ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

# Ein Problem der zweidimensionalen Minkowskischen Geometrie

von L. Tamássy (Debrecen)

**1.** S. Gołąb hat folgendes Problem gestellt: In welchen zweidimensionalen Minkowskischen Geometrien sind alle drei Produkte: Seitenlänge mal Pseudohöhenlänge für jedes Dreieck einander gleich. Herr Gołąb hat die Vermutung ausgesprochen, daß dies in denjenigen Minkowskischen Geometrien gilt, deren Indikatrixen Radonschen Kurven (1) sind. Zugleich hat Herr Gołąb gezeigt, daß für konvexe und symmetrische Indikatrixen die Bedingung notwendig ist. Diese Vermutung werden wir in dieser Arbeit beweisen. Nachdem wollen wir einige Feststellungen über das Inhaltsmessen in den hier behandelten zweidimensionalen Minkowskischen Räumen machen und beweisen, daß die oben erwähnte Eigenschaft für drei Dimension nur dann besteht, wenn die Indikatrix ein zentrisches Ellipsoid ist.

Betrachten wir einen zweidimensionalen Minkowskischen Raum, mit einer orientierten, sternartigen, stetig differenzierbaren, (aber nicht notwendigerweise symmetrischen) Indikatrix $I$, deren Zentrum (Anfang) mit $O$ bezeichnet wird. Die zu einer beliebiger Richtung $\mathfrak{a}$ (durch kleine gothische Buchstaben werden immer Richtungen bezeichnet werden) transversale Richtung ist die Richtung der im Punkt $P$ genommenen gerichteten Tangente von $I$, wo $P$ der Schnittpunkt des aus $O$ in der Richtung von $\mathfrak{a}$ ausgehende Strahles und der Indikatrix ist. Um über transversale Richtungen ohne Einschränkung sprechen zu können, werden wir für die Indikatrix $I$ immer die oben erwähnten Eigenschaften voraussetzen. (2) Eine gerichtete Gerade oder ein Strahl $\mathfrak{a}^*$ soll zu einem anderen $\mathfrak{a}$ *transversal* genannt werden, wenn die Richtungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*$ in der gegebenen Reihenfolge transversal sind. Eine Indikatrix $I$, die die oben angeführten Bedingungen erfüllt, und außerdem keine durch $O$ gehende Tangente besitzt, werden wir kurz *regulär* nennen. Eine konvexe mit

(1) Für den Begriff der Radonschen Kurven siehe die von J. Radon in [4] behandelten Kurvenklasse.

(2) Die Orientierung wird in Fällen, wo sie keine wesentliche Rolle spielt, weggelassen.

Tangenten in jedem Punkt versehene Indikatrix ist offenbar regulär. Für reguläre Indikatrixen kann man für jedes Dreieck $ABC_\triangle$ für jede seine gerichtete Strecke z. B. $\overrightarrow{AB}$ in eindeutiger Weise die (gerichtete) Pseudohöhe definieren und zwar folgendermaßen. Zur Richtung $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ betrachten wir die transversale Richtung $\mathfrak{a}^*$. Da $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*$ voraussetzungsgemäß nicht parallel sind, so schneidet die Gerade durch $C$ mit der Richtung $\mathfrak{a}^*$ die Gerade durch $A, B$ genau in einem Punkt $C'$. Die Strecke $\overrightarrow{CC'}$ bzw. $\overrightarrow{C'C}$, wobei die Reihenfolge der Punkte $C, C'$ so gewählt sein soll, damit die Strecke die Richtung von $\mathfrak{a}^*$ habe, nennen wir die zu $\overrightarrow{AB}$ gehörige Pseudohöhe. Diese Pseudohöhe bezeichnen wir mit $h_C$.

Die Minkowskische Länge der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$ werden wir mit $L_I(\overrightarrow{AB})$ oder (bei festgestellten Indikatrix $I$) kurz mit $L(\overrightarrow{AB})$ bezeichnen. Für eine mit regulären Indikatrix ausgestattete Minkowskische Ebene kann also die folgende Frage gestellt werden: Für welche Indikatrixen gilt für jedes Dreieck $ABC_\triangle$ die Eigenschaft

$$\text{(E)} \qquad L(\overrightarrow{AB})\cdot L(h_C) = L(\overrightarrow{BC})\cdot L(h_A) = L(\overrightarrow{CA})\cdot L(h_B).$$

Für die euklidische Ebene ist bekanntlich die Eigenschaft (E) erfüllt. Dieses Problem gehört also zum Problemkreis, in welchen Minkowskischen Geometrien bleibt der eine oder andere Satz der euklidischen Geometrie noch gültig. Ein anderes Problem aus diesem Problemkreise wurde unlängst von S. Gołąb und von mir gelöst.(3)

**2.** Nun wollen wir unseren Hauptsatz formulieren und den Beweis geben.

SATZ 1. *Ist die Indikatrix $I$ der Minkowskische Ebene regulär, so besteht die Eigenschaft* (E) *für jedes Dreieck dann und nur dann, wenn $I$ eine Radonsche Kurve ist.*

Wir erinnern daran, daß eine Radonsche Kurve eine symmetrische, geschlossene, konvexe Kurve ist, deren jedes Paar von transversalen Richtungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*$ konjugiert ist, d. h.

$$(\mathfrak{a}^*)^* = -\mathfrak{a}$$

besteht. G. Pick war der erste, der bewiesen hat, daß für jede symmetrische, geschlossene, konvexe und mit Tangenten in jeden Punkte versehene Kurve mindestens ein Paar von konjugierten Richtungen besitzt. Radon hat als der erste erkannt, daß es außer Ellipsen noch andere Kurven gibt, für welche jedes Paar von transversalen Richtungen zueinander konjugiert ist. D. Laugwitz hat unlängst bewiesen, daß für

(3) Siehe S. Gołąb und L. Tamássy [3].



jede konvexe geschlossene Kurve mindestens zwei (wesentlich) verschiedene Paare von konjugierten Richtungen existieren.

Den Beweis des Hauptsatzes zerlegen wir in zwei Teile. Erstens beweisen wir

A. *Ist die Indikatrix eine Radonsche Kurve, so sind alle drei Produkte: Seitenlänge mal Pseudohöhenlänge für jedes Dreieck einander gleich.*

Da eine Radonsche Kurve eine symmetrische Kurve ist, so ist die Länge einer Strecke bezüglich dieser Kurve als Indikatrix für beide möglichen Orientierungen der Strecke gleich. Daher sind auch die Pseudohöhenlängen für beide Orientierungen der Indikatrix einander gleich. Daher können wir die Orientierung sowohl des Dreiecks, als auch der Indikatrix in diesem Fall außer Acht lassen.

Es seien die Seiten eines beliebigen Dreiecks $ABC_\triangle$ mit $a, b, c$ und entsprechende Pseudohöhen mit $h_a, h_b, h_c$ bezeichnet. Wir vollziehen in unserer Ebene eine Zentroaffinität (in Bezug auf $O$) welche die Paare $a, h_a$ und $b, h_b$ in senkrechte Lage überführt. Bezeichnen die Zeichen der Seiten und der Pseudohöhen gleichzeitig die mit euklidischem Maß gemessene Längen derselben und bezeichne $\lambda_a$ die Hälfte der euklidischen Länge des mit $a$ parallelen Durchmessers der Indikatrix $I$, so ist in der transformierten Lage die Gleichheit der zwei Produkte: Seite mal Pseudohöhe (in Minkowskischem Maß gemessen) durch

$$(1) \qquad \frac{a'}{\lambda_{a'}}\cdot\frac{h_{a'}}{\lambda_{h_{a'}}} = \frac{b'}{\lambda_{b'}}\cdot\frac{h_{b'}}{\lambda_{h_{b'}}}$$

ausgedrückt, wenn die transformierten Größen mit Strich bezeichnet werden. $a'h_{a'} = b'h_{b'}$ ist offensichtlich wahr, da die Größen euklidische Längen bedeuten. So ist es zum Bestehen von (1) genügend nur

$$(2) \qquad \lambda_{a'}\lambda_{h_{a'}} = \lambda_{b'}\lambda_{h_{b'}}$$

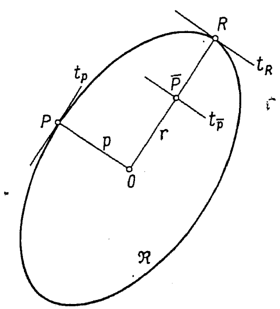

Fig. 1

zu beweisen.

(2) ist aber wahr. Man kann nämlich zu einem Stützelement $(R, t_R)$ (siehe Figur 1) einer Radonsche Kurve $\mathfrak{R}$, der aus einem auf einem Durchmesser $r$ liegenden Kurvenpunkt $R$, und aus der Tangente $t_R$ besteht, das zu ihm konjugierte Stützelement $(P, t_p)$ so erhalten, daß man den Pol $\bar{P}$ von $t_R$ und die Polare $t_{\bar{P}}$ von $R$ bezüglich eines entsprechenden Kreises mit Mittelpunkt $O$ und Radius $\varrho$ (welcher Radius nur von $\mathfrak{R}$ abhängt, während von der Wahl des Punktes $R$ unabhängig ist) bildet, und diese dann mit dem Winkel $\pm\pi/2$ um $O$ dreht.(4) Ist $r \perp t_R$ so fällt

(4) Siehe J. Radon [4].

$\bar{P}$ an $r$, und dann ist $\overline{OR}\cdot\overline{O\bar{P}} = \overline{O\bar{R}}\cdot\overline{OP} = \varrho^2$. $\lambda_{h_{a'}}$ ist mit der Tangente zur Indikatrix $I'$ im Endpunkt des Halbdurchmessers $\lambda_{a'}$ parallel. $\lambda_{h_{a'}}$ ist aber auf $\lambda_{a'}$ voraussetzungsgemäß senkrecht und daher ist nach dem oben erwähnten $\lambda_{a'}\lambda_{h_{a'}} = \varrho'^2$. Ähnlicherweise ist $\lambda_{b'}\lambda_{h_{b'}} = \varrho'^2$. Diese beiden Gleichungen beweisen zusammen (2).

Da die Affinität die Parallelität behält, und an parallelen Geraden jede Strecke mit demselben Faktor multipliziert wird, so ist die mit Minkowskischem Maß gemessene Länge einer beliebigen Strecke bezüglich der ursprüngliche Indikatrix $I$ gleich der Minkowskischen Länge des affinen Bildes der Strecke bezüglich der transformierten Indikatrix $I'$. So gilt auch

$$\frac{a}{\lambda_a}\cdot\frac{h_a}{\lambda_{h_a}} = \frac{b}{\lambda_b}\cdot\frac{h_b}{\lambda_{h_b}}. \tag{3}$$

Wir vollziehen jetzt an unserer Ebene eine solche Zentroaffinität, welche die Paare $a, h_a$; $c, h_c$ in senkrechte Lage überführt. Wir erhalten hier für diese eine (2) ähnliche Relation. Indem wir mit der inversen Affinität in das ursprüngliche System zurückkehren, so bekommen wir

$$\frac{a}{\lambda_a}\cdot\frac{h_a}{\lambda_{h_a}} = \frac{c}{\lambda_c}\cdot\frac{h_c}{\lambda_{h_c}},$$

was zusammen mit (3) A beweist.

Jetzt gehen wir zum Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes über:

B. *Ist die Indikatrix keine Radonsche Kurve, so gibt es immer ein Dreieck, für welches die Eigenschaft* (E) *nicht erfüllt ist.*

Beim Beweis unterscheiden wir die folgenden drei Fälle: I. die Indikatrix ist eine konvexe Kurve ohne einer geradlinigen Strecke; II. die Indikatrix ist eine nicht-konvexe Kurve; III. die Indikatrix ist eine konvexe Kurve mit einer geradlinigen Strecke.

B. I. Erstens erwähnen wir die bekannte Tatsache: ist die Transversalität zwischen zwei Geraden bezüglich einer Indikatrix ohne Orientierung immer eine symmetrische Beziehung, d. h. folgt aus der Transversalität einer Geraden $a$ zu einer Geraden $b$ immer auch die Transversalität von $b$ zu $a$, so ist die Indikatrix eine Radonsche Kurve.

Nehmen wir jetzt an, daß die Indikatrix keine Radonsche Kurve ist. Wir behaupten, daß es eine Richtung $\mathfrak{a}_0$ gibt so, daß $(-\mathfrak{a}_0^*)^* \neq \mathfrak{a}_0$ gilt. Nehmen wir (zwecks Zurückführung ad absurdum) vorläufig an, daß $(-\mathfrak{a}^*)^* = \mathfrak{a}$ für jede Richtung $\mathfrak{a}$ besteht. Die obige Relation schreiben wir folgendermaßen um

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b} \Rightarrow (-\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a}. \tag{4}$$



Setzen wir in der obigen Implikation $-\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{b}$, so erhalten wir

$$(-\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a} \Rightarrow (-\mathfrak{a})^* = -\mathfrak{b} \tag{5}$$

(4) und (5) ergeben zusammen

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b} \Rightarrow (-\mathfrak{a})^* = -\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}^*.$$

Die Relation $(-\mathfrak{a})^* = -\mathfrak{a}^*$ für jedes $\mathfrak{a}$ besagt, daß die Transversalität die Symmetrieeigenschaft besitzt, was nach dem vorigen Absatz nach sich zieht, daß die Indikatrix eine Radonsche Kurve ist, was der vorläufigen Voraussetzung widerspricht.

Es seien also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Richtungen für die

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad (-\mathfrak{b})^* \neq \mathfrak{a}$$

gilt. Es seien $A$ und $\bar{A}$ die Punkte der Indikatrix, wo die Tangenten $\vec{t}$, $\vec{v}$ die Richtung $\mathfrak{b}$ bzw. $-\mathfrak{b}$ haben, $B$ und $\bar{B}$ bezeichnen die Punkte der Indikatrix, für welche $\overrightarrow{OB} \parallel \mathfrak{b}$ bzw. $\overrightarrow{O\bar{B}} \parallel -\mathfrak{b}$ gilt. $\vec{e}$ und $\vec{f}$ seien die aus $O$ in den Richtungen $(-\mathfrak{b})^*$ bzw. $\mathfrak{b}^*$ ausgehenden Halbstrahle, und $E$ und $F$ deren Schnittpunkte mit $\vec{t}$ bzw. $\vec{v}$. (Siehe Figur 2.) Diese Schnittpunkte existieren. Verschieben wir nämlich die Halbstrahlen, die die Indikatrix in Punkten des Bogens berühren, welcher sich von $A$ in der Richtung der Orientierung bis $\bar{A}$ erstreckt, in das Zentrum $O$, so fallen diese Halbstrahlen auf dieselbe Seite der Geraden $B\bar{B}$, auf welcher $\bar{A}$ liegt. Es seien endlich $C$ und $\bar{C}$ zwei Punkte an $\vec{t}$ bzw. an $\vec{v}$ die von $A$, $E$ bzw. $\bar{A}$, $F$ verschieden sind,

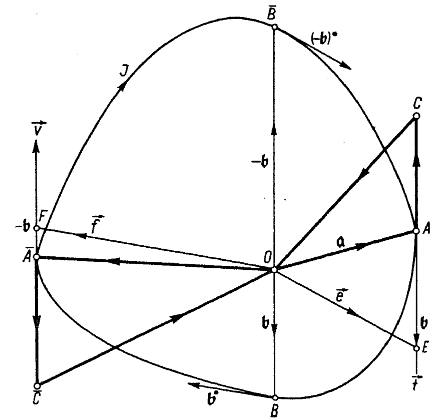

Fig. 2

und für welche $\overrightarrow{CA} \parallel \mathfrak{b}$ bzw. $\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}} \parallel -\mathfrak{b}$ gilt. Wir werden zeigen, daß entweder für das Dreieck $\overrightarrow{OAC}_\triangle$ ([5]) oder für das Dreieck $\overrightarrow{O\bar{A}\bar{C}}_\triangle$ die Eigenschaft (E) nicht besteht. Wir bezeichnen die euklidische Länge von $\overline{OB}$

([5]) $\overrightarrow{OAC}_\triangle$ bedeutet, daß die Seiten des Dreiecks in der Form $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CO}$ gerichtet sind.

mit $\lambda_{\mathfrak{b}}$, und die euklidische Länge von $\overline{OB}$ mit $\lambda_{-\mathfrak{b}}$ (ähnlich wie im Punkte A). Daher bestehen gemäß

(6) $$\lambda_{-\mathfrak{b}} \lesseqqgtr \lambda_{\mathfrak{b}}$$

die Relationen

(7) $$L(\overrightarrow{CA}) \lesseqqgtr L(\overrightarrow{AC}).$$

Im Fall $\lambda_{-\mathfrak{b}} \leqslant \lambda_{\mathfrak{b}}$ betrachten wir das orientierte Dreieck $\overrightarrow{OAC}_\Delta$. Wegen $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}$ gehört zu $\overrightarrow{OA}$ die Pseudohöhe $\overrightarrow{CA}$, und wegen $(-\mathfrak{b})^* \| \vec{e}$ gehört zur Seite $\overrightarrow{AC}$ die Pseudohöhe $\overrightarrow{OE}$. $E$ ist wegen $(-\mathfrak{b})^* \neq \mathfrak{a}$ von $A$ verschieden, $L(\overrightarrow{OE})$ ist also wegen der in B. I für die Indikatrix gemachten Annahme größer als 1. Daher ist aber

$$L(\overrightarrow{OA})L(\overrightarrow{CA}) < L(\overrightarrow{AC})L(\overrightarrow{OE}),$$

weil $L(\overrightarrow{OA}) = 1 < L(\overrightarrow{OE})$ und nach (7) $L(\overrightarrow{CA}) \leqslant L(\overrightarrow{AC})$ ist. Besteht dagegen in (6) die Relation $\lambda_{-\mathfrak{b}} > \lambda_{\mathfrak{b}}$, so erhalten wir für das Dreieck $\overrightarrow{OAC}_\Delta$ ein ähnliches Resultat. Nämlich gehört jetzt zu $\overrightarrow{O\bar{A}}$ die Pseudohöhe $\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}}$, und zur Seite $\overrightarrow{\bar{A}\bar{C}}$ wegen $\mathfrak{b}^* \| \vec{f}$ die Pseudohöhe $\overrightarrow{OF}$. Weiterhin ist $L(\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}}) = \sigma L(\overrightarrow{AC})$, wo $\sigma$ wegen $\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}} \| \overrightarrow{AC}$ das Verhältnis der euklidischen Maße von $\overline{AC}$ und $\overline{\bar{C}\bar{A}}$ bedeutet. Ähnlicherweise ist $L(\overrightarrow{\bar{A}\bar{C}}) = \sigma L(\overrightarrow{CA})$, wo $\sigma$ wieder den vorigen Wert hat, da die euklidischen Längen $\overline{AC}, \overline{CA}$ und $\overline{\bar{C}\bar{A}}, \overline{\bar{A}\bar{C}}$ einander gleich sind. Weiterhin ist wieder $L(\overrightarrow{O\bar{A}}) = 1$ und wegen der Konvexität der Indikatrix $L(\overrightarrow{OF}) \geqslant 1$.[6] Daher ist

$$L(\overrightarrow{O\bar{A}})L(\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}}) = 1\cdot\sigma L(\overrightarrow{AC})$$

und

$$L(\overrightarrow{\bar{A}\bar{C}})L(\overrightarrow{OF}) \geqslant \sigma L(\overrightarrow{CA})\cdot 1,$$

was wegen der in diesem Fall nach (7) bestehenden Relation $L(\overrightarrow{CA}) > L(\overrightarrow{AC})$

$$L(\overrightarrow{\bar{A}\bar{C}})L(\overrightarrow{OF}) > L(\overrightarrow{O\bar{A}})L(\overrightarrow{\bar{C}\bar{A}})$$

bedeutet. Damit ist aber der Beweis im Fall B. I beendet.

(6) $L(\overrightarrow{OF}) = 1$ kann nur im Fall vorkommen, wenn $F$ mit $\bar{A}$ zusammenfällt, was jedoch nicht ausgeschlossen ist.



B. II. Jetzt existiert für die nicht-konvexe Indikatrix sicher eine Stützgerade $\vec{s}$, welche die Indikatrix mindestens in zwei Punkten $T$ und $V$ berührt. Sind die euklidischen Längen $\overline{OT}$ und $\overline{OV}$ voneinander verschieden, so bilden wir den Schnittpunkt $T_1$ der an $V$ liegenden zu $OT$ parallelen Geraden mit der an $T$ liegenden und zu $OV$ parallelen Geraden. (Siehe Figur 3.) Es bezeichne weiter $H_1$ den Schnittpunkt der Geraden $OV$ mit der an $T_1$ liegenden und mit $s$ parallelen Geraden, und $H_2$ den Schnittpunkt der Geraden $VT_1$ mit der an $O$ liegenden und zu $s$ parallelen Geraden. Betrachten wir jetzt das Dreieck $\overrightarrow{OVT_1}_\Delta$. Die Pseudohöhe von $\overrightarrow{OV}$ ist $\overrightarrow{T_1H_1}$ und die von $\overrightarrow{VT_1}$, $\overrightarrow{OH_2}$. $OVH_{2\Delta}$ und $T_1VH_{1\Delta}$ sind aber ähnliche Dreiecke, und so wegen $\overline{OV} \neq \overline{VT_1}$ auch

(8) $$\overline{OH_2} \neq \overline{TH_1}.$$

Da aber $\overrightarrow{OH_2} \| \overrightarrow{T_1H_1}$ gilt, ist

$$L(\overrightarrow{OH_2}) = \frac{\overline{OH_2}}{\overline{T_1H_1}} L(\overrightarrow{T_1H_1}),$$

und so sind auch die Produkte

$$L(\overrightarrow{OV})L(\overrightarrow{T_1H_1}) \quad \text{und}$$

$$L(\overrightarrow{VT_1})L(\overrightarrow{OH_2}) = L(\overrightarrow{VT_1})\frac{\overline{OH_2}}{\overline{T_1H_1}}L(\overrightarrow{T_1H_1})$$

wegen $L(\overrightarrow{OV}) = L(\overrightarrow{OT}) = L(\overrightarrow{VT_1}) = 1$ und (8) ungleich.

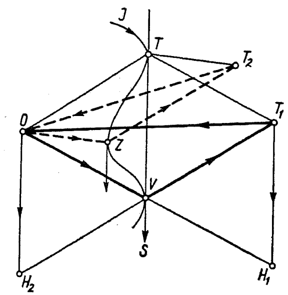


Fig. 3

Ist $\overline{OT} = \overline{OV}$ so ist $OVT_\Delta$ ein gleischenkliges Dreieck. Da die Indikatrix eine sternförmige Kurve und $s$ ihre Stützgerade ist, so muß der Bogen $\overset{\frown}{TV}$ ganz im Innern des Dreiecks $OTV_\Delta$ liegen, und er muß nach dem Satz von Lagrange mindestens einen Punkt $Z$ enthalten, wo die Tangente zu $\vec{s}$ parallel ist. Wir bilden jetzt aus den Punkten $O, T, Z$ ausgehend den Punkt $T_2$ auf ähnliche Weise, wie wir vorher aus den Punkten $O, T, V$ den Punkt $T_1$ gebildet haben. Da $Z$ im Inneren von $OVT_\Delta$ liegt, so ist $\overline{OZ} < \overline{OT}$, und es ist ebenso wie vorher einzusehen, daß im Dreieck $\overrightarrow{OZT_2}_\Delta$ die Produkte: Seitenlänge mal Pseudohöhenlänge einander nicht gleich sind.

B. III. Diesen Fall ist es sehr einfach auf den Fall B. II zurückzuführen. Die geradliniege Strecke bildet nämlich eine Stützgerade, und an dieser gibt es sicher zwei Punkte $T$ und $V$, für welche $\overline{OT} \neq \overline{OV}$ ist, ebenso wie im Fall B. II.

3. Jetzt wollen wir über das Inhaltsmessen der zweidimensionalen Minkowskischen Räume einige Feststellungen machen. Wir legen für das Inhaltsmessen eines Dreiecks die folgende Definition zugrunde:

Definition. Der *Inhalt* eines Dreiecks ist die Hälfte des gemeinsamen Wertes: Seite mal Höhe.

Auf Grund des Hauptsatzes ist es offensichtlich, daß die Radonschen Kurven die allgemeinsten Indikatrixen sind, für welche man den Inhalt eines beliebigen Dreiecks mit Hilfe der obigen Definition messen kann. Diese Definition besitzt die Eigenschaft der Additivität. Es sei nämlich ein Dreieck $ABC_\triangle$ durch die Strecke $CD$, wo $D$ ein auf der Seite $AB$ liegender Punkt ist, in zwei Teile zerlegt. Falls wir in den Teildreiecken die Seiten $AD$ und $DB$ wählen, fallen die Höhen (Pseudohöhen) zusammen. Daher ist aber wegen $L(AD)+L(DB) = L(AB)$ die Summe der Inhalte der zwei Teildreiecke dem Inhalt des Dreiecks $ABC_\triangle$ gleich. Aus diesem Grund ist es leicht einzusehen, daß auch die Maßzahl des Inhalts eines Vielecks unabhängig davon ist, wie er in Dreiecke zerlegt wird. Diese Behauptungen können wir im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2. *Die Radonschen Kurven bilden die allgemeinste Art von Indikatrixen, bei welchen in einer zweidimensionalen Minkowskischen Geometrie sich das Inhaltsmessen in der von der euklidischen Geometrie her bekannten Weise (das Inhaltsmessen von Dreieck, Parallelogramm, Trapez, Vieleck, usw.) auf dem Längemessen gründen läßt.*

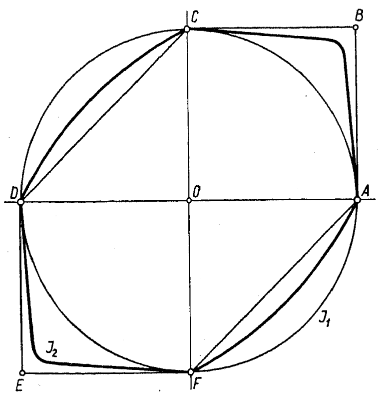


Fig. 4.

Dieses Inhaltsmaß unterscheidet sich aber im allgemeinen von dem von Busemann [2] eingeführten Inhaltsmaß, und ist nicht auf den euklidischen Maß gegründet. Nach Busemann ist der Minkowskische Inhalt gleich dem euklidischen, multipliziert mit einem Faktor, wobei dieser Faktor gleich $\pi$ gebrochen mit dem euklidischen Maße der Indikatrix ist. Daß das nach unserer Definition genommene Inhaltsmaß von dem Busemannschen wirklich verschieden sein kann, zeigt das folgende Beispiel. Es seien $O, A, B, C$ die Eckpunkte des Einheitsquadrats des Koordinatensystems, mit Ursprung $O$ (siehe Figur 4). Wir betrachten eine Kurvenfolge $g_n$, deren Elemente konvexe differenzierbare Kurven sind, die in $A$ die Gerade $AB$, und in $C$ die Gerade $BC$ berühren, und welche Kurvenfolge gleichmäßig zur gebrochenen Linie $ABC$ konvergiert. Jede $g_n$ bestimmt eindeutig eine Radonsche Kurve $\mathfrak{R}_n$. Nämlich man kann mit Benutzung des Kreises $I_1$ mit Mittelpunkt $O$ und mit Radius $OA$ die Stützelemente der im II. und in IV. Ebenenvierteln liegenden Teile von $\mathfrak{R}_n$ auf die früher beschriebene Weise erhalten, während der im III. Ebenenviertel liegende Teil von $\mathfrak{R}_n$ das Spiegelbild des im I. Ebenenviertel liegenden Teiles ist. Diese $\mathfrak{R}_n$ konvergieren zum Vieleck $ABCDEFA$. Der Inhalt dieses Vieleck ist 3. $I_2$ sei jetzt ein solches Element der Kurvenfolgen $\mathfrak{R}_n$, dessen Inhalt sich nicht mehr als um 0.1 vom Wert 3 unterscheidet. Daher unterscheiden sich die Inhalte der Radonschen Kurven $I_1$ und $I_2$, obwohl diese das konjugierte Durchmesserpaar $AD, CF$ gemeinsam haben. Folglich sind aber die nach unserer Definition berechneten Inhalte des Dreicks $OAC_\triangle$ in den beiden mit Hilfe von $I_1$ und $I_2$ bestimmten Metriken gleich, während sie nach dem Busemannschen Maß verschieden ausfallen, was unsere Behauptung bestätigt.



4. Endlich wollen wir unser ursprüngliches Problem für dreidimensionale Minkowskische Räume behandeln. Wir beweisen den folgenden

Satz 3. *Die Eigenschaft* (E) *gilt in einem dreidimensionalen Minkowskischen Raum für jedes Dreick dann und nur dann, wenn die Indikatrix ein zentrisches Ellipsoid ist.*

Die Eigenschaft (E) gilt in einem dreidimensionalen Minkowskischen Raum offenbar dann und nur dann, wenn der Schnitt der Indikatrix $I$ mit jeder auf dem Zentrum $O$ liegenden Ebene eine Radonsche Kurve ergibt.

Wir werden zeigen, daß in diesem Fall die Indikatrix eine solche Eifläche ist, die von jedem umschriebenen Zylinder längs einer ebenen Kurve berührt wird. Unsere Indikatrix ist zunächst konvex. Würde sie nämlich eine Schmiegebene haben, die die Indikatrix schneidet, so könnte durch den Berührungspunkt der Schmiegebene und durch $O$ eine Ebene gelegt werden, welche die Indikatrix in keiner Radonschen Kurve schneiden würde, im Widerspruch mit unserer Annahme. Da die Indikatrix auch geschlossen und differenzierbar ist, so ist sie eine Eifläche. Wir betrachten jetzt zur Indikatrix einen beliebigen umschriebenen Zylinder. Die durch $O$ gehende, und mit den Erzeugenden des Zylinders parallele Gerade $p$ trifft $I$ in den Punkten $P$ und $R$. Es seien die Tangentialebenen in $P$ und $R$ $\pi$ und $\varrho$, und die mit ihnen parallele Ebene durch $O$ sei $\varepsilon$. $\varepsilon$ schneidet $I$ in einer ebenen Kurve $\mathfrak{F}$. Nehmen wir jetzt eine beliebige Ebene $\alpha$ durch $p$. Sie schneidet $I$ in einer Radonschen Kurve $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ wird in $P$ durch eine Gerade $t$ berührt, die in $\pi$ liegt. Die mit $t$ parallele Gerade durch $O$ schneidet $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$ in zwei Punkten $M$ und $N$, wo die Tangenten zu $\mathfrak{R}$ parallel mit $p$ sind, da $\mathfrak{R}$ eine Radonsche Kurve ist. Daher sind aber die Berührungsebenen in den Punkten $M$ und $N$ von $\mathfrak{F}$ parallel mit $p$.

Dies bedeutet aber, da $\alpha$ eine beliebige Ebene durch $p$ ist, daß die Berührungsebenen in den Punkten von $\mathfrak{F}$ parallel mit $p$ sind, d. h. der von diesen Ebenen eingehüllte, mit $p$ parallele Erzeugenden besitzende Zylinder berührt die Indikatrix in den Punkten der Kurve $\mathfrak{F}$. Daher berührt ein beliebiger umschriebener Zylinder die Indikatrix in einer ebenen Kurve. Eine Eifläche aber — unsere Indikatrix ist eine Eifläche — die von jedem umschriebenen Zylinder längs einer ebenen Kurve berührt wird, ist nach einem Satz von Blaschke(7) ein Ellipsoid. Damit ist unser Satz bewiesen.

### Literaturverzeichnis

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916.

[2] H. Busemann, *The foundations of Minkowskian geometry*, Comm. Math. Helv. 24 (1950), S. 156-187.

[3] S. Gołąb und L. Tamássy, *Eine Kennzeichnung der euklidischenEbene unter den Minkowskischen Ebenen*, Publ. Math. Debrecen. 7 (1960), S. 187-194.

[4] J. Radon, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 68 (1916), S. 123-128.

---

(7) Siehe W. Blaschke [1], Seite 157-159.

*Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1959*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

# Sur l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Mlle Z. Szmydt relatif à l'équation de la corde vibrante en fonction de la position du point initial

par A. Lasota (Kraków)

Mlle Z. Szmydt [2] a posé pour l'équation

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

un problème aux limites général S, qui consiste à déterminer une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions données

$$\begin{aligned} &u_x\big(x, \alpha(x)\big) = g\Big(x, u\big(x, \alpha(x)\big), u_y\big(x, \alpha(x)\big)\Big), \\ &u_y\big(\beta(y), y\big) = h\Big(y, u\big(\beta(y), y\big), u_x\big(\beta(y), y\big)\Big), \end{aligned} \qquad u(x_0, y_0) = u_0. \tag{2}$$

L'existence et l'unicité des solutions du problème S dépendent évidemment des propriétés des fonctions $f, g, h, \alpha, \beta$ et de la position du point $P_0(x_0, y_0)$. Dans la présente note nous considérons cette dernière dépendance.

**1.** Nous nous bornons — pour simplifier — au problème $S_1$ qui constitue un cas particulier du problème S.

Problème $S_1$. Soient $F(x, y)$, $G(x, u)$, $H(y, u)$, $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ des fonctions définies et continues pour

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B, \quad u \text{ — quelconque}$$

et satisfaisant aux conditions

$$|\alpha(x)| \leqslant B, \quad |\beta(y)| \leqslant A.$$

Soit encore $\Pi$ le rectangle défini par les conditions:

$$|x| \leqslant A, \quad |y| \leqslant B.$$

Enfin soient $u_0$ un nombre réel quelconque et $P_0(x_0, y_0)$ un point arbitraire de $\Pi$.

Cela posé, on cherche une fonction $u(x, y)$ admettant des dérivées $u_x, u_y, u_{xy}$ continues dans le rectangle $\Pi$ et satisfaisant à l'équation

$$u_{xy} = F(x, y) \tag{3}$$