En posant $g = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ nous avons $(10, g) = 1, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, \ldots$ et $\overline{10}_g = 1, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, \ldots$ Donc $(10, g) = \overline{10}_g$, d'où résulte l'égalité: $\varrho_k = 10/(10, g)$ pour $k > \mu$. Pourtant, pour $m = 12 = 2^2 \cdot 3$, un raisonnement analogue donne:

$$\begin{aligned} g &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots \\ (12, g) &= 1, 2, 3, 4, 1, 6, 1, 4, 3, 2, 1, 12, 1, 2, \ldots \\ \overline{12}_g &= 1, 4, 3, 4, 1, 12, 1, 4, 3, 4, 1, 12, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

On a donc généralement: $(12, g) \neq \overline{12}_g$.

Travaux cités

[1] F. Jakóbczyk, *Les applications de la fonction $\lambda_g(n)$ à l'étude des fractions périodiques et de la congruence chinoise* $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, Ann. U. M. C. S., Lublin — Polonia, vol. V, 6 (1951), p. 97-138.

[2] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Warszawa 1950.

[3] — *Sur les puissances du nombre* 2, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 252-258.

[4] K. Tatarkiewicz, *Sur les puissances des entiers*, Ann. U. M. C. S., Lublin — Polonia, vol. VIII, 1 (1954), p. 5-23.

[5] R. Hampel, *Wyznaczanie najkrótszego okresu liczb* 3^n, 5^n, 11^n oraz $(2^l)^n$ mod 10^k, Zeszyty Nauk. Polit. Warszaw., Elektryka, 1 (1953), p. 95-102.

Reçu par la Rédaction le 16. 4. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Quelques propriétés des potentiels généralisés relatifs à l'équation parabolique définie sur une variété riemannienne

par H. Marcinkowska (Warszawa)

Introduction. F. Dressel [2] a étudié la solution fondamentale de l'équation générale du type parabolique

$$a^{ik}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + b^i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x^i} + c(t, x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{0.1}$$

où les coefficients a^{ik}, b^i, c sont des fonctions suffisamment régulières, définies pour les valeurs de t réelles appartenant à un intervalle borné et pour x appartenant à un domaine de l'espace euclidien à n dimensions. Dans le cas particulier de l'équation de la propagation de la chaleur cette solution fondamentale admet la forme bien connue [6]

$$(2\sqrt{\pi})^{-n}(x-y)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}{4(t-s)}\right) \quad (t_0 < s < t < t_1;\ x, y \in E^n).$$

W. Pogorzelski [7] a obtenu la solution fondamentale de l'équation (0.1) en faisant sur les coefficients des hypothèses plus générales. S. Itô [5] a donné une autre généralisation en construisant la solution fondamentale dans le cas d'une équation définie sur une variété différentiable.

À l'aide de la solution fondamentale on peut définir les potentiels généralisés de volume et de double couche relatifs à l'équation (0.1). L. Slobodeckij [10] a étudié ces potentiels dans le cas de l'équation parabolique considérée dans un domaine de l'espace euclidien sous des hypothèses un peu plus faibles que celles de Dressel. Le potentiel de simple couche dans l'espace euclidien a été étudié par W. Pogorzelski [8] sous des hypothèses très faibles.

Dans cet article nous étudions quelques propriétés du potentiel de volume et de double couche relatif à l'équation parabolique définie sur une variété riemannienne. Pour affaiblir la singularité des intégrales qui font apparition après la dérivation, on utilise la condition de Hölder et une substitution sous le signe d'intégration suivant le procédé appliqué par S. Itô [5] dans le cas le plus simple.

L'auteur tient à remercier MM. W. Pogorzelski, M. Krzyżański et K. Maurin de leurs précieuses remarques et de leur aide pendant la rédaction de ce travail.

§ 1. Définitions et notations. Nous appelons variété à n dimensions un espace topologique connexe V_n qui admet une couverture dénombrable $\{U_\nu\}$, chacun des ensembles U_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ étant ouvert et homéomorphe à un domaine borné de l'espace euclidien E^n. Alors nous avons

$$h^\nu(U_\nu) \subset E^n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

où h^ν est un homéomorphisme. Dans la suite nous poserons

$$\left.\begin{aligned} {}_\nu x &= h^\nu(x) \\ {}_\nu x &= ({}_\nu x^1, \ldots, {}_\nu x^n). \end{aligned}\right. \qquad (x \in V_n;\ {}_\nu x \in E^n;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

Supposons que le point x appartienne à la partie commune des deux ensembles U_ν et U_μ $(\nu \neq \mu)$. Les relations suivantes définissent un „changement du système de coordonnées":

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\nu^\mu({}_\nu x) &= h^\mu(h^\nu)^{-1}({}_\nu x) \\ {}^i\varphi_\nu^\mu({}_\nu x) &= {}_\mu x^i. \end{aligned}\right. \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$$

Supposons définie sur la variété V_n une fonction tensorielle $b(x) = b_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}(x)$ covariante d'ordre q et contravariante d'ordre p. Elle définit dans chaque domaine $h^\nu(U_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ n^{p+q} fonctions d'un point de l'espace euclidien de dimension n; nous les désignerons par ${}_\nu b_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ $(1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leqslant n)$, où

$${}_\nu b_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}({}_\nu x) = b_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}(x) \qquad (x \in U_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots).$$

Soit Ω_n un domaine et Σ_{n-1} une surface à $n-1$ dimensions dans la variété riemannienne M_n, les fermetures de Ω_n et de Σ_{n-1} étant compactes. On peut définir (voir [4]) l'intégrale sur Ω_n (ou Σ_{n-1}) de telle manière qu'elle soit identique à l'intégrale ordinaire de volume (ou de surface), la fonction sous le signe d'intégration étant donnée en coordonnées locales. Soit $b(x)$ une fonction vectorielle de classe C^1 et $\partial\Omega_n$ une surface de classe C^1. On sait (voir [4]) que l'on a, en vertu du théorème de Gauss généralisé,

$$\int_{\Omega_n} D_i b^i(x)\, d_g x = \int_{\partial\Omega_n} b_N(x)\, d_g\sigma,$$

où

$$b_N^\nu({}_\nu x) = \sum_{i=1}^n {}_\nu b^i({}_\nu x)\sqrt{{}_\nu g({}_\nu x)}\cos\big(x^i, N_\nu(x)\big) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et $N_\nu(x)$ désigne la normale extérieure à la surface $h^\nu(\partial\Omega_n \cap U_\nu)$.

Dans la suite nous nous occuperons d'opérateurs différentiels du second ordre dont les coefficients dépendent du point x et du paramètre t parcourant un intervalle (t_0, t_1). Ces opérateurs sont de la forme

$$\begin{aligned} Aw &= a^{ik}(t, x)D_{ik}^2 w + b^i(t, x)D_i w + c(t, x)w, \\ A^+w &= D_{ik}^2\big(a^{ik}(t, x)w\big) - D_i\big(b^i(t, x)w\big) + c(t, x)w, \\ Lw &= Aw - \frac{\partial w}{\partial t}, \\ L^+w &= A^+w + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\big(w \in C^2\big(M_n \times (t_0, t_1)\big);\ x \in M_n;\ t_0 < t < t_1\big)$$

où les coefficients a^{ik} (resp. b^i, c) forment un tenseur contravariant d'ordre 2 (resp. 1, 0), D_{ik}^2 et D_i étant les dérivées covariantes. À cause des notations que nous introduirons plus loin on suppose $t_0 < 0$ et $t_1 > 0$.

Soit $\{\chi_\nu\}$ une partition de l'unité. En admettant qu'il existe une matrice $\|a_{ik}(t, x)\|$ inverse de la matrice $\|a^{ik}(t, x)\|$ on pose par définition:

$$g(x) = \det\|g_{ik}(x)\|,$$

$${}_\nu\psi_\nu({}_\nu x) = \left(\frac{\chi_\nu({}_\nu x)}{\sqrt{g({}_\nu x)}}\right)^{1/2}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

$${}_\nu v(t, {}_\nu x) = \int_{E^n} \exp\big(-{}_\nu a_{ik}(t, {}_\nu x)\,\xi^i\xi^k\big)d\xi,$$

$${}_\nu z_\nu(t, {}_\nu x; s, {}_\nu y) = \frac{{}_\nu\psi_\nu({}_\nu x)\,{}_\nu\psi_\nu({}_\nu y)}{{}_\nu v(s, {}_\nu y)}(t-s)^{-n/2}\exp\left(-\frac{{}_\nu a_{ik}(t, {}_\nu x)({}_\nu x^i - {}_\nu y^i)({}_\nu x^k - {}_\nu y^k)}{4(t-s)}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$z(t, x; s, y) = \sum_{\nu=1}^\infty z_\nu(t, x; s, y),$$

$$f_1(t, x; s, y) = L_{t,x}z(t, x; s, y),$$

$$f_j(t, x; s, y) = \int_s^t \int_{M_n} f_1(t, x; \tau, \xi)f_{j-1}(\tau, \xi; s, y)\,d_g\xi\,d\tau \qquad (j = 2, 3, \ldots),$$

$$f(t,x;s,y)=\sum_{j=1}^{\infty}f_j(t,x;s,y),$$

$$u_1(t,x;s,y)=\int_s^t\int_{M_n}z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi\,d\tau,$$

$$u(t,x;s,y)=z(t,x;s,y)+u_1(t,x;s,y)$$

$$(x,y\in M_n;\ t_0<s<t<t_1),$$

où L_{tx} désigne l'opérateur L agissant par rapport aux variables t,x. L'égalité

$$f_j(t,x;s,y)=\int_s^t\int_{M_n}f_{j-1}(t,x;\tau,\xi)f_1(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi\,d\tau$$

pour $j=2,3,\ldots$ est une conséquence du théorème de Fubini.

En désignant par D_{yk} la dérivée covariante par rapport à y nous définirons une fonction vectorielle

$$a^i(t,x;s,y)=D_{yk}\big(a^{ik}(s,y)u(t,x;s,y)\big)-b^i(s,y)u(t,x;s,y)$$

$$(t_0<s<t<t_1;\ x,y\in M_n;\ i=1,\ldots,n).$$

Soient $\varrho(t,x)$ et $\mu(t,x)$ deux fonctions continues définies pour $t_0<t<t_1$, $x\in M_n$ et soit Ω_n un domaine connexe sur la variété M_n. L'intégrale

$$\mathfrak{M}(t,x)=\int_0^t\int_{\Omega_n}u(t,x;s,y)\varrho(s,y)\,d_gy\,ds$$

sera appelée potentiel généralisé de volume. L'intégrale

$$\mathfrak{W}(t,x)=\int_0^t\int_{\partial\Omega_n}a_N(t,x;s,y)\mu(s,y)\,d_gy\,ds$$

sera dite potentiel généralisé de double couche.

Nous introduirons encore une notion. Deux points distincts de la variété M_n seront dits r-distants s'ils ont la propriété suivante: l'existence d'un nombre naturel vérifiant les conditions $x\in U_\nu$ et $y\in U_\nu$ entraîne pour un certain i $(1\leqslant i\leqslant n)$ l'inégalité $|{}_\nu x^i-{}_\nu y^i|\geqslant r$.

§ 2. Hypothèses. Soit M_n une variété riemannienne de dimension n et de classe C^3. Nous supposons qu'elle admet une couverture finie $\{U_\nu\}$ $(\nu=1,\ldots,p)$ et que les homéomorphismes h^ν vérifient les conditions suivantes:

1° les fonctions ${}^i\varphi^\mu_\nu({}_\nu x)$ sont continues dans la fermeture du domaine $h^\nu(U_\nu\cap U_\mu)$ $(\nu,\mu=1,\ldots,p;\ i=1,\ldots,n)$,

2° les dérivées $\dfrac{\partial\,{}^i\varphi^\mu_\nu({}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^k}$ $(\nu,\mu=1,\ldots,p;\ i,k=1,\ldots,n)$ sont bornées pour ${}_\nu x\in h^\nu(U_\nu\cap U_\mu)$.

Quant aux coefficients de l'opérateur A nous faisons les hypothèses suivantes:

1° pour $\nu=1,\ldots,p$ les fonctions

$$\frac{\partial\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^j\,\partial\,{}_\nu x^l},\quad {}_\nu b^i(t,{}_\nu x)\qquad (i,k,j,l=1,\ldots,n)$$

vérifient la condition de Hölder en tout point $(t,{}_\nu x)$ pour $t_0<t<t_1$ et ${}_\nu x\in h^\nu(U_\nu)$,

2° pour $\nu=1,\ldots,p$ les fonctions

$${}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x),\quad \frac{\partial\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial t},\quad \frac{\partial\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^j},\quad \frac{\partial^2\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^j\,\partial\,{}_\nu x^l},$$

$$\frac{\partial^3\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^j\,\partial\,{}_\nu x^l\,\partial\,{}_\nu x^m},\quad \frac{\partial^2\,{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)}{\partial t\,\partial\,{}_\nu x^j},\quad (\det\|{}_\nu a^{ik}(t,{}_\nu x)\|)^{-1},$$

$${}_\nu b^i(t,{}_\nu x),\quad \frac{\partial\,{}_\nu b^i(t,{}_\nu x)}{\partial\,{}_\nu x^k},\quad {}_\nu c(t,{}_\nu x)\qquad (i,k,j,l=1,\ldots,n)$$

sont continues et bornées pour $t_0<t<t_1$ et ${}_\nu x\in h^\nu(U_\nu)$.

La dernière condition entraîne l'existence de deux constantes a_1, a_2 qui vérifient pour $\nu=1,\ldots,p$ et pour tous les points $\xi\in E^n$ et ${}_\nu x\in h^\nu(U_\nu)$ l'inégalité

$$a_1|\xi|^2\leqslant {}_\nu a_{ik}(t,{}_\nu x)\xi^i\xi^k\leqslant a_2|\xi|^2,$$

où

$$|\xi|^2=\sum_{i=1}^n(\xi^i)^2.$$

Alors les opérateurs L et L^+ sont du type parabolique.

Nous supposons enfin que le domaine Ω_n situé sur la variété M_n a une fermeture compacte et que sa frontière est une surface de classe C^3.

Sous les hypothèses citées on a les théorèmes suivants dûs à Itô [5]:

THÉORÈME A. *Soit $\varrho(t,x)$ une fonction définie dans l'ensemble $(t_0,t_1)\times\times\Omega_n$, continue et vérifiant en tout point du domaine $(t_0,t_1)\times\Omega_n$ la condition de Hölder par rapport aux deux variables. Pour $t_0<t<t_1$ et $x\in\Omega_n$ on a l'égalité*

$$L\int_0^t\int_{\Omega_n}z(t,x;s,y)\varrho(s,y)\,d_gy\,ds=-\varrho(t,x)+\int_0^t\int_{\Omega_n}f_1(t,x;s,y)\varrho(s,y)\,d_gy\,ds.$$

THÉORÈME B. *Pour $t_0 < s < t < t_1$ et $x, y \in M_n$ la fonction u_1 admet des dérivées continues du premier ordre par rapport à t et des dérivées continues du premier et du second ordre par rapport à x. On évalue les dérivées par rapport à x en dérivant sous le signe d'intégration. Les dérivées par rapport à t vérifient l'égalité*

$$(2.1)\quad \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x; s, y) = f(t, x; s, y) + \int_s^t \int_{M_n} \frac{\partial}{\partial t} z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi; s, y) d_g \xi d\tau.$$

THÉORÈME C. *Pour $t_0 < s < t < t_1$ et $x, y \in M_n$ la fonction u vérifie par rapport au premier couple d'arguments l'équation*

$$(2.2)\quad Lw = 0,$$

par rapport au second couple d'arguments l'équation

$$(2.3)\quad L^+ w = 0.$$

La fonction u est dite solution fondamentale de l'équation (2.2).

§ 3. Enoncé des théorèmes. On a, sous les hypothèses du paragraphe précédent, les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *La solution fondamentale de l'équation* (2.2) *admet pour $t_0 < s < t < t_1$ et $x, y \in M_n$ des dérivées continues $D_{x^k} u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} D_{x^l} u(t, x; s, y)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x; s, y)$, $D_{y^k} u(t, x; s, y)$, $D_{k^l} D_{y^k} u(t, x; s, y)$, $\frac{\partial}{\partial t} D_{y^k} u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} D_{x^l} D_{y^m} u(t, x; s, y)$ $(k, l, m = 1, \ldots, n)$. Dans les dérivées ci-dessus on peut interverfir l'ordre des intégrations.*

THÉORÈME 2. *Soient x_0 et y_0 deux points distincts de la variété M_n et soit s_0 un nombre quelconque de l'intervalle (t_0, t_1). Les fonctions $u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} D_{x^l} u(t, x; s, y)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x; s, y)$, $D_{y^k} u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} D_{x^l} u(t, x; s, y)$, $D_{x^k} D_{x^l} D_{y^m} u(t, x; s, y)$, $\frac{\partial}{\partial t} D_{y^k} u(t, x; s, y)$ $(k, l, m = 1, \ldots, n)$ ont la limite zéro au point $(s_0, x_0; s_0, y_0)$.*

THÉORÈME 3. *Soit $\mu(s, y)$ une fonction continue définie dans l'ensemble $(t_0, t_1) \times \partial\Omega_n$. Le potentiel de double couche a les propriétés suivantes:*

1° *Pour $t > 0$, $x_0 \in \partial\Omega_n$, $x \notin \partial\Omega_n$ on a*

$$(3.1)\quad \lim_{x \to x_0} \mathfrak{W}(t, x) = \mathfrak{W}(t, x_0) + \eta\mu(t, x_0),$$

où

$$\eta = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & \text{pour} \quad x \in \Omega_n, \\ -\tfrac{1}{2} & \text{pour} \quad x \in M_n - \bar{\Omega}_n. \end{cases}$$

2° *Pour $x \in M_n$ on a*

$$(3.2)\quad \lim_{t \to 0} \mathfrak{W}(t, x) = 0.$$

La convergence ci-dessus est quasi-uniforme dans le domaine $M_n - \partial\Omega_n$.

3° *La fonction $\mathfrak{W}$ admet dans le domaine $(0, t_1) \times (M_n - \partial\Omega_n)$ des dérivées continues du premier ordre par rapport à t, du premier et du second ordre par rapport à x. Elle est la solution de l'équation* (2.2) *dans ce domaine.*

THÉORÈME 4. *Soit $\varrho(t, x)$ une fonction définie dans l'ensemble $(t_0, t_1) \times M_n$, bornée et vérifiant la condition de Hölder par rapport aux deux variables. Le potentiel de volume a les propriétés suivantes:*

1° *il vérifie l'équation de Poisson généralisée dans le domaine $(0, t_1) \times \Omega_n$*

$$(3.3)\quad Lw = -\varrho;$$

2° *il vérifie la condition initiale*

$$(3.4)\quad \lim_{t \to 0} \mathfrak{M}(t, x) = 0;$$

3° *il admet dans le domaine considéré des dérivées continues du premier ordre par rapport à t, du premier et du second ordre par rapport à x.*

Les démonstrations des théorèmes 1-4 seront données au § 6.

§ 4. Nous considérons d'abord les fonctions Ψ_j et $D_{y^i} \Psi_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ définies par les formules

$$\Psi_j(t, x; s, y; \tau) = \int_{M_n} f_j(t, x; \tau, \xi) f_1(\tau, \xi; s, y) d_g \xi \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Il est facile de montrer, en se basant sur les résultats de S. Itô [5], qu'elles sont continues pour $t_0 < s < \tau < t < t_1$ et $x, y \in M_n$. Nous écrivons la fonction Ψ_j sous la forme

$$(4.1)\quad \Psi_j(t, x; s, y; \tau) = \sum_{\nu=1}^{p} \int_{M_n} \big(f_j(t, x; \tau, \xi) - f_j(t, x; s, y_0)\big) L_{\tau\xi} z_\nu(\tau, \xi; s, y) d_g \xi + \sum_{\nu=1}^{p} f_j(t, x; s, y_0) \int_{M_n} L_{\tau\xi} z_\nu(\tau, \xi; s, y) d_g \xi,$$

y_0 étant un point fixé de la variété M_n, et nous dérivons l'égalité obtenue par rapport à y au point y_0. Dans la première somme on peut effectuer la dérivation sous le signe d'intégration en vertu de la continuité des fonctions qui y interviennent. On montre, par un procédé semblable à celui qu'a utilisé Dressel [2], que les fonctions f_j vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(4.2)\quad |{}_\nu f_j(t,x;\tau,{}_\nu\xi)-{}_\nu f_j(t,x;s,{}_\nu y)| \leqslant \begin{cases} R^j(t-s)^{(j-n-3)/2}|\tau-s|^{1/4}+\sum_{i=1}^{n}|{}_\nu\xi^i-{}_\nu y^i|^{1/4} & (j=1,2) \\ R^j(t-s)^{(j-n-3)/2}\prod_{a=1}^{j-2}B\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)\left(|\tau-s|^{1/4}+\sum_{i=1}^{n}|{}_\nu\xi^i-{}_\nu y^i|^{1/4}\right)^{(1)} & (j=3,4,\ldots) \\ & (\nu=1,\ldots,p) \end{cases}$$

R étant une constante positive. Dans la deuxième somme du second membre de (4.1) la dérivation ne peut pas être intervertie avec l'intégration, mais on peut vérifier l'inégalité

$$(4.3)\quad \left|D_{y^i}\int_{M_n}L_{tx}z_\nu(t,x;s,y)\,d_gx\right|\leqslant P(t-s)^{-1/2}$$
$$(\nu=1,\ldots,p;\ i=1,\ldots,n)$$

où P est une constante positive. La démonstration de (4.3) se fonde sur la transformation

$$_\nu x^k={}_\nu y^k+(t-s)^{1/2}\zeta^k\qquad(k=1,\ldots,n)$$

qu'on applique à l'intégrale du premier membre, après quoi la dérivation peut être effectuée sous le signe d'intégration. En s'appuyant sur l'égalité (4.1) et les inégalités (4.2) et (4.3), on obtient la limitation

$$(4.4)\quad |D_{y^i}\Psi_j(t,x;s,y;\tau)| \leqslant \begin{cases} S^{j+1}\prod_{\nu=1}^{j-2}B\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)(t-s)^{(j-n-3)/2}(\tau-s)^{-7/8} & \text{pour}\quad s<\tau\leqslant s+\frac{t-s}{4}, \\ S^{j+1}\prod_{\nu=1}^{j-2}B\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)(t-s)^{(-n-2)/2}(t-\tau)^{(j-2)/2} & \text{pour}\quad s+\frac{t-s}{4}\leqslant\tau<t \\ & (j=1,2,\ldots) \end{cases}$$

(S étant une constante positive).

(1) On désigne par $B(a,b)$ la fonction d'Euler $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ (a, b étant deux nombres réels positifs). Il est facile de montrer que $\lim_{b\to\infty}B(a,b)=0$.

De ce que nous avons dit résulte:

LEMME 1. *Les fonctions f_j $(j=1,2,\ldots)$ et f admettent pour $t_0<s<t<t_1$ et $x,y\in M_n$ des dérivées covariantes du premier ordre par rapport à y. Ces dérivées sont des fonctions continues et on peut intervertir la dérivation avec l'intégration ou la sommation de la série. On a alors les égalités suivantes*

$$D_{y^i}f_j(t,x;s,y)=\int_s^t D_{y^i}\int_{M_n}f_{j-1}(t,x;\tau,\xi)f_1(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi\,d\tau,$$
$$(i=1,\ldots,n)$$

$$D_{y^i}f(t,x;s,y)=\sum_{j=1}^{\infty}D_{y^i}f_j(t,x;s,y).$$

En soumettant les variables t, s, x et y aux restrictions mentionnées ci-dessus, on a les limitations

$$|D_{y^i}f_j(t,x;s,y)|\leqslant\begin{cases} pC^{j+1}(t-s)^{(j-n-4)/2} & (j=2,3), \\ pC^{j+1}\prod_{a=1}^{j-3}B\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)(t-s)^{(j-n-4)/2} & (j=4,5,\ldots), \end{cases}$$

$$|D_{y^i}f(t,x;s,y)|\leqslant C(t-s)^{(-n-2)/2}$$

la constante C étant convenablement choisie.

Par un procédé semblable on obtient:

LEMME 2. *Les fonctions $D_{x^l}D_{y^k}f_j$ $(j=1,2,\ldots)$ et $D_{x^l}D_{y^k}f$ $(k,l=1,\ldots,n)$ sont continues pour $t_0<s<t<t_1$ et $x,y\in M_n$. Elles admettent pour les valeurs des arguments citées ci-dessus la limitation suivante:*

$$(4.5)\quad |D_{x^l}D_{y^k}f_j(t,x;s,y)| \leqslant\begin{cases} N(t-s)^{-(n+3)/2} & (j=1), \\ N^2(t-s)^{-(n+2)/2} & (j=2), \\ (2j-3)N^j\prod_{a=1}^{j-2}B\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)(t-s)^{(j-n-5)/2} & (j=3,4,\ldots) \end{cases}$$

(N est une constante positive). On a aussi l'égalité

$$(4.6)\quad D_{x^l}D_{y^k}f(t,x;s,y)=\sum_{j=1}^{\infty}D_{x^l}D_{y^k}f_j(t,x;s,y).$$

La série du second membre converge uniformément dans l'ensemble considéré.

Par la méthode appliquée ci-dessus on peut aussi établir les limitations

$$(4.7)\quad \Big|D_{y^k}\int_{M_n} p(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi\Big| \leqslant \begin{cases} S(t-s)^{-(n+3)/2}(\tau-s)^{-7/8} & \left(s<\tau\leqslant\dfrac{t+s}{2}\right),\\ S(t-s)^{-(n+3)/2}(t-\tau)^{-1/2} & \left(\dfrac{t+s}{2}\leqslant\tau<t\right)\end{cases}$$

$$(k=1,\ldots,n;\ t_0<s<\tau<t<t_1;\ x,y\in M_n)$$

où S est une constante positive et $p(t,x;s,y)$ désigne une quelconque des fonctions $z(t,x;s,y)$, $\partial z(t,x;s,y)/\partial t$, $D_{x^l}z(t,x;s,y)$, $D_{x^l}D_{x^m}z(t,x;s,y)$ $(l,m=1,\ldots,n)$. De (4.7) et du Lemme 1 résulte:

LEMME 3. *La fonction u_1 admet pour $t_0<s<t<t_1$ et $x,y\in M_n$ des dérivées continues $D_{y^k}u_1(t,x;s,y)$, $D_{y^k}D_{x^l}u_1(t,x;s,y)$, $D_{y^k}D_{k^l}D_{x^m}u_1(t,x;s,y)$, $D_{y^k}\dfrac{\partial u_1(t,x;s,y)}{\partial t}$ $(k,l,m=1,\ldots,n)$, où l'ordre des dérivations peut être interverti.*

§ 5. Dans ce paragraphe nous étudierons la fonction u_1 et ses dérivées, lorsque la différence $t-s$ tend vers zéro.

Soient x_0 et y_0 des points distincts de la variété M_n et soient ω et r des nombres réels de l'intervalle $(0,\frac{1}{5})$. Nous supposons r choisi de telle façon que les points x_0 et y_0 soient r-distants. Nous supposons aussi que $x_0\in U_\nu$ pour $q_0\leqslant\nu\leqslant q_1$ et $y_0\in U_\nu$ pour $w_0\leqslant\nu\leqslant w_1$ $(1\leqslant q_0,q_1,w_0,w_1\leqslant p)$. Enfin soit $\varphi(t,x;s,y)$ une quelconque des fonctions $u_1(t,x;s,y)$, $D_{x^m}u_1(t,x;s,y)$, $D_{x^l}D_{x^m}u_1(t,x;s,y)$, $\partial u_1(t,x;s,y)/\partial t$, $D_{y^k}u_1(t,x;s,y)$, $D_{x^m}D_{y^k}u_1(t,x;s,y)$, $D_{x^l}D_{x^m}D_{y^k}u_1(t,x;s,y)$, $\partial D_{y^k}u_1(t,x;s,y)/\partial t$ $(k,l,m=1,\ldots,n)$. Ceci admis nous avons:

LEMME 4. *On peut choisir les voisinages Θ du point x_0 et Ξ du point y_0 de manière que la fonction φ admette pour $t_0<s<t<t_1$, $x\in\Theta$, $y\in\Xi$ la limitation*

$$(5.1)\quad |\varphi(t,x;s,y)|\leqslant Cr^{-(2n+4)/\omega}(t-s)^{(1-5\omega)/2}$$

les points x et y étant r-distants (C est une constante positive).

Démonstration. Les cas $\varphi=u_1$ ou $\varphi=D_{x^l}u_1$ $(l=1,\ldots,n)$ ne présentent aucune difficulté. Dès lors soit φ une quelconque des fonctions $\partial u_1/\partial t$, $D_{x^l}D_{x^m}u_1$ $(l,m=1,\ldots,n)$. On écrit l'intégrale

$$\int_{M_n} z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi$$

sous la forme

$$\sum_{\nu=q_0}^{q_1}\Big(\sum_{j=1}^{n+5}\int_{U_\nu} z_\nu(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi+\int_{U_\nu} z_\nu(t,x;\tau,\xi)\sum_{j=n+6}^{\infty}f_j(\tau,\xi;s,y)\,d_g\xi\Big).$$

Dans la première somme le domaine d'intégration U_ν sera décomposé en les domaines $\Delta_\nu(x)$ et $U_\nu-\Delta_\nu(x)$, où $\Delta_\nu(x)$ désigne l'ensemble de tous les points ξ du domaine U_ν qui vérifient l'inégalité

$$|{}_\nu\xi^i-{}_\nu x^i|\leqslant a(t-\tau)^{(1-\omega)/2}\quad (i=1,\ldots,n)$$

a étant une constante positive suffisamment petite. Ensuite on appliquera la substitution

$${}_\nu\xi^i={}_\nu x^i+(t-\tau)^{(1-\omega)/2}\zeta^i\quad (i=1,\ldots,n)$$

à l'intégrale étendue au domaine $\Delta_\nu(x)$, après quoi la dérivation pourra être introduite sous le signe d'intégration. Après quelques transformations on établit la limitation (5.1). Les cas restants peuvent être étudiés d'une façon semblable.

§ 6. Démonstration des théorèmes. Le théorème 1 est une conséquence immédiate du lemme 3 et du théorème B de S. Itô, le théorème 2 résulte facilement du lemme 4. Le théorème 4 se démontre simplement en étudiant l'intégrale

$$\int_0^t\int_{\Omega_n} u_1(t,x;s,y)\,\varrho(s,y)\,d_gy\,ds$$

de la façon expliquée au § 4 et en s'appuyant sur le théorème A de S. Itô et sur la limitation

$$\Big|\int_{\Omega_n} u(t,x;s,y)\,\varrho(s,y)\,d_gy\Big|\leqslant \text{const}.$$

Démonstration du théorème 3. D'après la définition de la fonction a^i et en se basant sur le théorème C de S. Itô on obtient en appliquant le théorème de Gauss au domaine Ω_n et en intégrant par rapport à s:

$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial\Omega_n} a_N(t,x;s,y)\,d_gy\,ds = -\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\Omega_n} c(s,y)u(t,x;s,y)\,d_gy\,ds-\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\Omega_n}\frac{\partial}{\partial s}u(t,x;s,y)\,d_gy\,ds$$

$$(t>0,\ x\in M_n,\ \varepsilon>0).$$

Si $\varepsilon \to 0$, on a

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega_n} a_N(t, x; s, y)\, d_g y\, ds = -\int_0^t \int_{\Omega_n} c(s, y) u(t, x; s, y)\, d_g y\, ds + \int_{\Omega_n} u(t, x; 0, y)\, d_g y + \gamma(x),$$

où

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in \Omega_n, \\ \frac{1}{2} & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega_n, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in M_n - \overline{\Omega}_n, \end{cases}$$

d'où résulte pour $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^t \int_{\partial\Omega_n} a_N(t, x; s, y)\, d_g y\, ds = \int_0^t \int_{\partial\Omega_n} a_N(t, x_0; s, y)\, d_g y\, ds + \eta. \tag{6.1}$$

La propriété 1° peut être démontré de même qu'on le fait dans l'étude du potientiel newtonien de double couche.

Nous vérificrons maintenant la propriété 2°. L'égalité (3.2) pour $x \in M_n - \partial\Omega_n$ est évidente en raison du lemme 4 et pour $x \in \partial\Omega_n$ elle peut être vérifiée de même que dans la démonstration bien connue des propriétés du potentiel de double couche relatif à l'équation de la propagation de la chaleur. Soit Ω_n' un domaine arbitraire contenu avec sa fermeture dans le domaine Ω_n. Il existe un nombre réel r tel que deux points arbitraires $x_0 \in \overline{\Omega_n'}$ et $y_0 \in \partial\Omega_n$ soient r-distants. Il résulte du lemme 4 qu'on peut choisir les entourages Θ du point x_0 et Ξ du point y_0 de manière que pour $t_0 < s < t < t_1$, $x \in \Theta$ et $y \in \Xi$ l'inégalité

$$|a_N(t, x; s, y) \mu(s, y)| \leqslant C r^{-(2n+4)/\omega} (t-s)^{(1-5\omega)/2} \tag{6.2}$$

soit remplie, C étant une constante positive. Les ensembles $\overline{\Omega_n'}$ et $\partial\Omega_n$ étant compacts, on peut facilement démontrer que l'inégalité (6.2) reste vraie pour les points arbitraires $x \in \overline{\Omega_n'}$ et $y \in \partial\Omega_n$, la constante C étant convenablement choisie. Il en résulte la propriété 2°.

La propriété 3° peut être vérifiée en se basant sur les théorèmes 1° et 2°.

Travaux cités

[1] N. Aronszajn and A. N. Milgram, *Differential operators on Riemannian manifolds*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo 2 (1953), p. 266-325.

[2] F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, I et II, Duke Math. Journal 7 (1940), p. 186-203 et 13 (1946), p. 61-70.

[3] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Москва-Ленинград 1949, p. 462.

[4] W. V. D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge 1952.

[5] S. Itô, *The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold*, Osaka Math. Journal 5 (1953), p. 75-92.

[6] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, cz. I, Warszawa 1957.

[7] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Mathematica 5 (1956), p. 25-57.

[8] — *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 61-92.

[9] G. De Rham, *Variétés différentiables*, Paris 1955.

[10] Л. Н. Слободецкий, *Теория потенциала для параболических уравнений*, ДАН СССР 103 (1955), p. 19-22.

Reçu par la Rédaction le 9. 10. 1958