STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Distributions à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach

par

J. MIKUSIŃSKI (Katowice)

1. Introduction. Les distributions sont une généralisation des fonctions. Pour les fonctions dont les valeurs sont des nombres, les distributions correspondantes sont les *distributions à valeurs numériques*; ce sont les distributions bien connues aux mathématiciens et aux physiciens depuis plus d'une dizaine d'années. Si les valeurs des fonctions considérées sont les éléments d'un espace vectoriel plus général $\mathcal{X}$, on aura, pour généralisation, des distributions à valeurs dans $\mathcal{X}$; quelques hypothèses convenables sont alors à faire pour $\mathcal{X}$.

L. Schwartz a supposé, dans ses travaux publiés en 1957 [4] et en 1959 [5], que $\mathcal{X}$ soit un espace topologique localement convexe séparé quasicomplet. Cette supposition conduit à une théorie difficile qui nécessite de profondes théorèmes d'analyse fonctionnelle. Tout récemment J. Wloka [7] a publié une théorie des distributions à valeurs dans l'espace $\mathcal{O}$ des opérateurs de Mikusiński [2] (1). Quoique la définition de ces *distributions opérationnelles* soit très simple, elle échappe à la théorie de L. Schwartz, car l'espace $\mathcal{O}$ n'est pas topologique.

Est-il possible d'attribuer à l'espace $\mathcal{X}$ de telles propriétés qu'on en obtienne une notion de distribution assez large pour les applications et embrassant aussi les distributions opérationnelles?

Nous donnons, dans cet article, une réponse positive. Nous supposons que $\mathcal{X}$ soit une *réunion d'espaces de Banach*, cette notion étant précisée dans la suite. Nous nous servons de la méthode de complétion, en partant de certains espaces de fonctions continues. Cette méthode a déjà été appliquée avec avantage aux distributions à valeurs numériques. De plus, la méthode de complétion est beaucoup plus élémentaire et n'exige aucune préparation de l'analyse fonctionnelle. Quelques propriétés élémentaires d'espaces de Banach, qui sont nécessaires dans la suite, sont rappelées

(1) La notion d'une telle distribution a été considérée aussi par W. Słowikowski [6], qui s'est d'ailleurs borné à la définition, sans en développer une théorie quelconque.

avec leurs démonstrations, aux premières pages du travail. Nous tenons de ne pas omettre ces démonstrations (qui n'occuppent d'ailleurs que très peu de place, voir § 15 par exemple), afin de rendre plus évident le caractère élémentaire de notre théorie. Ainsi le lecteur pourra lire l'article sans avoir besoin des ouvrages spéciaux; il lui suffira de connaître la définition de l'espace normé et de l'espace de Banach.

En terminant j'exprime ma vive gratitude à M. Wojciech Słowikowski dont les remarques ont attribué à améliorer différentes parties de cet article.

Partie I. Réunions

2. Définition d'une réunion d'espaces normés et d'une réunion d'espaces de Banach. Nous allons considérer des familles d'espaces normés X. La norme de $x \in X$ relative à l'espace X sera désignée par $|x|_X$. Nous écrirons $X_1 \ll X_2$, lorsque X_1 est un sous-espace de X_2 et le quotient

$$|x|_{X_2}/|x|_{X_1}$$

est borné pour tout $x \in X_1$. La relation $\ll$ est évidemment transitive, c'est-à-dire que $X_1 \ll X_2$ et $X_2 \ll X_3$ entraîne $X_1 \ll X_3$.

Il est facile de voir que si une suite x_n d'éléments de X_1 converge dans X_1, elle converge vers la même limite dans tout espace $X_2 \gg X_1$ (c'est-à-dire dans tout espace X_2 tel que $X_1 \ll X_2$), en symbole

$$|x_n - x_0|_{X_1} \to 0 \text{ entraîne } |x_n - x_0|_{X_2} \to 0 \text{ pour } X_1 \ll X_2.$$

Soit (X) une famille d'espaces normés X semi-ordonnée par rapport à la relation $\ll$; autrement dit, quels que soient les espaces X_1 et X_2 de la famille (X), il existe dans (X) un espace X_3 tel que $X_1 \ll X_3$ et $X_2 \ll X_3$. Il s'ensuit que les convergences dans tous les espaces de la famille (X) sont compatibles; autrement dit, si une suite converge dans X_1 et dans X_2, sa limite est la même dans les deux espaces.

Désignons par $\mathfrak{X}$ la réunion de tous les espaces de (X). Nous adoptons la définition suivante de la convergence dans $\mathfrak{X}$: une suite x_n d'éléments de $\mathfrak{X}$ est dite *convergente dans $\mathfrak{X}$ vers la limite* x_0, lorsque tous les éléments x_n appartiennent à un même espace X de (X) et convergent dans cet espace vers x_0.

En disant qu'un espace est une *réunion d'espaces normés*, nous entendrons toujours qu'il est une réunion d'espaces normés d'une famille semi-ordonnée par rapport à la relation $\ll$. Pareillement, par une *réunion d'espaces de Banach* nous entendrons toujours une réunion d'espaces de Banach d'une famille semi-ordonnée par rapport à $\ll$.

3. Un exemple. À titre d'exemple, considérons l'espace C des fonctions continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$; pour les suites convergentes prenons celles qui convergent presque uniformément (c'est-à-dire uniformément sur tout compact). L'espace C peut être considéré comme une réunion d'espaces normés. En effet, soit B l'espace des fonctions continues et bornées dans $(-\infty, \infty)$. On pose comme d'habitude

$$|x|_B = \max_t |x(t)|.$$

Désignons par B_r l'espace des fonctions x/r, où $x \in B$ et r est une fonction continue et positive dans $(-\infty, \infty)$. On pose par définition

$$\left|\frac{x}{r}\right|_{B_r} = |x|_B.$$

La famille de toutes les espaces B_r est évidemment sémi-ordonnée par rapport à la relation $\ll$. La convergence d'après la définition du paragraphe 2 coïncide avec la convergence presque uniforme. Pour le vérifier, il suffit de s'appuyer sur le lemme suivant: Pour qu'une suite de fonctions continues x_n converge presque uniformément dans un intervalle, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue et positive r telle que x_n/r converge uniformément dans cet intervalle.

4. Espace de S. Mazur et W. Orlicz. Les espaces normés B_r considérés dans l'exemple précédent sont évidemment complets; ce sont donc des espaces de Banach. L'espace C avec la convergence presque uniforme est une réunion d'espaces de Banach. D'autre part cet espace est un exemple classique d'espace de Mazur et Orlicz. Nous démontrerons la proposition suivante:

Tout espace de Mazur et Orlicz est une réunion d'espaces de Banach.

Rappelons tout d'abord la définition de l'espace de Mazur et Orlicz. À tout élément x de l'espace linéaire considéré Y, on attribue une suite de pseudonormes $|x|_1, |x|_2, \ldots$ (²). On suppose que $|x|_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ entraîne $x = 0$. La suite x_n est dite *convergente vers* x lorsque $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_k = 0$ pour tout k naturel. Cela étant, Y est dit *espace pseudonormé*. Si un espace pseudonormé est complet, il est dit *espace de Mazur et Orlicz*.

Étant donné un espace Y de Mazur et Orlicz, désignons par B son sous-espace pour lequel les suites de pseudonormes sont bornées. Ce sous-espace est évidemment un espace de Banach. Pour la norme on

(²) La fonctionnelle $|x|_k$ est dite une *pseudonorme*, lorsque $|x_1|_k + |x_2|_k \geqslant |x_1 + x_2|^k$ et $|\alpha x|_k = |\alpha| \cdot |x|_k$ (α un nombre).

prendra $\sup_k |x|_k$. Désignons, plus généralement, par B_r le sous-espace de Y tel que $|x|_k \leqslant r_k$, où

$$r = (r_1, r_2, \ldots)$$

est une suite de nombres positifs. Le sous-espace B_r est un espace de Banach avec la norme $\sup_k |x|_k / r_k$. La famille des espaces B_r est semi-ordonnée par rapport à la relation $\leqslant$. Sa réunion contient exactement les mêmes éléments que Y et la convergence dans cette réunion coïncide avec la convergence suivant la métrique de Y (c'est-à-dire d'après les suites de pseudonormes). Cela prouve la proposition.

Si l'espace Y n'est pas complet, les sous-espaces ne sont pas tous complets, mais le reste de la démonstration est correct. Donc la proposition suivante a lieu:

Tout espace pseudonormé (avec une quantité dénombrable de pseudonormes) est une réunion d'espaces normés.

5. Opérateurs de J. Mikusiński. Le corps des opérateurs de Mikusiński n'est pas un espace de Mazur et Orlicz; il n'est même pas un espace topologique. Nous montrerons cependant qu'il est une réunion d'espaces de Banach.

Rappelons la définition des opérateurs. Soit C l'anneau des fonctions continues dans $0 \leqslant t < \infty$ avec l'addition ordinaire et avec la convolution au lieu de la multiplication. Cet anneau n'a pas de diviseurs de zéro. On peut donc l'immérger dans un corps quotient; les éléments de ce corps sont dit *opérateurs*. Une suite d'opérateurs x_n est dite *convergente* lorsqu'il existe une fonction $q \in C$ telle que $qx_n \in C$ et qx_n converge presque uniformément dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$.

Désignons par B l'espace des fonctions continues et bornées dans $0 \leqslant t < \infty$; B est donc un espace de Banach avec la norme $\sup_t |x(t)|$. Désignons par B_{qr} l'espace des opérateurs de la forme

$$\frac{\left\{\dfrac{x(t)}{r(t)}\right\}}{\{q(t)\}}, \tag{1}$$

où q et r sont des fonctions continues données, q non identiquement nulle et r positive. Dans (1) la division par $r(t)$ est ordinaire, cependant la division par $\{q(t)\}$ est à entendre comme l'opération inverse à la convolution. Pour la norme de (1) dans l'espace B_{rq} prenons la norme de x dans l'espace B. Cela étant, B_{qr} est un espace de Banach. La réunion de tous les espaces B_{qr} est évidemment l'espace des opérateurs et la convergence dans cette réunion coïncide avec la convergence opérationnelle.

6. Distributions de Soboleff-Schwartz. Aussi l'espace des distributions est une réunion d'espaces de Banach. Nous allons le montrer dans ce paragraphe.

Il existe de différentes définitions équivalentes des distributions (v. par exemple [3], [6]). Il nous suffira, dans ce paragraphe, de nous appuyer sur les propriétés suivantes des distributions, n'importe quelle que soit leur définition.

Toute distribution $x(t)$ est dans tout intervalle $(-k, k)$ une dérivée d'ordre fini q_k d'une fonction continue $F_k(t)$; en symbole

$$x(t) = F_k^{(q_k)}(t) \quad \text{dans} \quad (-k, k) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

On peut admettre que

$$q_k \leqslant q_{k+1}; \tag{2}$$

alors

$$F_{k+1}^{(q_{k+1}-q_k)}(t) = F_k(t) + P_k(t) \quad \text{dans} \quad (-k, k), \tag{3}$$

où P_k est un polynome de degré $< q_k$. Réciproquement, étant donnée une suite d'entiers $q_k \geqslant 0$ et une suite de fonctions continues $F_k(t)$ telles que les conditions (2) et (3) sont satisfaites, la distribution $x(t)$ est déterminée univoquement.

Si la dérivée $F^{(q_k)}(t)$ existe au sens classique et est continue, la distribution $x(t)$ se réduit, dans $(-k, k)$, à une fonction ordinaire, égale à cette dérivée.

Une suite de distributions $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est dite *convergente vers la distribution* $x(t)$, lorsqu'il existe, pour tout intervalle $[-k, k]$, un entier $q_k \geqslant 0$ et une suite de fonctions continues $F_{kn}(t)$, uniformément convergente vers $F_k(t)$, telle que $x_{kn}(t) = F_{kn}^{(q_n)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et $x(t) = F^{(q_k)}(t)$.

Soit

$$q = (q_1, q_2, \ldots)$$

une suite non décroissante d'entiers non négatifs et

$$r = (r_1, r_2, \ldots)$$

une suite non décroissante de nombres positifs. Désignons par X_{qr} l'ensemble des distributions x telles que

(i) dans l'intervalle $-k \leqslant t \leqslant k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ x est la dérivée d'ordre q_k d'une fonction continue $F_k(t)$;

(ii) la suite

$$p_k = \frac{1}{r_k} \min_{c_j} \max_t \left| F_k(t) + \sum_{j=0}^{q_k-1} c_j t^j \right| \tag{4}$$

(où le „max" se rapporte à l'intervalle $-k \leqslant t \leqslant k$ et le „min" se rapporte à toutes les valeurs réelles de c_j) est bornée.

Nous démontrerons que les ensembles X_{qr} sont desespa ces de Banach avec la norme

$$|x|_{X_{qr}} = \max_k p_k \tag{5}$$

et que la famille de ces espaces est semi-ordonnée par rapport à la relation $\leqslant$. De plus, la réunion des espaces X_{qr} coïncide avec l'espace des distributions et la convergence dans cette réunion coïncide avec la convergence distributionnelle.

Soit $C(-k, k)$ (k fixe) l'espace des fonctions continues $F(t)$ dans l'intervalle $-k \leqslant t \leqslant k$ avec la norme $\max\limits_t |F(t)|$. Alors l'ensemble P_{q_k} des polynomes de degré inférieur au nombre q_k est un sous-espace complet de $C(-k, k)$. Il s'ensuit que le quotient $D_k = C(-k, k)/P_{q_k}$ est un espace de Banach. Ses éléments sont des ensembles des fonctions

$$\Phi_k = \Big(F_k(t) + \sum_{j=0}^{q_k-1} c_j t^j\Big),$$

où les coefficients c_j parcourent toutes les valeurs réelles. La norme de cet espace est la distance de l'ensemble Φ_k à l'élément nul dans la métrique de l'espace $C(-k, k)$, en symbole

$$|\Phi_k|_{D_k} = \min_{c_j} \max_t \Big| F_k(t) + \sum_{j=0}^{q} c_j t^j \Big| \quad (c_j \text{ réels}, \ -k \leqslant t \leqslant k). \tag{6}$$

Considérons maintenat l'espace $C(-\infty, \infty)$ des fonctions continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Pour le quotient $C(-\infty, \infty)/P_{q_k}$, l'expression (6), où le „max" se rapporte toujours à l'intervalle $(-k, k)$, est alors une pseudonorme, c'est-à-dire une fonctionnelle non négative, homogène et satisfaisant à la loi de triangle. Évidemment il en est de même de la fonctionnelle (4). Il s'ensuit sans peine que l'expression (5) est non négative, homogène et satisfaisant à la lois de triangle; de plus, cette dernière fonctionnelle est une norme dans l'espace des distributions X_{rq}. Pour le vérifier, il suffit de démontrer que $|x|_{X_{qr}} = 0$ entraîne $x = 0$. En effet, on a alors $p_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$), en vertu de (5). D'après (4), $F_k(t)$ est alors un polynome de degré $< q_k$. La distribution x est, dans $-k \leqslant t \leqslant k$, la dérivée d'ordre q_k de ce polynome, elle est donc nulle. Comme k est arbitraire, la distribution x est nulle dans $(-\infty, \infty)$.

Pour démontrer que l'espace X_{qr} est complet, supposons que pour une suite x_n d'éléments de X_{qr} la condition de Cauchy

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_m - x_n|_{X_{qr}} = 0$$

soit satisfaite. Alors on a aussi

$$\lim_{m,n\to\infty} |\Phi_{km} - \Phi_{kn}|_{D_k} = 0,$$

où Φ_{km} et Φ_{kn} sont des éléments de D_k correspondant aux distributions x_m et x_n respectivement. Comme les espaces D_k sont complets, il existe des limites

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{kn} = \Phi_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

En prenant une fonction F_k de chacun des ensembles Φ_k, les conditions (2) et (3) seront satisfaites. On voit sans peine que la distribution définie par les suites $q_1, q_2, \ldots$ et $F_1, F_2, \ldots$ est la limite de la suite des distributions x_n. L'espace X_{qr} est donc complet.

Lorsque les éléments des suites q et r sont respectivement non supérieurs aux éléments des suites $\bar{q}$ et $\bar{r}$, l'espace X_{qr} est un sous-espace de $X_{\bar{q}\bar{r}}$. De plus, en tenant compte des inégalités $q_k \leqslant \bar{q}_k$ et $r_k \leqslant \bar{r}_k$, on peut vérifier sans peine que

$$p_k \leqslant \bar{p}_k,$$

où $\bar{p}_k$ est donné par une formule analogue à (4). Cela prouve que la famille de toutes les espaces X_{qr} est semi-ordonnée par rapport à la relation $\leqslant$.

Nous avons ainsi achevé la démonstration que l'ensemble des distributions d'une variable est une réunion d'espaces de Banach. Il en est de même des distributions de plusieurs variables; la construction est analogue.

7. Analyse dans les réunions d'espaces normés. Considérons les fonctions $f(\lambda)$ d'une variable réelle λ dont les valeurs appartiennent à une réunion $\mathfrak{X}$ d'espaces normés X. On peut introduire sans peine les notions de continuité, de dérivée et d'intégrale de ces fonctions, en profitant des notions analogues dans le cas d'un seul espace normé.

Nous dirons qu'une fonction $f(\lambda)$ est *continue sur un intervalle compact* $[a, b]$, lorsque les valeurs admises dans cet intervalle appartiennent à un même espace X et que cette fonction est continue d'après la métrique de cet espace. Le produit d'une fonction continue par un nombre est une fonction continue. La somme et la différence de deux fonctions continues sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$, grâce à l'hypothèse que la famille des espaces X est semi-ordonnée par rapport à la relation $\leqslant$. Pour la même raison, si une fonction est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, elle l'est sur $[a, c]$.

Une fonction $f(\lambda)$ est dite *continue dans un intervalle ouvert* (A, B) (fini ou infini), lorsqu'elle est continue sur tout compact $[a, b]$ contenu dans (A, B).

Nous dirons qu'une fonction $f(\lambda)$ est *dérivable sur un intervalle com-*

pact $[a, b]$, lorsque les valeurs admises dans cet intervalle appartiennent à un même espace X et que cette fonction est dérivable d'après la métrique de cet espace; en désignant la dérivée par $f'(\lambda)$, on a

$$f'(\lambda) = \lim_{\varkappa\to 0} \frac{f(\lambda+\varkappa)-f(\lambda)}{\varkappa}.$$

Une fonction $f(\lambda)$ a la dérivée $f'(\lambda)$ dans un intervalle ouvert $(A, B$ lorsqu'elle a la dérivée $f'(\lambda)$ sur tout compact $[a, b]$ contenu dan) (A, B).

On pourrait définir la continuité et la dérivée directement dans les intervalles ouverts, de même que sur les intervalles compacts, mais une telle définition serait trop étroite pour les applications. Il est aussi possible de définir la continuité et la dérivée dans un seul point. Cela est, peut-être, intéressant du point de vue théorétique, mais introduit des complications inutiles dans les applications.

Si $f(\lambda)$ est dérivable dans un intervalle (compact ou ouvert), elle y est continue. Si $f'(\lambda) = 0$ dans un intervalle (compact ou ouvert), la fonction y est constante. La somme et la différence des fonctions dérivables sont dérivables et l'on a les formules habituelles

$$[f(\lambda)+g(\lambda)]' = f'(\lambda)+g'(\lambda),$$

$$[f(\lambda)-g(\lambda)]' = f'(\lambda)-g'(\lambda);$$

de plus

$$[af(\lambda)]' = af'(\lambda) \qquad (a \text{ un nombre}).$$

En introduisant la notion d'intégrale, il est avantageux de supposer que l'espace considéré soit une réunion d'espaces de Banach, ce qui permet d'assurer à l'intégrale des propriétés importantes.

Nous dirons qu'une fonction $f(\lambda)$ est *intégrable* sur un intervalle, lorsque les valeurs admises sur cet intervalle appartiennent à un même espace X et que cette fonction est intégrable suivant la métrique de cet espace. L'intégrale sur l'intervalle (a, b) sera désignée comme d'habitude:

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

La somme et la différence des fonctions intégrables sont intégrables et l'on a les formules habituelles

$$\int_a^b [f(\lambda)+g(\lambda)]\,d\lambda = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda + \int_a^b g(\lambda)\,d\lambda,$$

$$\int_a^b [f(\lambda)-g(\lambda)]\,d\lambda = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda - \int_a^b g(\lambda)\,d\lambda;$$

de plus

$$\int_a^b [af(\lambda)]\,d\lambda = a\int_a^b f(\lambda)\,d\lambda \qquad (a \text{ un nombre}).$$

Si $f(\lambda)$ est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, elle l'est sur $[a, c]$ et l'on a

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\lambda + \int_b^c f(\lambda)\,d\lambda = \int_a^c f(\lambda)\,d\lambda.$$

Si une fonction est intégrable sur un intervalle $[a, b]$, elle est intégrable sur tout sous-intervalle de $[a, b]$.

Toute fonction continue sur un intervalle compact y est intégrable. De plus, on a alors

$$\Big(\int_a^\lambda f(x)\,dx\Big)' = f(\lambda).$$

Une suite de fonctions $f_n(\lambda)$ soit dite *bornée* dans un intervalle par une fonction numérique $\varphi(\lambda)$ lorsque les valeurs de $f_n(\lambda)$, admises dans cet intervalle, appartiennent à un même espace X et que

$$|f_n(\lambda)|_X \leqslant \varphi(\lambda).$$

Si une suite de fonctions intégrables $f_n(\lambda)$, bornée dans (a, b) par une fonction numérique intégrable (au sens de Lebesgue), converge vers $f(\lambda)$, la limite $f(\lambda)$ est elle-même intégrable et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

(Il faut remarquer que, si $f_n(\lambda)$ est intégrable et $|f_n(\lambda)|_X \leqslant \varphi(\lambda)$ (φ intégrable), alors l'intégrale $\int_a^b f_n(\lambda)\,d\lambda$ existe suivant la métrique de X).

Le théorème sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes se laisse aussi généraliser aux réunions d'espaces de Banach. Soit $\mathcal{C}[a, b]$ l'espace des fonctions $x = x(\lambda)$ admettant les valeurs d'une réunion $\mathcal{X}$ d'espaces de Banach X et continues sur $[a, b]$. Les valeurs de chacune des fonctions $x(\lambda)$ appartiennent donc à un même espace de Banach. Désignons par C_X le sous-espace de $\mathcal{C}[a, b]$ des fonctions dont les valeurs appartiennent à X. Posons

$$|x|_{C_X} = \max_{a\leqslant\lambda\leqslant b} |x(\lambda)|_X$$

pour la norme dans C_X. Si $X_1 \leqslant X_2$, on a $C_{X_1} \leqslant C_{X_2}$. La famille des espaces C_X est donc semi-ordonnée par rapport à $\leqslant$ et l'espace $\mathcal{C}[a, b]$

est une réunion d'espaces de Banach. Cela étant, le théorème sur l'approximation peut être énoncé comme il suit:

L'espace des polynomes de λ, dont les coefficients sont des éléments de la réunion $\mathcal{X}$, est dense dans $\mathcal{C}[a,b]$.

En effet, soit $x(\lambda)$ une fonction de l'espace $\mathcal{C}[a,b]$. Cette fonction appartient à un des espaces de Banach C_X, il existe donc une suite de polynomes à coefficients de X qui converge vers $x(\lambda)$ dans C_X. Cette suite converge, a plus forte raison, dans $C[a,b]$ vers la même limite, ce qui prouve le théorème.

8. Complétion des réunions d'espaces normés. Tout espace normé X peut être rendu complet, donc un espace de Banach, par l'adjonction des limites de toutes les suites x_n satisfaisant à la condition de Cauchy

$$\lim_{m,n\to\infty}|x_m-x_n|_X = 0. \tag{7}$$

Si ces limites n'existent pas d'avance, on emploie le principe d'abstraction; la limite $\bar{x}$ de la suite x_n (satisfaisant à la condition de Cauchy) est alors la classe des suites y_n telles que

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|_X = 0. \tag{8}$$

Désignons par $\bar{X}$ la complétion de l'espace normé X. Tout élément $\bar{x}$ de $\bar{X}$ est donc la limite d'une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de X. Pour la norme de $\bar{x}$ on prend la limite

$$|\bar{x}|_{\bar{X}} = \lim_{n\to\infty}|x_m|_X.$$

Soient X_1 et X_2 deux espaces normés. Pour que $X_1 \preccurlyeq X_2$ entraîne $\bar{X}_1 \preccurlyeq \bar{X}_2$ il faut et il suffit que toute suite satisfaisant, dans X_1, à la condition de Cauchy et convergente vers 0 dans X_2 soit convergente vers 0 dans X_1, c'est-à-dire que

$$x_n \in X_1,\ x_m - x_n \xrightarrow{mn} 0 \text{ dans } X_1 \text{ et } x_n \xrightarrow{n} 0 \text{ dans } X_2 \text{ entraîne } x_n \xrightarrow{n} 0 \text{ dans } X_1.$$

Soit $\mathcal{X}$ une réunion d'espaces normés X. Il peut arriver que pour tout couple X_1, X_2 de la réunion $\mathcal{X}$ tel que $X_1 \preccurlyeq X_2$ on a $\bar{X}_1 \preccurlyeq \bar{X}_2$. Cela étant, la réunion $\mathcal{X}$ est dite *complétable*. Comme complétion $\bar{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ on prend la réunion des espaces de Banach $\bar{X}$. Comme la norme dans $\mathcal{X}$ n'existe plus, les relations (7) et (8) peuvent être remplacées par

$$\lim_{m,n\to\infty}(x_m-x_n) = 0; \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n-y_n) = 0. \tag{9}$$

La relation (9) signifie alors que tous les éléments x_n appartiennent à un certain espace normé de la réunion considérée et que la limite double (9) existe suivant la norme de cet espace (c'est-à-dire que (7) a lieu). Donc, la complétion d'une réunion (complétable) d'espaces normés est une réunion d'espaces de Banach.

Le principe d'abstraction est très souvent employé dans les mathématiques, afin de créer de nouveaux êtres mathématiques. Il permet, par exemple, d'introduire les nombres rationnels, en partant des nombres entiers, puis les nombres réels etc. La complétion des réunions (complétables) d'espaces normés permet d'introduire aisément les opérateurs de Mikusiński, les distributions de Soboleff-Schwartz et d'autres généralisations des fonctions classiques.

Pour obtenir les opérateurs de Mikusiński, considérons l'espace B des fonctions continues et bornées dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$ avec la norme $\max_t |x(t)|$; cet espace est complet. Étant données deux fonctions continues q et r, q non identiquement nulle et r positive, désignons par B_{qr} l'ensemble des fonctions $x(t)$ continues dans $0 \leqslant t < \infty$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^t q(t-\tau)r(\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

est bornée dans $0 \leqslant t < \infty$. On prend la borne supérieure du module de (10) pour la norme de x dans l'espace B_{qr}. L'espace B_{qr} n'est pas complet. La famille de tous les espaces B_{qr} est semi-ordonnée par rapport à $\preccurlyeq$. En tenant compte du théorème de Titchmarsh sur la convolution, il est facile de vérifier que la réunion des espaces B_{qr} est complétable. La complétion est la réunion des espaces de Banach du paragraphe 5, c'est-à-dire l'espace des opérateurs.

Pour les distributions, considérons les espaces X_{qr} des fonctions X continues dans $(-\infty, \infty)$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) du paragraphe 6. En adoptant les normes (5) les espaces X_{qr} deviennent normés mais pas complets (par contre aux espaces X_{qr} du paragraphe 6). Leur réunion est un espace complétable dont tous les éléments sont des fonctions continues. En complétant cette réunion, on obtient l'espace des distributions.

L'avantage de ces définitions est non seulement celui que les définitions des opérateurs et des distributions deviennent analogues (voir aussi [6]), mais qu'elles conduisent, de plus, univoquement à des notions d'analyse telles que la convergence des opérateurs et des distributions, continuité des fonctions opérationnelles et distributionnelles, dérivée et intégrale de ces fonctions, etc., comme nous l'avons vu au paragraphe 7.

9. Réunions des réunions. Soient (X) et (Y) deux familles d'espaces normés, semi-ordonnés par rapport à $\preccurlyeq$, et soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ leurs réunions.

Nous écrirons $\mathfrak{X} \ll \mathfrak{Y}$, si pour tout $X \epsilon (X)$ il existe un $Y \epsilon (Y)$ tel que $X \ll Y$.

Soit $(\mathfrak{X})$ une famille de réunions $\mathfrak{X}$, semi-ordonnée par rapport à $\ll$. Nous désignerons par $\mathfrak{X}$ la réunion des réunions de la famille $(\mathfrak{X})$. L'espace $\mathfrak{X}$ est la réunion des espaces normés X qui appartiennent à l'un quelconque des réunions $\mathfrak{X} \epsilon (\mathfrak{X})$; il est facile de voir que la famille de tous ces espaces est semi-ordonnée par rapport à $\ll$. En effet, si X_1 et X_2 sont deux telles espaces, ils appartiennent à deux réunions $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ de la famille $(\mathfrak{X})$. Comme $(\mathfrak{X})$ est semi-ordonnée, il existe une réunion $\mathfrak{X}_3$ telle que $\mathfrak{X}_1 \ll \mathfrak{X}_3$ et $\mathfrak{X}_2 \ll \mathfrak{X}_3$. Il s'ensuit qu'il existe deux espaces Y_1 et Y_2 de la réunion $\mathfrak{X}_3$ tels que $X_1 \ll Y_1$ et $X_2 \ll Y_2$. En tenant compte de ce que $\mathfrak{X}_3$ est une réunion d'une famille semi-ordonnée par rapport à $\ll$, on peut trouver un espace Y_3 de la réunion $\mathfrak{X}_3$ tel que $Y_1 \ll Y_3$ et $X_2 \ll Y_3$. En vertu de la transitivité de la relation $\ll$, il s'ensuit que $X_1 \ll Y_3$ et $X_2 \ll Y_3$. Cela prouve que la famille de tous les espaces X appartenant à l'un quelconque des réunions $\mathfrak{X} \epsilon (\mathfrak{X})$ est semi-ordonnée par rapport à $\ll$.

On peut dire, moins précisémment, qu'*une réunion de réunions normées est elle même une réunion d'espaces normés*. Pareillement, *une réunion des réunions d'espaces de Banach est elle même une réunion des espaces de Banach*.

Si $\mathfrak{X}$ est une réunion des réunions complétables X, la complétion de $\mathfrak{X}$ est la réunion des complétions de X. Plus brièvement, *la complétion d'une réunion est la réunion des complétions*.

10. Distributions d'ordre fini. Soit X_q (q entier $\geqslant 0$) l'espace des fonctions x, continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et pourvues de pseudo-normes

$$|x|_k = \min_F \max_{-k \leqslant t \leqslant k} |F(t)| \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

où le minimum se rapporte à toutes les fonctions F dont la q-ième dérivée est x. L'espace X_q est donc pseudo-normé; d'après le paragraphe 4, il peut être considéré comme une réunion d'espaces normés. La complétion $\bar{X}_q$ de l'espace X_q est un espace de Mazur et Orlicz et peut être considéré comme une réunion des espaces de Banach. Les éléments de $\bar{X}_q$ sont dites *distributions d'ordre* q.

On peut vérifier sans peine que $X_q \ll X_{q+1}$ et $\bar{X}_q \ll \bar{X}_{q+1}$, où la relation $\ll$ est entendue au sens défini dans le paragraphe précédent. La réunion $\mathfrak{X}$ des réunions $\bar{X}_q$ $(q = 1, 2, \ldots)$ est encore une réunion des espaces de Banach, mais elle n'est plus l'espace de Mazur et Orlicz (elle n'est pas un espace métrique). Les éléments de $\mathfrak{X}$ sont dits *distributions d'ordre fini*.

Il revient au même de définir l'espace des distributions d'ordre fini comme la complétion de la réunion des réunions d'espaces normés X_q.

Partie II. Quotients des réunions

11. Espaces quotients. Soit $\mathfrak{X}$ un espace linéaire et X et Y ses sous-espaces. À tout élément $x \epsilon X$ faisons correspondre la classe des éléments $x-y$, où $y \epsilon Y$. Cette classe soit désignée par x/Y. On a évidemment $(x-y)/Y = x/Y$ pour tout $y \epsilon Y$, donc la représentation de la classe dans la forme x/Y n'est pas unique. L'ensemble de toutes les classes x/Y, où $x \epsilon X$, sera dit le *quotient* de X par Y et désigné par X/Y.

Exemple 1. Soient: $\mathfrak{X}$ — l'espace des fonctions continues dans $(-\infty, \infty)$; X — le sous-espace de $\mathfrak{X}$ des fonctions bornées dans $(-\infty, \infty)$; Y — le sous-espace de $\mathfrak{X}$ des fonctions nulles dans $[0, \infty)$.

Les éléments du quotient X/Y sont alors les classes des fonctions continues dans $(-\infty, \infty)$ et bornées dans $[0, \infty)$, telles que les valeurs des fonctions appartenant à la même classe coïncident dans $[0, \infty)$. Le quotient X/Y est évidemment un espace linéaire isomorphe à l'espace $B[0, \infty)$ des fonctions définies dans l'intervalle $[0, \infty)$, continues et bornées.

Exemple 2. Soit X l'espace des fonctions n fois dérivables et Y l'espace des polynomes de degré $< k$, k étant un entier fixé. Alors les éléments du quotient X/Y sont les classes des fonctions dont les k-ièmes dérivées coïncident.

Dans l'espace quotient X/Y on peut définir l'addition et la multiplication scalaire, en posant

$$x_1/Y + x_2/Y = (x_1+x_2)/Y, \quad \alpha(x/Y) = (\alpha x)/Y.$$

Il est facile de vérifier que ces opérations sont définies univoquement et ne dépendent pas de la représentation des éléments de X/Y dans la forme x/Y. Les deux égalités précédentes prouvent que le quotient X/Y est toujours un espace linéaire.

L'espace quotient X/Y est isomorphe à l'espace X/XY, où XY est l'intersection des espaces X et Y. Cet isomorphisme est défini par la correspondence

$$x/Y \sim x/XY.$$

Supposons maintenant que l'espace X soit muni d'une convergence telle que

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n, \tag{11}$$

$$\lim(\alpha x_n) = \alpha \lim x_n. \tag{12}$$

Cela étant, on dira qu'une suite

$$x_1/Y, x_2/Y, \ldots \tag{13}$$

d'éléments de X/Y *converge* dans X/Y vers la limite x/Y, lorsqu'il existe une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments de XY telle que $x_n - y_n$ converge dans X vers la limite x. Il est bien évident que la convergence dans X/Y satisfait aussi aux conditions (11) et (12).

La convergence de $x_1, x_2, \ldots$ dans X vers x entraîne la convergence de (13) dans X/Y vers x/Y, car on peut poser $y_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Les quotients X/Y, où X est muni d'une convergence, seront toujours considérés comme des espaces avec la convergence définie ci-dessus.

12. Quotients d'espaces normés. En gardant les hypothèses et la notation précédentes, on a la proposition suivante:

Si l'espace X est normé et l'intersection XY est fermée dans X, le quotient X/Y peut être normé en posant

$$|x/Y|_{X/Y} = \min_{y \in XY} |x-y|_X \quad (x \in X). \tag{14}$$

En effet, il est facile de vérifier que cette expression est une norme. Il reste donc à démontrer que la convergence d'après cette norme est équivalente à la convergence définie au paragraphe précédent. Si x_n/Y converge vers x/Y d'après la norme, on a

$$|(x_n - x)/Y|_{X/Y} \to 0, \tag{15}$$

c'est-à-dire

$$\min_{y \in XY} |x_n - x - y|_X \to 0. \tag{16}$$

Soit y_n l'élément de Y pour lequel $|x_n - x - y|_X$ atteint son minimum. Alors

$$|x_n - x - y_n|_X \to 0, \tag{17}$$

c'est-à-dire

$$x_n - y_n \to x \quad \text{dans } X. \tag{18}$$

Réciproquement, si l'on admet (18), on en déduit aussitôt (17), (16) et (13).

La norme dans les espaces X/Y et X/XY est par définition la même pour les éléments correspondants. En symbole

$$|x/Y|_{X/Y} = |x/XY|_{X/XY}. \tag{19}$$

Donc les espaces X/Y et X/XY sont isométriques.

Dans l'exemple 1, l'intersection XY est l'ensemble des fonctions continues, bornées dans $(-\infty, \infty)$ et nulles dans $[0, \infty)$. Le quotient X/XY est l'espace des classes des fonctions continues et bornées dans $(-\infty, \infty)$, telles que les valeurs des fonctions appartenant à la même classe coïncident dans $[0, \infty)$. Le quotient X/XY est isomorphe avec l'espace $B[0, \infty)$, donc isomorphe avec X/Y.

La norme dans l'espace X/Y et dans X/XY est la norme de l'élément correspondant dans $B[0, \infty)$ (supremum du module). Tous ces espaces sont des espaces de Banach.

Désignons par $\overline{X}$ la complétion de X et par $\overline{Y}$ la fermeture de XY dans $\overline{X}$. On a $XY = X\overline{Y}$, ce qui entraîne

$$|x/Y|_{X/Y} = |x/\overline{Y}|_{X/\overline{Y}}, \tag{20}$$

en vertu de (19). Les espaces X/Y et $X/\overline{Y}$ sont donc isométriques.

L'espace $X\overline{Y}$ est dense dans $\overline{X}\overline{Y}$, ce qui entraîne

$$\min_{y \in X\overline{Y}} |x-y|_X = \min_{y \in X\overline{Y}} |x-y|_{\overline{X}} = \min_{y \in \overline{X}\overline{Y}} |x-y|_{\overline{X}} \quad \text{pour} \quad x \in X,$$

c'est-à-dire

$$|x/\overline{Y}|_{X/\overline{Y}} = |x/\overline{Y}|_{\overline{X}/\overline{Y}} \quad \text{pour} \quad x \in X. \tag{21}$$

L'espace $X/\overline{Y}$ est un sous-espace de $\overline{X}/\overline{Y}$. De plus, $X/\overline{Y}$ est dense dans $\overline{X}/\overline{Y}$; en effet, si $\overline{x}/\overline{Y}$ est un élément de $\overline{X}/\overline{Y}$, il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de X telle que $x_n \to \overline{x}$ dans $\overline{X}$, ce qui entraîne $x_n/\overline{Y} \to \overline{x}/\overline{Y}$ dans $\overline{X}/\overline{Y}$. En vertu de (21), la complétion de $X/\overline{Y}$ est un espace isométrique avec $\overline{X}/\overline{Y}$. Comme les espaces X/Y et $X/\overline{Y}$ sont isométriques, il s'ensuit la proposition suivante:

La complétion de X/Y est isométrique avec $\overline{X}/\overline{Y}$.

En particulier, lorsque X est un espace de Banach, on a $\overline{X} = X$ et $\overline{Y} = Y$; la complétion de X/Y est alors isométrique avec X/Y. Le quotient X/Y est donc un espace de Banach. Ce corollaire peut être formulé comme la proposition suivante:

Si X est un espace de Banach et l'intersection XY est fermée dans X, le quotient X/Y est encore un espace de Banach, avec la norme (14).

13. Quotients de réunions. Les résultats qui viennent d'être présentés s'étendent sans peine aux réunions d'espaces normés.

Soit $\mathfrak{X}$ la réunion d'une famille (X) d'espaces normés X, et Y un sous-espace fermé de $\mathfrak{X}$. Alors l'intersection XY est fermée dans X, quel que soit X de la famille considérée. Soit $y_1, y_2, \ldots$ une suite d'éléments de XY qui converge dans X vers la limite x; x est donc un élément de X. D'autre part, la convergence dans X entraîne la convergence de la suite dans $\mathfrak{X}$ vers la même limite. Comme l'espace Y est fermé dans $\mathfrak{X}$, il s'ensuit que $x \in Y$. Donc $x \in XY$, ce qui prouve que l'intersection XY est fermée dans X. Par conséquent les quotients, où $X \in (X)$, sont des espaces normés.

Le quotient $\mathfrak{X}/Y$ est la réunion des espaces normés X/Y. De plus, il est facile de vérifier que la convergence dans cette réunion coïncide avec la convergence définie à la fin du paragraphe 11.

La complétion de $\mathfrak{X}/Y$ et le quotient $\overline{\mathfrak{X}}/\overline{Y}$ sont des espaces isométriques, c'est-à-dire il existe une correspondence biunivoque entre les espaces normés relatifs aux réunions $\mathfrak{X}/Y$ et $\overline{\mathfrak{X}}/\overline{Y}$, et ces espaces normés sont respectivement isométriques.

Cette proposition est un corollaire immédiat d'une proposition analogue pour les espaces normés. Évidemment, la proposition suivante est aussi vrai:

Si $\mathfrak{X}$ est la réunion d'une famille (X) des espaces de Banach X, et Y est un sous-espace fermé de $\mathfrak{X}$, le quotient $\mathfrak{X}/Y$ est la réunion des espaces de Banach X/Y.

14. Distributions d'ordre fini. L'espace $C(-\infty, \infty)$ avec la convergence presque uniforme est une réunion des espaces de Banach. L'espace P_q (q entier $\geqslant 0$) des polynomes de degré $< q$ est un sous-espace fermé de $C(-\infty, \infty)$. Il s'ensuit que le quotient $C_q = C(-\infty, \infty)/P_q$ est une réunion des espaces de Banach. Les éléments de C_q sont des classes de fonctions continues qui diffèrent l'une de l'autre d'un polynome de degré $< q$.

Soit q fixé. À toute fonction x de $C(-\infty, \infty)$ faisons correspondre la classe des fonctions primitives de x d'ordre q. Cette classe est un élément de C_q. L'ensemble $C(-\infty, \infty)$ est ainsi appliqué à une partie X_q de C_q et il est un espace isomorphe avec X_q. Identifions les éléments x de $C(-\infty, \infty)$ avec les éléments correspondant de C_q. Alors les espaces $C(-\infty, \infty)$ et C_q ont les mêmes éléments, qui peuvent être considérés comme fonctions continues dans $(-\infty, \infty)$; de plus, tous les deux espaces sont des réunions d'espaces normés. Or, l'espace $C(-\infty, \infty)$ est complet et l'espace X_q ne l'est pas. La convergence dans $C(-\infty, \infty)$ est la convergence presque uniforme, tandis que la convergence dans X_q est, pour ainsi dire, la convergence presque uniforme des q-ièmes primitives. La complétion de X_q est l'espace des distributions d'ordre q. Cet espace est isomorphe avec C_q.

L'espace des distributions d'ordre fini est la réunion des complétions des espaces X_q ($q = 0, 1, \ldots$). Il revient au même de former tout d'abord la réunion des espaces X_q ($q = 0, 1, \ldots$) et de la compléter ensuite.

Remarquons que tous les espaces X_q ont exactement les mêmes éléments (fonctions continues) et que $X_q \preccurlyeq X_{q+1}$. La convergence dans X_{q+1} est plus générale que la convergence dans X_q.

La méthode précédente ne conduit qu'aux distributions d'ordre fini. On peut passer de ces distributions d'ordre fini aux distributions d'ordre infini par un procédé qui s'appuie sur une proposition sur le quotient des normes. Cette proposition sera démontrée dans le paragraphe suivant.

15. Une proposition sur le quotient des normes. Si X_1 est un sous-espace de X_2, le quotient X_1/Y est un sous-espace de X_2/Y. Nous allons démontrer la proposition suivante:

Si

$$\frac{|x|_{X_2}}{|x|_{X_1}} \leqslant M \quad \textit{pour} \quad x \in X_1,\ x \neq 0, \tag{22}$$

alors

$$\frac{|x|_{X_2/Y}}{|x|_{X_1/Y}} \leqslant M \quad \textit{pour} \quad x \in X_1/Y,\ x \neq 0. \tag{23}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in X_1/Y$, $x_0 \neq 0$. On peut écrire $x_0 = x/Y$, où $x \in X_1$, $x \neq 0$. Il existe une suite y_n d'éléments de $X_1 Y$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} |x - y_n|_{X_1} = \inf_{y \in X_1 Y} |x - y|_{X_1}.$$

On a, en vertu de (22),

$$M \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|x-y_n|_{X_2}}{|x-y_n|_{X_1}} = \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} |x-y_n|_{X_2}}{\lim\limits_{n\to\infty} |x-y_n|_{X_1}} \geqslant \frac{\inf\limits_{y \in Y_2} |x-y|_{X_2}}{\inf\limits_{y \in Y_1} |x-y|_{X_1}},$$

ce qui prouve (23).

Corollaire. *$X_1 \preccurlyeq X_2$ entraîne $X_1/Y \preccurlyeq X_2/Y$.*

16. Convergence d'après les quotients. Soit $\mathfrak{X}$ une réunion d'espaces normés X et soit Y_k ($k = 1, 2, \ldots$) une suite de sous-espaces de X telle que Y_{k+1} est un sous-espace de Y_k. La suite Y_k est donc descendente. Pour éviter les malentendus, disons explicitement que les Y_k ne sont pas nécessairement des espaces de la famille (X), mais des sous-espaces quelconques de $\mathfrak{X}$; on ne suppose même pas que les Y_k soient normés. Nous supposons cependant que l'intersection de tous les espaces Y_k est 0. Il s'ensuit que $x/Y_k = 0$ ($x \in \mathfrak{X}$, $k = 1, 2, \ldots$) entraîne $x = 0$. En effet, l'égalité n'est qu'un abrégé de l'égalité $x/Y_k = 0/Y_k$, qui dit que la classe des éléments $x - y$ ($y \in Y_k$) coïncide avec la classe $0 - y$ ($y \in Y_k$), d'où $x \in Y_k$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Nous dirons qu'une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$ *converge d'après les quotients $\mathfrak{X}/Y_k$ vers x*, si, quel que soit k fixé, la suite x_n/Y_k ($n = 1, 2, \ldots$) converge dans $\mathfrak{X}/Y_k$ vers x/Y_k, c'est-à-dire que tous les éléments x_n/Y_k appartiennent à l'un des espaces X/Y_k et convergent d'après la norme de cet espace vers x/Y_k. La limite x est unique. En effet, s'il y avait deux limites x' et x'', on aurait $x_n/Y_k \overset{n}{\to} x'/Y_k$ et $x_n/Y_k \overset{n}{\to} x''/Y_k$, d'où $(x_n - x_n)/Y_k \overset{n}{\to} (x' - x'')/Y_k$, $(x' - x'')/Y_k = 0$ et enfin $x' - x'' = 0$.

La limite suivant les quotients est plus générale que la limite dans $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire, si une suite converge dans $\mathfrak{X}$, elle converge d'après les quotients vers la même limite.

Il se peut cependant qu'une suite converge d'après les quotients sans qu'elle converge dans $\mathfrak{X}$.

Exemple. L'espace $B(-\infty, \infty)$ des fonctions continues et bornées dans $(-\infty, \infty)$ avec le supremum du module comme norme est un espace normé et peut être considéré comme une réunion des espaces normés. (La famille (X) se réduit alors à un seul espace normé). Soit Y_k $(k=1,2,\ldots)$ le sous-espace de $B(-\infty,\infty)$ des fonctions nulles sur $[-k,k]$. La suite $Y_1, Y_2, \ldots$ est évidemment descendante et l'intersection de tous les espaces Y_k ne contient que la fonction identiquement nulle dans $(-\infty,\infty)$. On voit sans peine que la convergence suivant les quotients $B(-\infty,\infty)/Y_k$ coïncide avec la convergence presque uniforme, elle est donc plus générale que la convergence uniforme, induite par la norme dans $B(-\infty,\infty)$.

Nous allons démontrer qu'*il existe une famille* (Z) *d'espaces normés* Z, *semi-ordonnée par rapport à la relation* $\leqslant$, *telle que la réunion* $\mathfrak{Z}$ *contient exactement les mêmes éléments que* $\mathfrak{X}$ *et que la convergence dans* $\mathfrak{Z}$ *est équivalente à la convergence suivant les quotients* $\mathfrak{X}/Y_k$.

En effet, considérons les suites

$$Q = (X_1, X_2, \ldots)$$

d'espaces $X_k \in (X)$ et les suites

$$R = (r_1, r_2, \ldots)$$

de nombres positifs r_k. À tout couple de suites Q, R faisons correspondre l'ensemble Z_{QR} des éléments de $\mathfrak{X}$ jouissant des deux propriétés suivantes:

1° $x/Y_k \in X_k/Y_k$ $(k=1,2,\ldots)$;

2° la suite

$$\frac{1}{r_k}|x/Y_k|_{X_k/Y_k} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

est bornée.

On peut vérifier sans peine que

$$|x|_{Z_{QR}} = \sup_k \frac{1}{r_k}|x/Y_k|_{X_k/Y_k} \tag{24}$$

est une norme dans l'espace Z_{QR}.

La famille (Z) des espaces Z_{QR} est semi-ordonnée par rapport à $\leqslant$. En effet, soient $Z_{Q_1R_1}$ et $Z_{Q_2R_2}$ deux espaces quelconques de cette famille.

Comme la famille (X) est semi-ordonnée par rapport à $\leqslant$, il existe une suite Q_3 telle que

$$X_{1k} \leqslant X_{3k} \quad \text{et} \quad X_{2k} \leqslant X_{3k} \quad (k=1,2,\ldots),$$

où généralement X_{jk} $(j=1,2,3)$ sont des éléments de la suite

$$Q_j = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots).$$

Par conséquent on a

$$\frac{X_{1k}}{Y_k} \leqslant \frac{X_{3k}}{Y_k} \quad \text{et} \quad \frac{X_{2k}}{Y_k} \leqslant \frac{X_{3k}}{Y_k} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Cela veut dire que

$$\frac{X_{1k}}{Y_k} \subset \frac{X_{3k}}{Y_k} \quad \text{et} \quad \frac{X_{2k}}{Y_k} \subset \frac{X_{3k}}{Y_k} \quad (k=1,2,\ldots)$$

et qu'il existe deux suites de nombres positifs

$$M_{11}, M_{12}, \ldots, \qquad M_{21}, M_{22}, \ldots$$

telles que

$$\frac{|y|_{X_{3k}/Y_k}}{|y|_{X_{1k}/Y_k}} \leqslant M_{1k} \quad \text{pour} \quad y \in X_{1k}/Y_k,$$

$$\frac{|y|_{X_{3k}/Y_k}}{|y|_{X_{2k}/Y_k}} \leqslant M_{2k} \quad \text{pour} \quad y \in X_{2k}/Y_k.$$

Posons

$$r_{3k} = \max(r_{1k}M_{1k}, r_{2k}M_{2k}),$$

où r_{1k} et r_{2k} désignent les éléments des suites R_1 et R_2 respectivement. Alors

$$\frac{\dfrac{1}{r_{3k}}|x/Y_k|_{X_{3k}/Y_k}}{\dfrac{1}{r_{1k}}|x/Y_k|_{X_{1k}/Y_k}} \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in X_{1k},$$

d'où

$$|x|_{Z_{Q_3R_3}}/|x|_{Z_{Q_1R_1}} \leqslant 1;$$

pareillement on a

$$|x|_{Z_{Q_3R_3}}/|x|_{Z_{Q_2R_2}} \leqslant 1.$$

Nous avons ainsi démontré que $\mathfrak{Z}$ est une réunion d'espaces normés. Il reste à démontrer que la convergence ordinaire dans $\mathfrak{Z}$ est équivalente à la convergence d'après les quotients $\mathfrak{X}/Y$.

Supposons d'abord qu'une suite x_n converge ordinairement dans $\mathcal{Z}$ vers la limite x. Alors tous les éléments de la suite x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à un ensemble Z_{QR} et l'on a

$$|x_n - x|_{Z_{QR}} \to 0.$$

En tenant compte de 1° et (24), on trouve que

$$x_n/Y_k \in X_k/Y_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

et

$$|x_n/Y_k - x/Y_k|_{X_k/Y_k} \overset{n}{\to} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{26}$$

ce qui prouve que x_n converge suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$.

Supposons maintenant que x_n converge d'après les quotients $\mathcal{X}/Y_k$ vers x. Pour tout $k = 1, 2, \ldots$, il existe alors un ensemble X_k tel que (25) et (26). Posons

$$r_k = k \max_n |x_n/Y_k - x/Y_k|_{X_k/Y_k} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

les nombres r_k sont non-négatifs et finis, en vertu de (26). Alors

$$\sup_k \frac{1}{r_k} |x_n/Y_k - x/Y_k|_{X_k/Y_k} \overset{n}{\to} 0,$$

ce qui prouve que la suite x_n converge suivant la norme (24) dans l'espace Z_{QR}. Par conséquent, x_n converge ordinairement dans $\mathcal{Z}$.

La proposition est ainsi démontrée entièrement.

L'espace $\mathcal{Z}$ obtenu par la construction précédente sera désigné dans la suite par $\mathcal{X}(Y_k)$.

Exemple. Soit $B(-\infty, \infty)$ l'espace des fonctions continues et bornées dans $(-\infty, \infty)$ avec la convergence uniforme. Cet espace est un espace de Banach. Soit Y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ le sous-espace des fonctions nulles dans l'intervalle $[-k, k]$. La convergence suivant les quotients $B(-\infty, \infty)/Y_k$ est alors la convergence presque uniforme. L'espace des fonctions continues et bornées dans $(-\infty, \infty)$, muni de cette convergence, n'est plus complet. L'ensemble $\mathcal{Z} = B(-\infty, \infty)(Y_k)$ est une réunion d'espaces normés. La complétion de $\mathcal{Z}$ est l'espace $C(-\infty, \infty)$ de toutes les fonctions continues dans $(-\infty, \infty)$ avec la convergence presque uniforme.

17. Itération de la convergence suivant les quotients. Soit, comme précédemment, $\mathcal{X}$ une réunion d'espaces normés X et Y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite descendente de sous-espaces fermés de $\mathcal{X}$, ayant le seul élément commun 0.

Nous démontrerons que *les ensembles* Y_k *sont fermés par rapport à la convergence suivant les quotients* $\mathcal{X}/Y_k$. En effet, supposons qu'une suite d'éléments x_n appartenant à un ensemble quelconque Y_k converge vers $x \in \mathcal{X}$ suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$. Alors les éléments x_n/Y_k appartiennent à un espace X/Y_k et y convergent vers x/Y_k. Il existe donc une suite d'éléments $y_n \in XY_k$ telle que $x_n - y_n$ converge vers x dans X. Comme $x_n - y_n \in Y_k$ et Y_k est fermé dans $\mathcal{X}$, il s'ensuit que la limite x appartient encore à Y_k. L'ensemble Y_k est donc fermé par rapport à la convergence suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$.

La convergence suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$ équivaut à la convergence dans la réunion $\mathcal{X}(Y_k)$, définie au paragraphe précédent. On peut considérer, à son tour, la convergence suivant les quotients $\mathcal{X}(Y_k)/Y_k$. Nous allons démontrer que *la convergence suivant les quotients* $\mathcal{X}(Y_k)/Y_k$ *est équivalente à la convergence suivant les quotients* $\mathcal{X}/Y_k$. En symbole

$$\mathcal{X}(Y_k)(Y_k^{\mathfrak{x}}) = \mathcal{X}(Y_k).$$

En effet, la convergence dans $\mathcal{Z} = \mathcal{X}(Y_k)$ entraîne la convergence vers la même limite suivant les quotients $\mathcal{Z}/Y_k$. Il suffit donc de démontrer, réciproquement, que si une suite x_n converge vers x suivant les quotients $\mathcal{Z}/Y_k$, elle converge vers x suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$. La convergence suivant les quotients $\mathcal{Z}/Y_k$ signifie que x_n/Y_k converge pour $n \to \infty$ vers x/Y_k dans l'espace $\mathcal{Z}/Y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Pour tout k, il existe un espace Z_{QR} et une suite y_n d'éléments de Y_k telle que $x_n - y_n - x \in Z_{QR}$ et

$$|x_n - y_n - x|_{Z_{QR}} \overset{n}{\to} 0.$$

Le choix de l'espace Z_{QR} et de la suite y_n dépend de k, mais nous pouvons supposer k fixe, pour un moment, afin de ne pas multiplier les indices. On a d'après (15)

$$|x_n - y_n - x|_{Z_{QR}} = \sup_\varkappa \frac{1}{r_\varkappa} |(x_n - y_n - x)/Y_\varkappa|_{X_\varkappa/Y_\varkappa}$$
$$\geqslant \frac{1}{r_k} |(x_n - y_n - x)/Y_k|_{X_k/Y_k}.$$

Comme $y_n \in Y_k$, on a $(x_n - y_n - x)/Y_k = (x_n - x)/Y_k$, donc les deux dernières formules entraînent

$$|(x_n - x)/Y_k|_{X_k/Y_k} \overset{n}{\to} 0.$$

Cela prouve que x_n/Y_k converge vers x/Y_k dans $\mathcal{X}/Y_k$.

Or, k peut être arbitraire, donc x_n converge vers x suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$. L'équivalence des deux convergences, d'après $\mathcal{Z}/Y_k$ et d'après $\mathcal{X}/Y_k$, est ainsi démontrée.

18. Complétion suivant les quotients. Nous dirons qu'un sous-espace Y de la réunion $\mathcal{X}$ d'espaces normés X est *restrictif*, lorsqu'on peut faire correspondre à tout élément $x \in \mathcal{X}$ un élément $y(x) \in Y$ de manière que:

1° $x \in X$ entraîne $y(x) \in X$ et

$$|x-y(x)|_X = \min_{y \in XY} |x-y|_X,$$

2° $y(x_1+x_2) = y(x_1)+y(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

Il est facile de vérifier que les espaces Y_k considérés dans l'exemple du paragraphe 16 sont restrictifs.

Lorsque $\mathcal{X}$ est une réunion complétable d'espaces normés X et que $Y_1, Y_2, \ldots$ est une suite descendente de sous-espaces de $\mathcal{X}$, fermés et restrictifs, la réunion $\mathcal{X}(Y_k)$ est encore complétable.

D é m o n s t r a t i o n. Une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{X}(Y_k)$ satisfait à la condition de Cauchy par rapport à la convergence considérée dans cet espace, lorsque tous les éléments de cette suite appartiennent à un même espace normé Z_{QR} et que

$$|x_m-x_n|_{Z_{QR}} \xrightarrow{mn} 0,$$

c'est-à-dire

$$\max_k \frac{1}{r_k} |(x_m-x_n)/Y_k|_{X_k/Y_k} \xrightarrow{mn} 0. \tag{26}$$

La relation (26) entraîne que, pour tout Y_k, il existe un espace X_k de la réunion $\mathcal{X}$ tel que $x_n/Y_n \in X_k/Y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et que

$$(x_m-x_n)/Y_k \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad X_k/Y_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

La dernière relation peut s'écrire

$$\min_{y \in X_k Y_k} |x_m-x_n-y|_{X_k} \xrightarrow{mn} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

ou bien, en tenant compte de ce que tous les espaces Y_k sont restrictifs,

$$|x_m-x_n-y_k(x_m)+y_k(x_n)|_{X_k} \xrightarrow{mn} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Soit $Z_{Q'R'}$ un espace de la réunion $\mathcal{X}(Y_k)$ tel que $Z_{QR} \leqslant Z_{Q'R'}$. Si $x_n \to 0$ dans $Z_{Q'R'}$, il existe une suite $X_1', X_2', \ldots$ d'espaces de $\mathcal{X}$, $x_n/Y_k \in X_k'/Y_k$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ et

$$x_n/Y_k \xrightarrow{n} 0 \quad \text{dans} \quad X_k'/Y_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $X_k \leqslant X_k'$.

D'après la dernière relation on a

$$\min_{y \in X_k Y_k} |x_n-y|_{X_k} \xrightarrow{n} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

ou bien, en tenant compte de ce que les espaces Y_k sont restrictifs,

$$|x_n-y_k(x_n)|_{X_k'} \xrightarrow{n} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{28}$$

Les relations (27) et (28) entraînent

$$|x_n-y_k(x_n)|_{X_k} \xrightarrow{n} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

car la réunion $\mathcal{X}$ est supposée complétable. En d'autres termes

$$x_n/Y_k \xrightarrow{n} 0 \quad \text{dans} \quad X_k/Y_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

En vertu de (26) il existe, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que

$$\frac{1}{r_k} |(x_m-x_n)/Y_k|_{X_k/Y_k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad m, n > n_0. \tag{30}$$

D'autre part, il existe, en vertu de (29), une sous-suite $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ $(m_k > n_0)$ telle que

$$\frac{1}{r_k} |x_{m_k}/Y_k|_{X_k/Y_k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Les inégalités (30) et (31) entraînent, pour $n > n_0$,

$$\frac{1}{r_k} |x_n/Y_k|_{X_k/Y_k} \leqslant \frac{1}{r_k} |(x_{m_k}-x_n)/Y_k|_{X_k/Y_k} + \frac{1}{r_k} |x_{m_k}/Y_k|_{X_k/Y_k} < \varepsilon.$$

On a donc

$$|x_n|_{Z_{QR}} \to 0,$$

ce qui prouve la proposition.

Nous supposerons dans la suite de ce paragraphe que $\mathcal{X}$ est une réunion complétable. La réunion $\mathcal{X}$ est donc isométrique avec un sous-espace de la réunion $\overline{\mathcal{X}}$ d'espaces de Banach. Si l'espace $\overline{\mathcal{X}}$ n'est pas donnée d'avance, on peut le construire d'après le principe d'abstraction. Il est naturel d'identifier $\mathcal{X}$ avec le sous-espace correspondant de sa complétion, et on procède pareillement d'habitude. Cela étant, on peut dire simplement que $\mathcal{X}$ est un sous-espace de $\overline{\mathcal{X}}$. Plus généralement, si deux espaces $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont isométriques, nous écrirons $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$. Si $\mathcal{X}_1$ est isométrique avec un sous-espace de $\mathcal{X}_2$, nous dirons que X_1 est un sous-espace de $\mathcal{X}_2$.

Désignons par $\overline{\mathcal{X}}$ la complétion de l'espace $\mathcal{X}$ et par $\overline{\mathcal{X}(Y_k)}$ la complétion de $\mathcal{X}(Y_k)$. Les deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}(Y_k)$ ont les mêmes éléments, mais la convergence dans $\mathcal{X}(Y_k)$ est plus générale que celle dans $\mathcal{X}$. Il s'ensuit que la complétion $\overline{\mathcal{X}}$ est un sous-espace de $\overline{\mathcal{X}(Y_k)}$. Pour éviter les difficultés graphiques dans les formules plus compliquées, nous remplacerons souvent le symbole $\overline{\mathcal{X}(Y_k)}$ par $\mathcal{X}[Y_k]$.

Désignons par $\overline{Y}_k$ la fermeture de Y_k par rapport à la complétion $\overline{\mathcal{X}}$. La question s'impose, quel est le rapport entre les espaces $\mathcal{X}[Y_k]$ et $\overline{\mathcal{X}}[\overline{Y}_k]$. Afin que cette question ait un sens, il faut que l'intersection des espaces $\overline{Y}_k$ soit 0.

LEMME. *Si $Y_1, Y_2, \ldots$ est une suite descendante vers 0 de sous-espaces fermés de $\mathcal{X}$, la suite $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots$ des fermetures par rapport à la complétion $\overline{\mathcal{X}}$ est encore descendante vers 0.*

Démonstration. Si $x \in \overline{Y}_k$ $(k=1,2,\ldots)$, il existe des suites

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots$$

telles que

(32) $$x_{kn} \in Y_k,$$

(33) $$x_{kn} \xrightarrow{n} x \quad \text{dans} \quad \overline{\mathcal{X}},$$

(34) $$x_{1n} - x_{kn} \xrightarrow{n} 0 \quad \text{dans} \quad \underline{\mathcal{X}}.$$

En vertu de (34), il existe une suite d'espaces normés de la réunion $\mathcal{X}$

$$X_1, X_2, \ldots$$

telle que

$$(x_{1n}-x_{kn})/Y_k \in X_k/Y_k,$$

$$(x_{1n}-x_{kn})/Y_k \xrightarrow{n} 0 \quad \text{dans} \quad X_k/Y_k,$$

pour $k=1,2,\ldots$ Or, en vertu de (32), on a $x_{kn}/Y_k = 0$, ce qui entraîne

$$x_{1n}/Y_k \in X_k/Y_k,$$

$$x_{1n}/Y_k \xrightarrow{n} 0 \quad \text{dans} \quad X_k/Y_k,$$

pour $k=1,2,\ldots$ D'autre part, en vertu de (33), on a $x_{1n} \xrightarrow{n} x$, d'où l'égalité $x=0$. Donc 0 est le seul élément commun aux ensembles $\overline{Y}_k$.

Grâce au lemme ci-dessus, on peut considérer la convergence d'après les quotients $\overline{\mathcal{X}}/\overline{Y}_k$; la réunion $\overline{\mathcal{X}}(\overline{Y}_k)$ ainsi que sa complétion $\overline{\mathcal{X}}/\overline{Y}_k$ sont alors bien déterminés. Cela étant nous démontrerons que

(35) $$\mathcal{X}[Y_k] = \overline{\mathcal{X}}[\overline{Y}_k].$$

Cette égalité dit qu'il revient au même de compléter un espace $\mathcal{X}$

suivant les quotients $\mathcal{X}/Y_k$ ou bien de le compléter tout d'abord suivant la convergence relative à $\mathcal{X}$ et de compléter ensuite la complétion obtenue $\overline{\mathcal{X}}$ suivant les quotients $\overline{\mathcal{X}}/\overline{Y}_k$.

La démonstration de l'égalité (35) sera appuyée sur l'égalité

(36) $$(X/Y')/(Y''/Y') = X/Y'' \quad \text{pour} \quad Y' \subset Y''$$

(qui rappelle la règle de division des fractions ordinaires).

L'élément x/Y' est la classe des différences $x-y'$, où $y' \in Y'$, et $y'' \in Y'$ est l'ensemble des différences $y''-y'$, où $y' \in Y'$. L'élément $(x/Y')/(Y''/Y')$ est la classe des différences $(x-y')-(y''-y''')$, où $y', y''' \in Y'$ et $y'' \in Y''$. Si $Y' \subset Y''$, cette classe est exactement la classe des différences $x-y$, où $y \in Y''$. Ceci prouve (36).

Pour démontrer (35), supposons qu'une suite $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ d'éléments de $\overline{\mathcal{X}}$ converge suivant les quotients $\overline{\mathcal{X}}/\overline{Y}_k$ vers un élément $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}[\overline{Y}_k]$. Cette suite satisfait à la condition de Cauchy

$$\bar{x}_m - \bar{x}_n \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad \overline{\mathcal{X}}(\overline{Y}_k).$$

Il existe donc une suite d'espaces de Banach $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots$ de la réunion $\overline{\mathcal{X}}$ telle que

$$(\bar{x}_m - \bar{x}_n)/\overline{Y}_k \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad \overline{X}_k/\overline{Y}_k \quad (k=1,2,\ldots).$$

Les quotients $\overline{X}_k/\overline{Y}_k$ sont encore des espaces de Banach, il existe donc des limites

(37) $$\lim_n \bar{x}_n/\overline{Y}_k = \bar{y}_k/\overline{Y}_k \quad \text{dans} \quad \overline{X}_k/\overline{Y}_k \quad (k=1,2,\ldots),$$

où $\bar{y}_k \in \overline{X}_k$. Nous démontrerons que

(38) $$\bar{y}_m/\overline{Y}_k = \bar{y}_k/\overline{Y}_k \quad \text{pour} \quad m \geqslant k.$$

En effet, soit $\overline{X}_{km}$ un espace de Banach tel que

$$\overline{X}_k \preccurlyeq \overline{X}_{km} \quad \text{et} \quad \overline{X}_m \preccurlyeq \overline{X}_{km}.$$

En vertu de (37) on a

(39) $$\bar{x}_n/\overline{Y}_k \xrightarrow{n} \bar{y}_k/\overline{Y}_k \quad \text{dans} \quad \overline{X}_{km}/Y_k, \qquad \bar{x}_n/\overline{Y}_m \xrightarrow{n} \bar{y}_m/\overline{Y}_m \quad \text{dans} \quad \overline{X}_{km}/Y_m.$$

On tire de la dernière relation

$$(\bar{x}_n/\overline{Y}_m)/(\overline{Y}_k/\overline{Y}_m) \xrightarrow{n} (\bar{y}_m/\overline{Y}_m)/(\overline{Y}_k/\overline{Y}_m) \quad \text{dans} \quad (\overline{X}_{km}/\overline{Y}_m)/(\overline{Y}_k/\overline{Y}_m),$$

c'est-à-dire, en vertu de (36),

(40) $$\bar{x}_n/\overline{Y}_k \xrightarrow{n} \bar{y}_m/\overline{Y}_k \quad \text{dans} \quad \overline{X}_{km}/\overline{Y}_k.$$

Les relations (39) et (40) entraînent (38).

En vertu de (38) on a

$$\bar{y}_n/\bar{Y}_k \xrightarrow{n} \bar{y}_k/\bar{Y}_k \quad \text{dans} \quad \bar{X}_k/\bar{Y}_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{41}$$

Les relations (37) et (41) prouvent que les deux suites $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ et $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ convergent suivant les quotients $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}_k$ vers la même limite $\bar{x}$. La dernière suite jouit, de plus, de la propriété (38).

En vertu de (38), on a en particulier $(\bar{y}_{k+1}-\bar{y}_k)/\bar{Y}_k = 0$, c'est-à-dire $\bar{x}_{k+1}-\bar{x}_k \epsilon \bar{Y}_k$. Il existe donc des suites

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

telles que

$$x_{kn} \epsilon Y_k, \quad x_{1n} \xrightarrow{n} y_1 \quad \text{dans} \quad \bar{\mathfrak{X}}, \tag{42}$$

$$x_{k+1,n} \xrightarrow{n} y_{k+1}-y_k \quad \text{dans} \quad \bar{\mathfrak{X}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$x_n = x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{nn}.$$

En vertu de (42) on a

$$x_n/\bar{Y}_k = (x_{1n}+\ldots+x_{kn})/\bar{Y}_k \quad \text{pour} \quad n \geqslant k,$$

d'où

$$\lim_n x_n/\bar{Y}_k = [\bar{y}_1+\ldots+(\bar{y}_k-\bar{y}_{k-1})]/\bar{Y}_k = \bar{y}_k/\bar{Y}_k \quad \text{dans} \quad \bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

Les relations (37) et (43) prouvent que les deux suites $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ et $x_1, x_2, \ldots$ convergent suivant les quotients $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}$ vers la même limite $\bar{x}$. Les termes de la dernière suite sont des éléments de $\mathfrak{X}$. Nous avons donc démontré que tout élément $\bar{x}$ de $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}_k$ est la limite suivant les quotients $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}_k$ d'une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$.

La relation (43) entraîne

$$(x_m-x_n)/Y \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad \mathfrak{X}/Y_k.$$

Il existe donc une suite d'espaces de Banach $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots$ de la réunion $\bar{\mathfrak{X}}$ telle que

$$(x_m-x_n)/\bar{Y}_k \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad \bar{X}_k/\bar{Y}_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Or, l'espace $\bar{X}_k/\bar{Y}_k$ est isométrique avec la complétion de X_k/Y_k, on a donc

$$(x_m-x_n)/Y_k \xrightarrow{mn} 0 \quad \text{dans} \quad X_k/Y_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Cette relation prouve que la suite $x_1, x_2, \ldots$ converge suivant les quotients X_k/Y_k. La limite de cette suite appartient donc à la complé-

tion de $\mathfrak{X}(Y_k)$, c'est-à-dire à l'espace $\mathfrak{X}[Y_k]$. Or, la convergence suivant les quotients $\mathfrak{X}/Y_k$ est compatible avec la convergence suivant les quotients $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}$, ce qui prouve que $\bar{x}$ appartient à $\mathfrak{X}[Y_k]$.

Nous avons ainsi démontré que tout élément de $\bar{\mathfrak{X}}[\bar{Y}_k]$ est un élément de $\mathfrak{X}[Y_k]$. D'autre part, il est facile de voir que tout élément de $\mathfrak{X}[Y_k]$ est un élément de $\bar{\mathfrak{X}}[\bar{Y}_k]$. Donc les espaces $\mathfrak{X}[Y_k]$ et $\bar{\mathfrak{X}}[\bar{Y}_k]$ ont les mêmes éléments. Pour tout élément $\bar{x}$ de ces espaces il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de $\mathfrak{X}$ qui converge suivant les quotients $\mathfrak{X}/Y_k$ et suivant les quotients $\bar{\mathfrak{X}}/\bar{Y}_k$ vers x. Or, on a

$$|x_n/Y_k|_{X_k/Y_k} = |x_n/\bar{Y}_k|_{\bar{X}_k/\bar{Y}_k},$$

d'où, en tenant compte que l'espace $\bar{X}_k/\bar{Y}_k$ est complet,

$$|x/Y_k|_{\overline{X_k/Y_k}} = |x/\bar{Y}_k|_{\bar{X}_k/\bar{Y}_k}.$$

Cela prouve que les espaces $\mathfrak{X}[Y_k]$ et $\bar{\mathfrak{X}}[\bar{Y}_k]$ sont isométriques. L'égalité (35) est ainsi démontrée.

19. Itération de la complétion suivant les quotients. Dans l'espace $\mathfrak{X}[Y_k]$ on peut considérer, à son tour, la convergence suivant les quotients $\mathfrak{X}[Y_k]/\bar{Y}_k$, où $\bar{Y}_k$ désigne maintenant la fermeture de Y_k dans $\mathfrak{X}[Y_k]$. La complétion suivant cette convergence soit désignée par $\mathfrak{X}[Y_k][\bar{Y}_k]$. En vertu de la formule (35) on a

$$\mathfrak{X}[Y_k][\bar{Y}_k] = \overline{\mathfrak{X}(Y_k)}[\bar{Y}_k] = X(Y_k)[Y_k] = \overline{\mathfrak{X}(Y_k)(Y_k)} = \overline{X(Y_k)} = \mathfrak{X}[Y_k].$$

On a donc la formule

$$\mathfrak{X}[Y_k][\bar{Y}_k] = \mathfrak{X}[Y_k].$$

Cette formule dit que l'itération de la complétion suivant les quotients fournit exactement le même espace que l'on obtient par une seule complétion.

Partie III. Distributions

20. Distributions d'ordre fini à valeurs dans un espace de Banach. Les distributions que nous avons traité jusqu'ici sont une généralisation des fonctions réelles ou complexes. Nous allons les généraliser, dans ce paragraphe, en partant des fonctions dont les valeurs appartiennent à un espace arbitraire de Banach X.

Soit C l'espace des fonctions continues $x(\lambda)$ dans $(-\infty, \infty)$ admettant les valeurs de l'espace X. La convergence relative à C est la convergence presque uniforme, c'est-à-dire uniforme sur tout compact. Pour tout entier $q \geqslant 0$ désignons par P_q l'espace des polynômes de degré $< q$ dont les coefficients appartiennent à X; P_q est un sous-espace fermé de C.

Comme C est une réunion d'espaces de Banach, il en est de même du quotient C/P_q.

Fixons q arbitrairement. À toute fonction $x \in C$ faisons correspondre la classe des fonctions primitives de x d'ordre q, c'est-à-dire la classe des fonctions de C dont la q-ième dérivée est x. La différence de deux fonctions appartenant à cette classe est alors un élément de P_q, la classe elle même est donc un élément du quotient C/P_q. De cette manière, l'espace C est appliqué à un sous-espace C_q du quotient C/P_q et l'on peut identifier les éléments de C avec les éléments correspondants de C_q. Cela étant, les espaces C et C_q ont les mêmes éléments, mais la convergence dans C_q, induite par la convergence dans le quotient C/P_q, est plus générale que la convergence dans C. De plus, l'espace C_q n'est plus complet.

La réunion des espaces C_q $(q = 1, 2, \ldots)$ a également les mêmes éléments que C, mais n'est pas complète. Il est cependant facile de démontrer qu'elle est complétable. En complétant cette réunion, on obtient une réunion, désignons-la par D, d'espaces de Banach; les éléments de cette réunion seront dits *distributions à valeurs dans X*. L'espace C est dense dans D, c'est-à-dire toute distribution est la limite d'une suite de fonctions de C, convergente dans D.

Les distributions introduites dans ce paragraphe sont d'ordre fini, leur ordre étant déterminé par l'indice q de l'espace C_q dont la complétion contient la distribution donnée. Les distributions plus générales seront considérées aux paragraphes 22 et 23.

21. Dérivée. On dira qu'une distribution $y \in D$ est la *dérivée* d'une distribution $x \in D$ et l'on écrira

$$y = x',$$

lorsqu'il existe une suite de fonctions $f_n \in C$, continûment dérivables, telle que

$$f_n \to x \quad \text{et} \quad f_n' \to y \text{ dans } D. \tag{44}$$

La dérivée est unique. En effet, supposons que y et z soient des dérivées de x. Il existe alors une suite de fonctions $f_n \in C$ telle que (44) a lieu, et une suite de fonctions $g_n \in C$ telle que

$$g_n \to x \quad \text{et} \quad g_n' \to z \quad \text{dans } D.$$

Alors $f_n - g_n \to 0$ dans D, c'est-à-dire il existe une suite de fonctions $F_n \in C$ et un entier q tels que $F_n^{(q)} = f_n - g_n$ et que F_n converge presque uniformément vers zéro. On a alors

$$F_n^{(q+1)} = f_n' - g_n',$$

ce qui prouve que $f_n' - g_n' \to 0$ dans D. Donc $y - z = 0$, d'où l'unicité.

Toute distribution $x \in D$ est dérivable, c'est-à-dire pour toute distribution $x \in D$ il existe une distribution $y \in D$ telle que $y = x'$.

En effet, soit x une distribution donnée. Alors il existe une suite de fonctions continues $f_n \in C$ telle que $f_n \to x$ dans D. Il existe donc une suite de fonctions $F_n \in C$ et un entier $q \geqslant 0$ tels que $F_n^{(q)} = f_n$ et que F_n converge presque uniformément vers une fonction $F \in C$.

Pour toute fonction F_n et pour tout intervalle $[-k, k]$ il existe une suite de polynômes $P_{kn1}, P_{kn2}, \ldots$, à coefficients de X, qui converge vers F_n uniformément sur $[-k, k]$. Cela étant, il existe une suite des polynômes $P_1, P_2, \ldots$, où $P_n = P_{nnr_n}$ converge vers F presque uniformément. On a donc presque uniformément $F_n - P_n \to 0$, ce qui entraîne $f_n - p_n \to 0$ dans D, où $p_n = P_n^{(q)}$. Par conséquent,

$$p_n \to x \quad \text{dans} \quad D.$$

Cela prouve que la dérivée x' existe et est la limite de la suite p_n'.

Nous avons démontré encore plus: l'ensemble des polynômes à coefficients de X est dense dans l'espace des distributions D.

Toute distribution $x \in D$ est la dérivée d'un certain ordre d'une fonction continue.

En effet, soient f_n des fonctions de C telles que $f_n \to x$ dans D. Alors il existe des fonctions $F_n \in C$ et un entier $q \geqslant 0$ tel que $F_n^{(q)} = f_n$ et que F_n converge presque uniformément vers une fonction $F \in C$. D'après la définition de dérivée, on a $x = F^{(q)}$.

Toute suite convergente de distributions est dérivable, c'est-à-dire, si une suite de distributions $x_n \in D$ converge dans D vers x, la suite des dérivées x_n' converge dans D vers x'.

En effet, les éléments de la suite convergente x_n appartiennent à un espace $\overline{C}_q$ qui est la complétion de C_q. Il existe une suite de fonctions $F_n \in C$ telles que $F_n^{(q)} = x_n$ et F_n converge presque uniformément vers une fonction F. On a $F^{(q)} = x$. D'autre part, on a $F^{(q+1)} = x_n'$. Donc $x_n' \in \overline{C}_{q+1}$ et la suite x_n' converge dans $\overline{C}_{q+1}$ vers $F^{(q+1)} = x'$.

Soit $\overline{Y}$ un sous-espace fermé de D. La dérivée dans le quotient $D/\overline{Y}$ peut être définie de deux manières:

1° $(x/\overline{Y})' = x'/\overline{Y}$ pour $x \in D$;

2° si $x_n \in C$, $x_n' \in C$ et $x_n/\overline{Y} - x/\overline{Y}$, on pose

$$(x/\overline{Y})' = \lim x_n'/\overline{Y},$$

la limite étant entendue dans l'espace D.

Nous démontrerons que les deux définitions sont équivalentes. Supposons d'abord que 1° ait lieu. Alors il existe une suite de fonctions $x_n \in C$ continûment dérivables telle que $x_n \to x$ dans D. On a alors $x_n' \to x$

dans D et, par conséquent, 2° a lieu. Supposons maintenant, inversement, que 2° ait lieu. Il existe alors une suite de fonctions $y_n \in C$ telle que $y'_n/\overline{Y} = x'_n/\overline{Y}$ et $y'_n \to x'$ dans D; de plus, on peut choisir les y_n de manière que $y_n \to x$. On a alors $y'_n/\overline{Y} \to x'/\overline{Y}$ dans D, d'où $x'_n/\overline{Y} - x'/\overline{Y}$ dans D, ce qui prouve 1°. L'équivalence des deux définitions est donc démontrée.

22. Distributions d'ordre fini à valeurs dans une réunion. Soit $\mathcal{X}$ une réunion d'espaces de Banach X. Désignons par C_X l'espace des fonctions dont les valeurs appartiennent à X et qui sont continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ d'après la norme dans X. Si $X_1 \ll X_2$ et une suite de fonctions $f_n \in C_{X_1}$ converge dans C_{X_1} (c'est-à-dire converge presque uniformément d'après la norme dans X_1), alors on a $f_n \in C_{X_2}$ et la suite converge encore dans C_{X_2}. On a $C_{X_1} \ll C_{X_2}$. Désignons par $\mathcal{C}$ la réunion des espaces C_X. Les éléments de $\mathcal{C}$ sont donc les fonctions aux valeurs de $\mathcal{X}$, continues presque uniformément dans $(-\infty, \infty)$.

Désignons par D_X l'espace des distributions à valeurs dans l'espace X. Si $X_1 \ll X_2$ et une suite de distributions $x_n \in D_X$ converge dans D_{X_1}, elle converge vers la même limite dans D_{X_2}. On a $D_{X_1} \ll D_{X_2}$. Désignons par $\mathcal{D}$ la réunion des espaces D_X. Les éléments de $\mathcal{D}$ sont encore les distributions d'ordre fini. Une suite de distributions $x_n \in \mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers x, lorsqu'il existe un espace D_X tel que $x_n \in D_X$ et $x_n \to x$ dans D_X. Toute distribution $x \in \mathcal{D}$ est la limite d'une suite de fonctions continues $f_n \in \mathcal{C}$ (et même d'une suite de polynômes à coefficients de $\mathcal{X}$).

On dira qu'une distribution $x \in \mathcal{D}$ a la dérivée $y \in \mathcal{D}$, en symbole

$$y = x',$$

lorsqu'il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}$ continûment dérivables telle que $f_n \to x$ et $f'_n \to y$ dans $\mathcal{D}$. Toute distribution $x \in \mathcal{D}$ appartient à un espace D_X et la dérivée existe dans D_X, d'après le paragraphe précédent. Il est bien évident que la dérivée définie tout à l'heure coïncide avec la dérivée dans D_X. La dérivée dans $\mathcal{D}$ est unique pour tout $x \in \mathcal{D}$, car les dérivées dans D_X coïncident pour tous les X tels que $x \in D_X$.

Toute distribution $x \in D$ est la dérivée d'un certain ordre d'une fonction continue.

Toute suite convergente des distributions $x_n \in \mathcal{D}$ est dérivable.

Ces propositions découlent trivialement des propositions analogues du paragraphe précédent.

Si $\overline{Y}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{D}$, tout élément $x/\overline{Y}$ du quotient $\mathcal{D}/\overline{Y}$ est la limite d'une suite $x_n/\overline{Y}$ d'éléments de $\mathcal{C}/\overline{Y}$. La dérivée dans $\mathcal{D}/\overline{Y}$ est définie, en posant

(41) $$(x/\overline{Y})' = x'/\overline{Y} \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{D}.$$

Cette dérivée peut aussi être définie comme il suit: Si $x_n \in \mathcal{C}$, $x'_n \in \mathcal{C}$ et $x_n/\overline{Y} \to x/\overline{Y}$, on pose

$$(x/\overline{Y})' = \lim x'_n/\overline{Y},$$

la limite étant entendue dans l'espace $\mathcal{D}$. Les deux définitions sont équivalentes.

En particulier, soit Y le sous-espace de $\mathcal{C}$ des fonctions nulles dans l'intervalle borné (α, β) et soit $\overline{Y}$ la fermeture de Y dans $\mathcal{D}$. Les éléments $\overline{Y}$ sont les distributions de $\mathcal{D}$ nulles dans (α, β). Les éléments du quotient $\mathcal{D}/\overline{Y}$ sont alors des distributions de $\mathcal{D}$ *localisées* à l'intervalle (α, β). D'après (41), pour dériver une distribution localisée il suffit de localiser la dérivée. En particulier, si une distribution est nulle dans (α, β), sa dérivée est aussi nulle dans (α, β).

23. Distributions d'ordre arbitraire à valeurs dans une réunion. Soit $\overline{Y}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ des distributions qui sont nulles dans $(-k, k)$. Ceci posé, l'espace $\mathcal{D}(\overline{Y}_k)$ est une réunion d'espaces normés et sa complétion $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}[\overline{Y}_k]$ est une réunion d'espaces de Banach. Les éléments de $\overline{\mathcal{D}}$ seront dits *distributions* d'ordre arbitraire à valeurs dans la réunion $\mathcal{X}$.

L'espace des fonctions continues est dense dans l'espace des distributions.

En effet, désignons par Y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ des fonctions qui sont nulles dans $(-k, k)$. Alors l'espace $\overline{Y}_k$ des distributions de $\mathcal{D}$, nulles dans $(-k, k)$, est la fermeture de Y_k dans $\mathcal{D}$. On a

$$\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}[\overline{Y}_k] = \mathcal{C}[Y_k],$$

d'après la formule (31), ce qui prouve la proposition.

Pour démontrer la dérivabilité des distributions, nous établirons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si une suite de distributions $x_n \in \mathcal{D}$ converge dans $\overline{\mathcal{D}}$, il en est de même de leurs dérivées x'_n.*

En effet, si $x_n \in D$ converge dans $\overline{\mathcal{D}}$, la suite $x_n/\overline{Y}_k$ converge dans $\mathcal{D}/\overline{Y}_k$ pour tout k naturel. Il existe donc des suites $y_{k1}, y_{k2}, \ldots$ d'éléments de $\overline{Y}_k$ telles que les différences $x_n - y_{kn}$ convergent dans $\mathcal{D}$ pour $n \to \infty$. Par conséquent, les différences $x'_n - y'_{kn}$ convergent dans $\mathcal{D}$ pour $n \to \infty$. Comme $y'_{kn} = \overline{Y}_k$, les suites $x'_n/\overline{Y}_k$ convergent dans $\mathcal{D}/\overline{Y}_k$ pour $n \to \infty$. Cela prouve que x'_n converge dans $\overline{\mathcal{D}}$.

Une distribution $y \in \overline{\mathcal{D}}$ sera dite la *dérivée* de $x \in \overline{\mathcal{D}}$, si pour toute suite d'éléments $x_n \in \mathcal{D}$ convergente dans $\overline{\mathcal{D}}$ vers x, on a $x'_n \to x$ dans $\overline{\mathcal{D}}$.

Toute distribution $x \in \overline{\mathcal{D}}$ est dérivable.

En vertu du lemme, il suffit de remarquer que si $x_n \to x$ et $y_n \to x$

dans $\overline{\mathcal{D}}$ ($x_n, y_n \in \mathcal{D}$), les suites x_n' et y_n' convergent dans $\overline{\mathcal{D}}$ vers la même limite. En effet, on a $x_n - y_n \to 0$ dans $\overline{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire $(x_n - y_n)/\overline{Y}_k \overset{n}{\to} 0$ dans $\mathcal{D}/\overline{Y}_k$. D'après la définition de la convergence dans un quotient, il existe des éléments $z_{kn} \in Y_k$ tels que $x_n - y_n - z_{kn} \overset{n}{\to} 0$ dans $\mathcal{D}$, d'où $x_n' - y_n' - z_{kn}' \overset{n}{\to} 0$. Cette relation a lieu pour tout k naturel, donc $x_n' - y_n' \to 0$ dans $\overline{\mathcal{D}}$. La proposition est donc démontrée.

Toute suite convergente de distributions de $\overline{\mathcal{D}}$ est dérivable, c'est-à-dire, si une suite de distributions $x_n \in \overline{\mathcal{D}}$ converge dans $\overline{\mathcal{D}}$ vers x, la suite de dérivées x_n' converge dans $\overline{\mathcal{D}}$ vers x'.

Soit z_n une suite d'éléments de $\mathcal{D}$, convergente vers x'. Alors on a, par définition, $z_n' \to x'$ dans $\overline{\mathcal{D}}$. D'autre part, $x_n - z_n \to 0$ dans $\overline{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire $(x_n - z_n)/\overline{Y}_k \overset{n}{\to} 0$ dans $\overline{\mathcal{D}}/\overline{Y}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Il existe des éléments $y_{kn} \in \mathcal{D}$ tels que $y_{kn}/\overline{Y}_k = (x_n - z_n)/\overline{Y}_k$ et que $y_{kn}/\overline{Y}_k \overset{n}{\to} 0$ dans $\mathcal{D}/\overline{Y}_k$. Par conséquent, $y_{kn}'/\overline{Y}_k \overset{n}{\to} 0$ dans $\mathcal{D}/\overline{Y}_k$, d'où $(x_n' - z_n')/\overline{Y}_k \overset{n}{\to} 0$ dans $\overline{\mathcal{D}}$. Donc x_n' converge vers la même limite que z_n', c'est-à-dire vers x'.

24. Exemples des applications des distributions opérationnelles. Soit en particulier $\mathcal{X}$ l'espace des opérateurs (v. § 5). Alors la construction des paragraphes 22 et 23 conduit aux distributions à valeurs opérationnelles. Ces distributions peuvent aisément être appliquées à certains problèmes d'équations classiques aux dérivées partielles.

Par exemple, en cherchant la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial x}{\partial t} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 \leqslant t < \infty)$$

telle que

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \tag{42}$$
$$x(\lambda, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin n\pi\lambda,$$

on est conduit à l'équation opérationnelle

$$x''(\lambda) = sx(\lambda), \tag{43}$$

dont la solution formelle est (voir [1], p. 237)

$$x(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{s + n^2\lambda} \sin n\pi\lambda, \tag{44}$$

que l'on écrit habituellement

$$x(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \exp(-n^2\pi^2 t) \sin n\pi\lambda.$$

Quant à la série (1), il faut supposer quelque régularité de convergence, par exemple, la convergence uniforme, ou, plus généralement, la convergence distributionnelle. Cela étant, il n'y a aucune difficulté avec la vérification que la série (44) converge distributionnellement par rapport à λ. De plus, la seconde dérivée de (44) converge encore distributionnellement, d'après un théorème général (v. la fin du § 23). Donc le fait que (44) satisfait formellement à (43) entraîne aussitôt que (44) est une vraie solution de (43).

Remarquons que si l'on voulait démontrer la même chose sans se servir de la théorie des distributions, cela exigerait un raisonnement supplémentaire, peu commode dans les calculs pratiques (en outre il faudrait introduire une hypothèse plus forte sur la convergence de (42)).

Il est facile de remarquer qu'une équation différentielle opérationnelle homogène

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0, \tag{45}$$

où a_i sont des opérateurs, admet exactement les mêmes solutions, n'importe si l'on la considère au sens opérationnel ordinaire ou bien au sens des distributions opérationnelles. En effet, si une distribution opérationnelle satisfait à cette équation, elle est une fonction opérationnelle continue, ce qui se laisse voir sans difficulté. D'autre part, toute solution de l'équation non homogène

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f, \tag{46}$$

où f est une distribution donnée, est de la forme

$$x + y,$$

où x est une solution de l'équation homogène (45) et y est une solution particulière de (46), fixée arbitrairement. Donc l'admission des solutions distributionnelles n'introduit aucune modification dans la méthode de résolution des équations considérées.

Considérons encore l'équation

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^3} + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda \partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \tag{47}$$

D'après un critère connu, cette équation est restrictive (voir [2], p. 302). Il s'ensuit que les conditions sur l'axe des λ doivent s'écrire dans la forme

$$x_\lambda(\lambda, 0) + x(\lambda, 0) = f(\lambda), \qquad x_{\lambda t}(\lambda, 0) + x_t(\lambda, 0) = g(\lambda). \tag{48}$$

Proposons-nous de résoudre le problème (47), (48), en supposant que

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2n\pi), \qquad g(\lambda) = -\tfrac{1}{4}(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^{-2},$$

où δ est la distribution delta de Dirac.

On a (voir [2], p. 49 et 50)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \partial(\lambda - 2n\pi) = \tfrac{1}{2} + \cos\lambda + \cos 2\lambda + \ldots,$$

$$\tfrac{1}{4}(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^{-2} = \cos\lambda + 2\cos 2\lambda + \ldots$$

L'équation opérationnelle correspondante au problème considéré est

(49) $$x''' + x'' + s^2 x' + s^2 x = sf(\lambda) + g(\lambda).$$

Les racines de l'équation caractéristique

$$w^3 + w^2 + s^2 w + s^2 = 0$$

sont

$$-1, \quad is \quad \text{et} \quad -is$$

et seule la première est logarithmique. La solution générale de (49) est donc

$$x(\lambda) = ce^{-\lambda} + y(\lambda),$$

où c est un opérateur arbitraire et $x_0(\lambda)$ est une solution particulière de (49).

Afin de trouver cette solution particulière, nous cherchons d'abord une solution $x_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de l'équation

(50) $$x''' + x'' + s^2 x' + s^2 x = (s-n)\cos n\lambda$$

qui soit de la forme

(51) $$x_n(\lambda) = A_n \cos n\lambda + B_n \sin n\lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En substituant (51) dans (50) et comparant les coefficients de cos et sin, on est conduit au système d'équations

$$A_n(-n^2 + s^2) + B_n(-n^3 + ns^2) = 0,$$

$$A_n(n^3 - ns^2) + B_n(-n^2 + s^2) = s - n.$$

D'où

$$A_n = \frac{n}{(s+n)(1+n^2)}, \qquad B_n = \frac{1}{(s+n)(1+n^2)}.$$

Cela étant, la fonction

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\lambda), \quad \text{où} \quad x_0(\lambda) = \frac{1}{2s},$$

satisfait à l'équation (49). On en déduit facilement que la solution générale du problème considéré est

$$x(\lambda, t) = c(t)e^{-\lambda} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}(-n\cos n\lambda + \sin n\lambda).$$

La série obtenue converge uniformément et absolument pour $t \geqslant \varepsilon > 0$. Lorsque t s'approche de 0, la fonction $x_\lambda(\lambda, t) + x(\lambda, t)$, considérée comme une fonction de λ avec le paramètre t, converge distributionellement vers $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial(\lambda - 2n\pi)$; pareillement $x_{\lambda t}(\lambda, t) + x_t(\lambda, t)$ converge vers $-\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{4}\lambda)^{-2}$.

Travaux cités

[1] C. Foiaş, *La non-existence des fonctionnelles linéaires continues non-nulles sur l'espace des opérateurs de J. Mikusiński*, Bull. Ac. Pol. Sci.

[2] J. Mikusiński, *Operational calculus*, London-New York 1959.

[3] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions*, Warszawa 1957.

[4] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I)*, Annales de Fourier 7 (1957), p. 1-139.

[5] — *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, ibidem 8 (1959), p. 1-209.

[6] W. Słowikowski, *On the theory of operators systems*, Bull. Ac. Pol. Sci. 3 (1955), p. 137-142.

[7] J. Wloka, *Distributionen und Operatoren*, Math. Annalen.

Reçu par la Rédaction le 19. 8. 1959