STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Über die Spaltung von Fourierreihen fastperiodischer Funktionen

von

S. HARTMAN und C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław)

In Fortsetzung der Untersuchungen von Kowanko [4] beschäftigen wir uns hier mit Fourierreihen, deren Exponenten in arithmetisch unabhängige Teile zerfallen. Da die Resultate und Beweise ihrem Wesen nach nicht auf Funktionen einer reellen Variablen beschränkt bleiben, betrachten wir vom Anfang an fastperiodische (fp.) Funktionen auf einer abelschen Gruppe G (s. z. B. [5]). Wir setzen voraus, daß die Fourierentwicklung

$$f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(t)$$

einer komplexen fp. Funktion nach den Charakteren von G derart in $M \leqslant \infty$ Teilreihen

$$\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} \chi_n^{(j)}(t) \qquad (s_n \leqslant \infty;\; n < M+1) \tag{1}$$

zerfällt, daß die zu verschiedenen Indizes n gehörenden Charaktere voneinander unabhängige Systeme bilden, d. h. für beliebige $N < M+1$, $1 \leqslant k_n < s_n+1$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ und ganzzahlige $c_n^{(j)}$ aus der Identität

$$\prod_{n=1}^{N} \prod_{j=1}^{k_n} [\chi_n^{(j)}(t)]^{c_n^{(j)}} \equiv 1 \tag{2}$$

die Identitäten

$$\prod_{j=1}^{k_n} [\chi_n^{(j)}(t)]^{c_n^{(j)}} \equiv 1 \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

folgen.

Ist im besonderen G die reelle Achse, so kann man

$$\chi_n^{(j)}(t) = e^{i\lambda_n^{(j)} t}$$

setzen. Dann läßt sich (2) in der Form

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_n} c_n^{(j)}\lambda_n^{(j)}=0$$

und (3) analog ausdrücken. Für diesen Fall und unter Voraussetzung $M<\infty$ hat Kowanko bewiesen [4], daß die einzelnen Teilreihen (1) Fourierentwicklungen stetiger fp. Funktionen darstellen, deren Summe die Funktion f ist. Wir beweisen darüber hinaus den

SATZ 1. *Alle Reihen* (1), *wo* $n<M+1\leqslant\infty$ *ist, sind Fourierreihen gewisser fp. Funktionen* f_n; *für diese gilt*

$$\sum_{n=1}^{M} f_n(t)=f(t) \text{ gleichmäßig auf } G, \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{M}\sup_{t\in G}|f_n(t)|<\infty. \tag{5}$$

Dieser Satz ist eine weitgehende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Bohr, nach welchem die Fourierreihe einer stetigen fp. Funktion einer reellen Variablen mit arithmetisch unabhängigen Fourierexponenten absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Die Transformation

$$\psi(t)=\big(\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots\big)$$

bildet die Gruppe G homomorph in eine $\aleph_0$-dimensionale toroidale Gruppe T ab. T ist das Produkt von Einheitskreisen T_i, auf welche die Gruppe G durch die Charaktere χ_i „aufgewickelt" wird. Den Charakteren $\chi_n^{(j)}$ entsprechen bei festem n die Kreise T_n^j, deren Produkte $K_n=T_n^1\times\times T_n^2\times\ldots=\mathop{\mathrm{P}}_{j=1}^{s_n} T_n^j$ wir für den Augenblick als Achsen betrachten. Das sind Teiltorusse, aus welchen der ganze Torus T wieder durch Produktbildung hervorkommt: $T=\mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{M} K_n$. Es sei K die Untergruppe von T, die durch Abschließung von $\psi(G)$ in T entsteht. Wir beweisen zuerst, daß die Gruppe K gleich dem Produkt ihrer Projektionen auf die Achsen K_n ist:

$$K=\mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{M}\mathrm{Pr}_n K. \tag{6}$$

Ist $x\in T$, so mögen $x_1,x_2,\ldots$ die „Koordinaten" von x auf den K_n bezeichnen. Es sei $x\in\mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{M}\mathrm{Pr}_n K$. Dann gibt es für jedes n einen Punkt

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\ldots,x_{n-1}^{(n)},x_n,x_{n+1}^{(n)},\ldots)\in K. \tag{7}$$

Es seien nunmehr $x_{n,j}$ $(1\leqslant j<s_n+1)$ die (diesmal numerischen komplexen, mit $|x_{n,j}|=1$) Koordinaten von $x_n\in K_n$ auf den Kreisen T_n^j. Wegen (7) gibt es für jedes $\varepsilon>0$ und jedes natürliche $k_n<s_n+1$ ein $t_n\in G$ mit

$$|\chi_n^{(j)}(t_n)-x_{n,j}|<\varepsilon \qquad (j=1,\ldots,k_n).$$

Es müssen also die Charaktere $\chi_n^{(j)}$ $(1\leqslant j<s_n+1)$ mit den Zahlen $x_{n,j}$ in Korrelation sein, d. h. es muß aus der Identität

$$\prod_{j=1}^{k_n}[\chi_{n,j}(t)]^{c_n^{(j)}}\equiv 1$$

mit ganzzahligen $c_n^{(j)}$

$$\prod_{j=1}^{k_n}(x_{n,j})^{c_n^{(j)}}=1 \tag{8}$$

folgen. Wenn man jetzt (2) für ein $N<M+1$ und beliebige k_n $(1\leqslant k_n<s_n+1)$ voraussetzt, so gilt (3) und daher hat man (8) für jedes $n\leqslant N$, woraus

$$\prod_{n=1}^{N}\prod_{j=1}^{k_n}(x_{n,j})^{c_n^{(j)}}=1$$

folgt. Das bedeutet aber, daß die Charaktere $\chi_n^{(j)}$ für alle zulässigen Werte von n und j in ihrer Gesammtheit mit entsprechenden Zahlen $x_{n,j}$ in Korrelation stehen. Nach einem Satz von Hewitt und Zuckerman ([3], vgl. auch [2]) hat das zur Folge, daß für jedes $\varepsilon>0$, jedes $N<M+1$ und beliebige k_n $(1\leqslant k_n<s_n+1)$ ein $t\in G$ existiert, das allen Ungleichungen

$$|\chi_n^{(j)}(t)-x_{n,j}|<\varepsilon \qquad (1\leqslant j\leqslant k_n;\ 1\leqslant n\leqslant N) \tag{9}$$

simultan genügt. Da die Zahlen $x_{n,j}$ $(1\leqslant j<s_n+1;\ 1\leqslant n<M+1)$ numerische Koordinaten des Punktes x in T sind, so besagt die Lösbarkeit von (9) einfach, daß $x\in K$ gilt. Mithin haben wir die Inklusion $\mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{M}\mathrm{Pr}_n K\subset K$ bewiesen. Die reziproke ist trivial, es kommt also die gewünschte Gleichheit (6).

Deshalb können wir jede Funktion auf K als eine Funktion von M unabhängigen Veränderlichen $x_1,x_2,\ldots$ betrachten. Jeder stetigen komplexen Funktion $\Phi(x)$ auf K entspricht vermittels der Gleichung

$$F(t)=\Phi\big(\psi(t)\big) \tag{10}$$

eine fp. Funktion $F(t)$ auf G. Die betrachtete Funktion $f(t)$ entspricht dabei einer Funktion $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\ldots)$ auf K. Um das zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß $f\big(\psi^{-1}(x)\big)$ eine wohlbestimmte Funktion auf

$\psi(G)$ ist. In der Tat: auf Grund des Approximationssatzes hat $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ immer $f(t_1) = f(t_2)$ zur Folge. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Charaktere $x_{n,j}$ folgt durch nochmalige Anwendung des Approximationssatzes, daß $f(\psi^{-1}(x))$ auf $\psi(G)$ *gleichmäßig* stetig ist und mithin eine stetige Erweiterung φ auf ganz K zuläßt. Die Fourierreihe von $\varphi(x)$ ist (von der Anordnung der Glieder abgesehen)

$$\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} x_{n,j}. \tag{11}$$

Da $\sum_{n,j}|a_n^{(j)}|^2 < \infty$ ist, so ergeben die Teilreihen $\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} x_{n,j}$ gewisse nach dem normierten Haarschen Maße μ in der (kompakten) Gruppe K quadratisch integrierbare Funktionen φ_n, die von einzelnen Variablen x_n abhängen; in $L^2(\mu)$ gilt die Gleichheit

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{M} \varphi_n(x_n). \tag{12}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variablen x_n gilt sie auch μ-fast überall ([1], S. 108-109). Da μ das Produkt der Haarschen Maße μ_n auf den (kompakten) Projektionen $\mathrm{Pr}_n K$ ist, so kann man nach dem Fubinischen Satz für jedes n die Werte von $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots$ so bestimmen, daß (12) für jedes $x_n \epsilon \mathrm{Pr}_n K$ mit Ausnahme einer Menge vom μ_n-Maße Null besteht. Daraus folgt

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \varphi_n(x_n) + \text{Constans} \quad \mu_n\text{-fast überall.}$$

Da φ stetig, daher insbesondere inbezug auf x_n stetig ist, so erweist sich $\varphi_n(x_n)$ als μ_n-fast überall einer stetigen Funktion auf $\mathrm{Pr}_n K$ und also μ-fast überall einer stetigen Funktion auf K gleich. Mithin sind die Teilreihen $\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} x_{n,j}$, als Fourierreihen von φ_n, auch Fourierreihen stetiger Funktionen auf K, welchen vermittels (10) fp. Funktionen $f_n(t)$ auf G mit Fourierreihen (1) entsprechen. Somit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

(4) und (5) zeigen wir nun nicht direkt für die Funktionen f_n, sondern für die ihnen vermöge (10) entsprechenden stetigen Funktionen auf K. Das wird formell noch mehr besagen. Die letzteren dürfen wir unter etwaiger Abänderung auf einer Nullmenge mit $\varphi_n(x) = \varphi_n(x_n)$ bezeichnen. Bemerken wir, daß 1° alle φ_n stochastisch (nach dem Maße μ) unabhängig sind (zur Definition s. z. B. [1], S. 7) und 2° höchstens eines unter den φ_n ein konstantes Glied in seiner Fourierentwickelung hat, so wird sich (4) und (5) wegen (12) und der Stetigkeit von φ_n (welche das

„fast überall” durch „überall” und essup durch sup zu ersetzen gestattet) aus folgendem Hilfssatz ergeben:

Sind die Funktionen $h_n(x)$ stochastisch unabhängig und gilt fast überall $\sum_{n=1}^{N} h_n(x) = h(x)$, wo h eine im wesentlichen (d. h. außerhalb einer Nullmenge) beschränkte Funktion ist, so sind auch $h_n(x)$ im wesentlichen beschränkt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ konvergiert außerhalb einer Nullmenge gleichmäßig; gilt darüber hinaus

$$\int h_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so hat man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{es\,sup} |h_n(x)| < \infty.$$

Beweis. Man gewinnt ihn leicht durch Benutzung der für zwei stochastisch unabhängige reelle Funktionen g und h offenbar gültigen Formel

$$\operatorname{es\,sup}(g+h) = \operatorname{es\,sup} g + \operatorname{es\,sup} h.$$

Eine analoge Gleichheit gilt für esinf und daher auch für $\omega = \operatorname{es\,sup} - \operatorname{es\,inf}$. Wenn wir also für den Augenblick annehmen, daß die Funktionen h_n reell sind und $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k$ setzen, so haben wir wegen der Gleichheit $h = h_1 + \ldots + h_n + r_n$ fast überall

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(h_k) + \omega(r_n) = \omega(h) < \infty \tag{13}$$

und mithin $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(h_n) < \infty$. Daraus folgert man leicht, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ außerhalb einer Nullmenge *gleichmäßig* konvergiert. Folglich gilt

$$\lim_n \operatorname{es\,sup} r_n = \lim_n \operatorname{es\,inf} r_n = \lim_n \omega(r_n) = 0.$$

Weiter, wegen (13) und analoger Formeln für essup und esinf anstatt ω, hat man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{es\,sup} h_n = \operatorname{es\,sup} h < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{es\,inf} h_n = \operatorname{es\,inf} h < \infty$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(h_n) = \omega(h) < \infty. \tag{14}$$

Aus (14) erhellt, daß die h_n im wesentlichen beschränkt sind. Von der Annahme, daß h_n reelle Werte haben, kann man sich frei machen, indem man das Bewiesene auf den Reell- und Imaginärteil von h_n und h anwendet. Gilt $\int h_n(x)dx = 0$, so folgt $\operatorname{es\,sup}\operatorname{Re}(h_n) \geqslant 0$, $\operatorname{es\,sup}\operatorname{Im}(h_n) \geqslant 0$ $\operatorname{es\,inf}\operatorname{Re}(h_n) \leqslant 0$ und $\operatorname{es\,inf}\operatorname{Im}(h_n) \leqslant 0$, also $\operatorname{es\,sup}|\operatorname{Re}(h_n)| \leqslant \omega(\operatorname{Re}(h_n))$, $\operatorname{es\,sup}|\operatorname{Im}(h_n)| \leqslant \omega(\operatorname{Im}(h_n))$ und schließlich wegen (14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{es\,sup}|h_n| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{es\,sup}|\operatorname{Re}(h_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{es\,sup}|\operatorname{Im}(h_n)| < \infty.$$

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes und folglich auch des Satzes 1 zu Ende.

Satz 1 gestattet einen analogen Schluß für stetige fp. Funktionen. Zuerst beweisen wir das

LEMMA. *Ist die Funktion $f(t) \sim \sum_n a_n \chi_n(t)$ $(a_n \neq 0)$ fastperiodisch auf einer abelschen topologischen Gruppe, so ist sie dann und nur dann stetig, wenn alle Charaktere χ_n stetig sind.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt daraus, daß jeder translationsinvariante und (in bezug auf die gleichmäßige Konvergenz) abgeschlossene Modul fastperiodischer Funktionen, mithin also der Modul aller stetigen fp. Funktionen die abgeschlossene Hülle der direkten Summe der in ihm enthaltenen unzerlegbaren Teilmoduln darstellt ([5], S. 66). Daß die Bedingung auch hinreichend ist, folgt unmittelbar aus dem Approximationssatze. Nun gilt

SATZ 1'. *Ist die Gruppe G eine topologische und ist die Funktion f, welche die Voraussetzung von Satz 1 erfüllt, außerdem noch stetig, so sind die in der Behauptung dieses Satzes vorkommenden Funktionen f_n ebenfalls stetig.*

Beweis. Aus der Stetigkeit von f und aus dem zweiten Teil des Lemmas folgt die Stetigkeit aller Charaktere $\chi_n^{(j)}$ in der Formel (1). Daß die Funktionen f_n stetig sind, ergibt sich aus dem ersten Teil des Lemmas.

Weitere Überlegungen beziehen sich auf den Fall, wo G die reelle Achse ist, und auf die Räume $L^p(\mu)$ $(p \geqslant 1)$ der auf K erklärten mit p-ter Potenz integrierbaren Funktionen. Ihnen entsprechen Fourierreihen, die nach stetigen Charakteren von K, d. h. nach den Potenzprodukten, auch mit negativen Exponenten, der Koordinaten in T fortschreiten. Indem jede Koordinate vermöge Rückgängigmachung der Transformation ψ durch entsprechenden Charakter der reellen Achse ersetzt wird, kommt die Fourierreihe einer Besicovitchschen fp. Funktion hervor, in deren Fourierentwicklung nur diejenigen Charaktere auftreten, die Potenzprodukte der für die Transformation ψ benutzten Charaktere χ_i sind. Diese Funktionen bilden einen vollständigen Raum $B^p(\psi)$ über den Linearkombinationen von Potenzprodukten der χ_i, wenn als Norm die B^p-Norm, d. h. die p-te Wurzel aus dem Mittelwert der absoluten p-ten Potenz angenommen wird. Der Raum $B^p(\psi)$ ist mit $L^p(\mu)$ isomorph. Setzen wir voraus, daß die Ausgangsfunktion

$$f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(t),$$

die ψ erzeugt, nunmehr eine B^p-, und nicht notwendig eine stetige fp. Funktion ist, so können wir den nächsten Satz, ebenso wie früher den Satz 1, auf die Gruppe G, also auf die reelle Achse, anstatt auf K beziehen, nämlich folgendermaßen:

SATZ 2. *Alle Reihen* (1) *sind Fourierreihen gewisser B^p-Funktionen f_n; für diese gilt*

$$\sum_{n=1}^{M} f_n(t) = f(t) \quad \textit{nach der } B^p\textit{-Norm}.$$

Beweis. Den führen wir in bezug auf entsprechende Funktionen in K. Anstatt der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(t) = \sum_{n=1}^{M} \sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} \chi_n^{(j)}(t)$$

(der Fourierreihe von f) betrachten wir demnach die Reihe (11), wo die $x_{n,j}$, wie früher, numerische Koordinaten der Punkte $x \in K = \mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{M} \mathrm{Pr}_n K$ sind. Ist $\varphi \in L^p(\mu)$ die Funktion, welche vermöge des Isomorphismus zwischen $L^p(\mu)$ und $B^p(\psi)$ der Funktion f entspricht, so ist (11) ihre Fourierreihe. Mithin sind unter den Fourierkoeffizienten von φ nur diejenigen von Null verschieden, welche zu den einzelnen Koordinaten in T gehören, d. h. es verschwinden die den Potenzprodukten von $x_{n,j}$ vom Grad höher als 1 entsprechenden Koeffizienten. Wir wollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der nullte Koeffizient, d. h. der Mittelwert von φ, ebenfalls verschwindet. Man hat zu beweisen, daß die Teilreihen $\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} x_{n,j}$ Fourierreihen gewisser Funktionen $\varphi_n \in L^p(\mu)$ sind, die nur von den einzelnen $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots) \in \mathrm{Pr}_n K$ abhängen und für welche

$$\sum_{n=1}^{M} \varphi_n(x_n) = \varphi(x) \quad \text{in} \quad L^p(\mu) \tag{15}$$

gilt.

Diese Funktionen werden durch die Formel

$$\varphi_n(x_n) = \int \varphi(x)\mu_1(dx_1)\ldots\mu_{n-1}(dx_{n-1})\mu_{n+1}(dx_{n+1})\mu_{n+2}(dx_{n+2})\ldots$$

definiert, wo das Integral über das Produkt $\underset{i\neq n}{\mathrm{P}}\,\mathrm{Pr}_i K$ erstreckt ist. Weiterhin schreiben wir kürzer dx_i statt $\mu_i(dx_i)$.

Mit φ gehören auch die φ_n zu $L^p(\mu)$. Wir berechnen ihre Fourierkoeffizienten. Der zu $x_{r,j}$ gehörende Koeffizient von φ_n ist für $r = n$ gleich

$$\int \overline{x_{n,j}}\Big[\int \varphi(x)\,dx_1\ldots dx_{n-1}dx_{n+1}\ldots\Big]dx_n = \int \varphi(x)\,\overline{x_{n,j}}\,dx_1 dx_2\ldots = a_n^{(j)}$$

und für $r \neq n$ gleich

$$\int \overline{x_{r,j}}\Big[\int \varphi(x)\,dx_1\ldots dx_{n-1}dx_{n+1}\ldots\Big]dx_r dx_n = 0,$$

weil $\int \overline{x_{r,j}}\,dx_r = 0$ gilt. Der nullte Koeffizient von φ_n ist gleich dem Mittelwerte von φ, d. h. Null. Die zu den Potenzprodukten vom höheren Grade als 1 gehörenden Koeffizienten von φ_n verschwinden begreiflicherweise ebenfalls. Mithin sind die Reihen $\sum_{j=1}^{s_n} a_n^{(j)} x_{n,j}$ tatsächlich Fourierreihen von φ_n. Man hat

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) = \int \varphi(x)\,dx_{n+1}dx_{n+2}\ldots \quad \mu\text{-fast überall},$$

wenn man die beiden Glieder dieser Gleichheit als Funktionen von $x \in K$ auffaßt, die nur von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen. Das folgt aus der direkt nachweisbaren Identität ihrer Fourierkoeffizienten.

Die Gleichheit (15) ergibt sich nun aus dem folgenden bekannten Satz (*theorem on martingales*, [1], S. 342-343): für ein $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots) \in L^p(\mu) = L^p(\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots)$ hat man

$$\lim_n \int \varphi(x)\,dx_{n+1}dx_{n+2}\ldots = \varphi(x) \quad \text{in} \quad L^p(\mu)$$

(und auch μ-fast überall).

Literaturnachweis

[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York-London 1953.

[2] S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques*, Studia Math. 13 (1953), S. 296-310.

[3] E. Hewitt and H. S. Zuckerman, *A group-theoretic method in approximation theory*, Annals of Math. 52 (1950), S. 557-567.

[4] А. С. Ковань ко, *К вопросу о разложимости почти-периодических функций в конечную сумму почти-периодических функций*, Ученые записки Львовского Гос. Унив. 22, Серия Физико-Мат., вып. 5 (1953), S. 12-16.

[5] W. Mack, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin-Göttingen-Heildelberg 1950.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 27. 10. 1959