - f\big(x, \varphi(x)\big)\Big)\,dx \leqslant 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (10).

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

7. Une fonction continue $\varphi(x)$ satisfaisant presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ à l'inégalité différentielle (3) vérifie à plus forte raison l'inégalité

$$(11) \qquad \underline{D}_+\varphi(x) \leqslant M(x).$$

Si l'on savait que la différence

$$\delta(x) = \int_0^x M(s)\,ds - \varphi(x)$$

est une fonction non décroissante, on pourrait en conclure (cf. n° 3) que $\varphi(x)$ est une fonction à variation bornée et à partie singulière non croissante. Donc, afin de pouvoir appliquer à l'inégalité (3) le théorème 2, il suffit de savoir que l'inégalité (11) entraîne la non-décroissance de la fonction $\delta(x)$. Autrement dit, chaque condition imposée à la fonction $\varphi(x)$ qui nous permettra de démontrer que l'inégalité (11) entraîne la non-décroissance de la fonction $\delta(x)$, constituera une condition suffisante pour l'applicabilité du théorème 2.

Voici quelques conditions de ce genre:

(I) $\varphi(x)$ est absolument continue;

(II) $\varphi(x)$ est absolument continue, généralisée, c'est-à-dire l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ est une somme au plus dénombrable d'ensembles sur chacun desquels la fonction $\varphi(x)$ est absolument continue;

(III) l'ensemble des points en lesquels $\overline{D}_+\varphi(x) = +\infty$ est au plus dénombrable;

(IV) $\varphi(x)$ est à variation nulle (cf. [7], p. 225) c'est-à-dire pour tout ensemble $E \subset \langle 0, h\rangle$ de mesure nulle et tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles disjoints (a_n, b_n) tels que

$$E \subset \sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n - a_n| < \varepsilon, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(M_n - m_n) < \varepsilon$$

où M_n et m_n désignent respectivement les valeurs maxima et minima de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $\langle a_n, b_n\rangle$.

En effet, si $\varphi(x)$ est absolument continue ou absolument continue, généralisée, la différence $\delta(x)$ jouit de la même propriété. Mais l'inégalité (11) signifie que l'on a presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$: $\overline{D}_+\delta(x) \geqslant 0$, d'où il vient que $\delta(x)$ est non décroissante (cf. p. ex. [12]).

Si la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition (III), on a presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$: $\overline{D}_+\delta(x) \geqslant 0$ et l'égalité $\underline{D}_+\delta(x) = -\infty$ n'est possible que dans un ensemble au plus dénombrable. Par conséquent, $\delta(x)$ est une fonction non décroissante (cf. p. ex. [6], p. 235).

Enfin, si $\varphi(x)$ est à variation nulle, la différence $\delta(x)$ l'est aussi. Mais toute fonction à variation nulle vérifie la condition (N) de Lusin. De l'inégalité (11) il vient donc que la fonction $\delta(x)$ est non décroissante (cf. [12], p. 118).

8. D'après ce que nous avons démontré au n° précédent on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si la fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions de Carathéodory et si $\varphi(x)$ est une fonction continue satisfaisant à l'une des conditions* (I)-(IV) *et vérifiant presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ l'inégalité différentielle* (3), *la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété* (K) *par rapport aux intégrales de l'équation différentielle* (2).

9. Nous nous sommes bornés à n'envisager qu'une seule inégalité différentielle (3), mais il est facile de voir que tous nos raisonnements s'appliquent aussi, à de simples changements près, aux systèmes d'inégalités différentielles

$$\underline{D}_+\varphi_i(x) \leqslant f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Il faut seulement admettre (cf. [9] et [11]) que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ satisfont aux conditions qui assurent l'existence des intégrales supérieures à droite du système d'équations différentielles

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

10. Au lieu de l'inégalité différentielle (3) on peut évidemment considérer d'autres inégalités du même type en remplaçant soit le nombre dérivé inférieur à droite de la fonction $\varphi(x)$ par un nombre dérivé quelconque, soit en changeant le signe d'inégalité $\leqslant$ en $\geqslant$. Tous ces cas se ramènent aisément à l'inégalité (3) (voir à ce sujet [11]) par un simple changement des variables x et y.

Ainsi par exemple, pour l'inégalité

$$\underline{D}_-\varphi(x) \leqslant f(x, \varphi(x))$$

les théorèmes 1 et 2 restent valables et pour l'inégalité

$$\overline{D}_+\varphi(x) \geqslant f(x, \varphi(x)) \tag{12}$$

on a des théorèmes tout à fait analogues:

Si pour une fonction $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions de Carathéodory de l'inégalité différentielle (12), *supposée satisfaite presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, il vient que la fonction continue $\varphi(x)$ est non décroissante par rapport aux intégrales inférieures à droite de l'équation* (2), *la fonction $\varphi(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et sa partie singulière est non décroissante. Inversement: si une fonction continue $\varphi(x)$, à variation bornée et à partie singulière non décroissante, satisfait presque partout dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ à l'inégalité différentielle* (12), *elle est non décroissante par rapport aux intégrales (inférieures à droite) de l'équation différentielle* (2).

Travaux cités

[1] E. Baiada, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali*, Atti Acc. Naz. Lincei (8) 3 (1947), p. 258-271.

[2] F. Cafiero, *Su un problema ai limiti relativo all'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$*, Giorn. Mat. Battaglini, s. 4, vol. 77 (1947), p. 145-163.

[3] — *Sui teoremi di unicita relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, Giorn. Mat. Battaglini, s. 4, vol. 78 (1948), p. 10-41.

[4] C. Carathéodory, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, Leipzig und Berlin 1927.

[5] L. Giuliano, *Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano*, Atti Acc. Naz. Lincei (8) 1 (1946), p. 1264-1271.

[6] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Kraków 1957.

[7] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, Москва-Ленинград 1951.

[8] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Bologna 1949.

[9] J. Szarski, *Sur un système d'inégalités différentielles*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), p. 126-134.

[10] С. А. Чаплыгин, *Избранные труды по механике и математике*, Москва 1954.

[11] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-166.

[12] — *Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit monotone*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951), p. 111-119.

Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VII (1960)

On the uniqueness of the non-negative solution of the homogeneous mixed problem for a system of partial differential equations

by A. Pliś (Kraków)

In this paper we shall deal with the following system of partial differential equations of the second order:

$$(1)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,q=1}^{n} r_{ijkq}(Z)\frac{\partial^2 u_j}{\partial y_k\partial y_q}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}(Z)\frac{\partial u_j}{\partial y_k}+\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(Z)u_j$$
$$(i=1,\ldots,m;\ Z=(x,Y)=(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)),$$

with vanishing initial and boundary data. It will be proved that $u_i\equiv 0$ $(i=1,\ldots,m)$ is the unique non-negative solution of that problem. The Cauchy problem for the partial differential equations of the first order $(r_{ijkq}\equiv 0)$ was treated also in [1]. For $m=1$, $r_{11kq}=\delta_k^q$, $a_{11k}\equiv 0$, $b_{11}\equiv 0$ system (1) reduces to the heat equation. In that particular case the restriction to the non-negative solutions is unnecessary. For the general case, however, it is essential as may be shown by a modification of the example given in [2].

THEOREM T. *Let us assume that the coefficients r_{ijkq}, a_{ijk}, b_{ij} together with the derivatives $\partial r_{ijkq}/\partial y_k$, $\partial^2 r_{ijkq}/\partial y_k\partial y_q$, $\partial a_{ijk}/\partial y_k$ $(i,j=1,\ldots,m;$ $k,q=1,\ldots,n)$ are continuous*[1] *with respect to Y in the prism $R\,\{0<x<1,\ |y_k|\leqslant 1\ (k=1,\ldots,n)\}$ and the following inequalities are satisfied:*

$$(2)\qquad r_{ijkq}\geqslant 0\qquad (i,j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$$

on the lateral boundary S of R ($S=R-$interior of R), and for certain constant K $(K>0)$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 r_{ijkq}}{\partial y_k\partial y_q}\leqslant K,\qquad b_{ij}\leqslant K,\qquad \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y_k}\geqslant -K$$

for $Z\in R$, $i,j=1,\ldots,m$; $k,q=1,\ldots,n$.

(1) This condition has been introduced for conciseness; it may be replaced by a weaker one.