STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Über das asymptotische Verhalten eines speziellen Faltungsintegrals

von

L. BERG (Halle)

Auf Grund einer Anregung von Herrn J. Mikusiński soll in der vorliegenden Arbeit das asymptotische Verhalten des Integrals

$$I = \int_0^s e^{-at^{-a}} t^{\mu} e^{-\beta(s-t)^{-b}} (s-t)^{\nu} dt \tag{1}$$

mit positiven a, β, a, b und beliebigen komplexen μ, ν für $s \to +0$ untersucht werden, das bei gewissen Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benötigt wird. Diese Aufgabe wird mit Hilfe der Formel

$$\int_{a(s)}^{b(s)} e^{-g(s,t)-h(s,t)} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2\big(s, x(s)\big)}} e^{-g(s,x(s))-h(s,x(s))} \tag{2}$$

für $s \to S$ gelöst, die nach [1], [2] und [3] unter folgenden Voraussetzungen gilt: *$g(s, t)$ ist eine für reelle s und t reellwertige Funktion, die für $a < t < b$ die in t stetigen Ableitungen*

$$g_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(s, t), \qquad g_2(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(s, t)$$

besitzt, $h(s, t)$ darf komplexe Werte besitzen und braucht für $a < t < b$ nur die erste stetige partielle Ableitung $h_1(s, t)$ nach t zu besitzen. Die in (2) *auftretende Funktion $x = x(s)$ ist eine Lösung von*

$$g_1(s, x) = 0 \tag{3}$$

mit $a(s) < x(s) < b(s)$. Ferner muß eine Funktion $\omega(s) > 0$ mit $a + \omega < x < b - \omega$ existieren, so daß für jede reelle Funktion $\xi(s)$ mit $|x(s) - \xi(s)| \leqslant \omega(s)$

$$\omega^2(s) g_2\big(s, x(s)\big) \to +\infty, \qquad g_2\big(s, \xi(s)\big) \sim g_2(s, x) \tag{4}$$

sowie

$$(5)\qquad h(s,x)-h(s,\xi)=o(1),\qquad \Re h_1(s,\xi)=O\left(\sqrt{g_2(s,x)}\right)$$

für $s\to S$ gilt. Schließlich soll $g_1(s,t)+\Re h_1(s,t)$ für $a<t<b$ und hinreichend nahe bei S gelegene s monoton wachsend sein.

Man könnte zwar auch daran denken, das asymptotische Verhalten von (1) über die Laplace-Transformation und deren Rücktransformation zu ermitteln, indem man neben [1] Sätze aus den Arbeiten [4] und [5] heranzieht, aber der hier eingeschlagene direkte Weg ist natürlich viel einfacher. Hat man einmal den zuvor angeführten Satz zur Verfügung, so sind nur noch elementare Rechnungen erforderlich, theoretische Schwierigkeiten ergeben sich nicht mehr.

In dem speziellen Fall (1) ist $a=0$, $b=s$, $S=0$. Wählen wir

$$(6)\qquad g(s,t)=\frac{\alpha}{t^a}+\frac{\beta}{(s-t)^b},\qquad h(s,t)=-\mu\ln t-\nu\ln(s-t),$$

so gilt

$$(7)\qquad g_1(s,t)=-\frac{\alpha a}{t^{a+1}}+\frac{\beta b}{(s-t)^{b+1}},\qquad g_2(s,t)=\frac{\alpha a(a+1)}{t^{a+2}}+\frac{\beta b(b+1)}{(s-t)^{b+2}}$$

und

$$(8)\qquad h_1(s,t)=-\frac{\mu}{t}+\frac{\nu}{s-t},\qquad h_2(s,t)=\frac{\mu}{t^2}+\frac{\nu}{(s-t)^2}.$$

Aus (3) und (7) erhalten wir

$$(9)\qquad s=x+\gamma x^c$$

mit

$$(10)\qquad \gamma=\left(\frac{\beta b}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{b+1}},\qquad c=\frac{a+1}{b+1}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a\geqslant b$ und somit $c\geqslant 1$ annehmen. Wegen $\gamma>0$ gibt es eine Lösung $x=x(s)$ von (9), die der Ungleichung $0<x(s)<s$ genügt. Für diese Funktion gilt wegen (7)

$$g_2(s,x)=\frac{\alpha a(a+1)}{x^{a+2}}+\frac{\beta b(b+1)}{\gamma^{b+2}x^{c(b+2)}}$$

und daher im Falle $a=b$

$$(11)\qquad g_2(s,x)=\frac{\alpha a(a+1)(\gamma+1)}{\gamma x^{a+2}}=\frac{\alpha a(a+1)(\gamma+1)^{a+3}}{\gamma s^{a+2}}$$

mit $\gamma=(\beta/\alpha)^{1/(a+1)}$ und im Falle $a>b$

$$(12)\qquad g_2(s,x)\sim\frac{\alpha a(b+1)}{\gamma x^{a+c+1}}\sim\frac{\alpha a(b+1)}{\gamma s^{a+c+1}}$$

mit (10) für $x\to 0$. Wählen wir jetzt $\omega(s)=s^\delta$ mit $(a+c+1)/2>\delta>c\geqslant 1$, so ist (4) erfüllt. Wegen $|x-\xi|\leqslant\omega$ ist $\xi\sim x$, $|x-\xi|x^{-c}=o(1)$ und daher

$$h(s,x)-h(s,\xi)=-\mu\ln\frac{x}{\xi}-\nu\ln\frac{\gamma x^c}{\gamma x^c+x-\xi}=o(1).$$

Weiterhin gilt

$$\Re h_1(s,\xi)=-\frac{\Re\mu}{\xi}+\frac{\Re\nu}{\gamma x^c+x-\xi}=O(x^{-c}),$$

so daß wegen (11) und (12) auch (5) erfüllt ist. Schließlich folgt aus (7) und (8), daß für hinreichend kleine s und $0<t<s$

$$g_2(s,t)+\Re h_2(s,t)>0$$

ist. Damit ist $g_1(s,t)+\Re h_1(s,t)$ monoton wachsend, und alle Bedingungen sind erfüllt.

Nunmehr können wir die rechte Seite von (2) berechnen. Zunächst sieht man sofort, daß

$$e^{-h(s,x)}=x^\mu(\gamma x^c)^\nu$$

ist und somit im Falle $a=b$

$$(13)\qquad e^{-h(s,x)}=\frac{\gamma^\nu}{(1+\gamma)^{\mu+\nu}}s^{\mu+\nu}$$

und im Falle $a>b$

$$(14)\qquad e^{-h(s,x)}\sim\gamma^\nu s^{\mu+c\nu}.$$

Weiterhin ist nach (6)

$$(15)\qquad g(s,x)=\frac{\alpha}{x^a}+\frac{\beta}{\gamma^b x^{cb}}=\frac{\alpha}{x^a}\left(1+\frac{\gamma a}{b}x^{c-1}\right).$$

Damit erhalten wir wegen (11), (13) und (15) im Falle $a=b$ zusammenfassend für das Integral (1)

$$(16)\qquad I\sim\sqrt{\frac{2\pi\gamma^{2\nu+1}}{\alpha a(a+1)(1+\gamma)^{2\mu+2\nu+a+3}}}\,s^{\mu+\nu+1+\frac{a}{2}}e^{-\alpha(1+\gamma)^{a+1}s^{-a}}\qquad(s\to 0)$$

mit $\gamma = (\beta/a)^{1/(a+1)}$. Im Falle $a > b$ erhalten wir für (1) unter Beachtung von (12), (14) und (15) die asymptotische Darstellung

$$(17) \qquad I \sim \sqrt{\frac{2\pi\gamma^{2\nu+1}}{aa(b+1)}}\, s^{\mu+c\nu+\frac{a+c+1}{2}} e^{-ax^{-a}\left(1+\frac{\gamma a}{b}x^{c-1}\right)} \qquad (s \to 0),$$

wobei γ und c durch (10) bestimmt sind und $x = x(s)$ aus (9) zu berechnen ist.

Bei der Auflösung von (9) nach x könnten wir uns der asymptotischen Iteration aus [6] bedienen. Wir wollen hier aber anders vorgehen und die Substitution $x = sy$, $\gamma s^{c-1} = z$ vornehmen. Dann nimmt (9) die Gestalt

$$y = 1 - zy^c$$

an, aus der sofort ersichtlich ist, daß y in eine Reihe nach steigenden ganzen Potenzen von z entwickelt werden kann:

$$y = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir für die ersten Koeffizienten

$$(18) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -c, \quad a_3 = \frac{1}{2}c(3c-1), \quad a_4 = -\frac{c}{3}(2c-1)(4c-1).$$

Machen wir die Substitution rückgängig, so erhalten wir die Entwicklung

$$(19) \qquad x = s - s\sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma^n s^{nc-n}.$$

Hieraus folgt

$$(20) \qquad x^{-a} = s^{-a}\Big(1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\gamma^n s^{nc-n}\Big)^{-a} = s^{-a}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{nc-n}\Big)$$

mit

$$(21) \quad b_1 = a\gamma, \quad b_2 = \frac{1}{2}ac\gamma^2(b-1), \quad b_3 = \frac{1}{6}ac\gamma^3(b-2)(a-3c+2),$$

sowie

$$(22) \quad x^{-a+c-1} = s^{-a+c-1}\Big(1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\gamma^n s^{nc-n}\Big)^{-a+c-1} = s^{-a+c-1}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^{nc-n}\Big)$$

mit

$$(23) \qquad c_1 = bc\gamma, \quad c_2 = \frac{1}{2}bc\gamma^2(a-3c+2).$$

Durch Zusammenfassung von (20) und (22) ergibt sich auf der rechten Seite von (17)

$$(24) \qquad ax^{-a}\Big(1 + \frac{\gamma a}{b}x^{c-1}\Big) = as^{-a}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n s^{nc-n}\Big)$$

mit

$$d_n = b_n + \frac{\gamma a}{b}c_{n-1}, \qquad c_0 = 1,$$

so daß die ersten drei Koeffizienten

$$(25) \qquad \begin{aligned} d_1 &= \frac{a\gamma}{b}(b+1), \qquad d_2 = \frac{1}{2}a\gamma^2(a+1), \\ d_3 &= \frac{1}{6}a\gamma^3(a+1)(a-3c+2) \end{aligned}$$

lauten. Die rechte Seite von (24) reduziert sich sogar auf eine endliche Summe. Ist nämlich $-a+nc-n > 0$, d. h. $n > a(b+1)/(a-b)$, so ist $s^{-a+nc-n} = o(1)$ und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden. Es genügt also, in (17) an Stelle von (24)

$$(26) \qquad ax^{-a}\Big(1 + \frac{\gamma a}{b}x^{c-1}\Big) = as^{-a}\Big(1 + \sum_{n=1}^{m} d_n s^{nc-n}\Big)$$

zu wählen, wobei m durch

$$(27) \qquad m = \left[\frac{a(b+1)}{a-b}\right]$$

bestimmt ist. Ist $a(b+1)/(a-b)$ eine ganze Zahl, so ist $-a+mc-m = 0$, so daß der Koeffizient von s^0 in (17) lediglich den Beitrag e^{-ad_m} zum konstanten Vorfaktor liefert. Allgemein sehen wir daher, daß wir auf der rechten Seite von (26) höchstens $(m+1)$ Potenzen von s mit negativen Exponenten erhalten, wenn statt (27) $m < a(b+1)/(a-b) \leqslant m+1$ oder

$$(28) \qquad \frac{(m-1)a}{m+a} < b \leqslant \frac{ma}{m+1+a}$$

ist. In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ treten auch genau 2 bzw. 3 solche Potenzen auf, da die Koeffizienten d_1 und d_2 wegen (25) nicht verschwinden können. Dagegen ist $d_3 = 0$ für $a-3c+2 = 0$, d. h. wegen (10) für

$$(29) \qquad b = \frac{2a+1}{a+2}.$$

Dieser Wert b ist für $a > 1$ kleiner als a. Darüber hinaus genügt er der Ungleichung (28) mit $m = 3$, wenn

$$a \geqslant 4 \tag{30}$$

ist. Folglich treten in dem Fall (29), (30) auf der rechten Seite von (26) nicht 4 sondern nur 3 Potenzen von s mit negativen Exponenten auf. Eine entsprechende Diskussion kann man auch für größere m durchführen, man braucht lediglich weitere Koeffizienten d_m zu berechnen.

Die Richtigkeit der Formeln (16) und (17) findet man bestätigt, wenn man die Gleichung

$$\int_0^s e^{-g(s,t)} g_1(s,t)\,dt = 0$$

wegen (7) in der Form

$$\alpha a \int_0^s e^{-g(s,t)} t^{-a-1}\,dt = \beta b \int_0^s e^{-g(s,t)} (s-t)^{-b-1}\,dt$$

schreibt und auf beide Seiten dieser Gleichung die Formel (17) bzw. (16) anwendet. Um dies einzusehen, braucht man nur die Formeln (14) bzw. (13) heranzuziehen und die Fälle $\mu = -a-1$, $\nu = 0$ und $\mu = 0$, $\nu = -b-1$ zu betrachten. Eine weitere Kontrollmöglichkeit erhält man, wenn man den oben angedeuteten Weg über die Laplace-Transformation formal durchrechnet.

Zitatennachweis

[1] L. Berg, *Asymptotische Darstellungen für Integrale und Reihen mit Anwendungen*, Math. Nachrichten 17 (1958), S. 101-135.

[2] — *Praktische Herleitung asymptotischer Darstellungen*, Z. ang. Math. Mech. 38 (1958), S. 260-261.

[3] — *Verallgemeinerungen des Kriteriums von Herrn H. Schubert*, Math. Nachr. 20 (1959), S. 159-165.

[4] — *Über das asymptotische Verhalten der Laplace-Transformation* (Fortsetzung), ibidem 17 (1958), S. 57-61.

[5] — *Über das asymptotische Verhalten der inversen Laplace-Transformation*, ibidem (im Druck).

[6] — *Asymptotische Auflösung von Differential-Funktionalgleichungen*, ibidem 17 (1959), S. 195-210.

Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Spaces of continuous functions (V)

(On linear isotonical embedding of $C(\Omega_1)$ into $C(\Omega_2)$)

by

K. GĘBA (Toruń) and Z. SEMADENI (Poznań)

1. Introduction. In the sequel Ω will denote a compact Hausdorff space, and $C(\Omega)$ will denote the Banach lattice of all real-valued continuous functions defined on Ω. By a well-known theorem (established, in various forms, by Banach, M. H. Stone, I. Gelfand and A. Kolmogoroff, S. Eilenberg, I. Kaplansky and others; see [2], p. 170, [23], p. 469, [9], [7], [14]), the space $C(\Omega)$ determines Ω topologically. Thus, the topological properties of Ω determine the linear, metric and lattice properties of $C(\Omega)$, and conversely.

From the topological point of view, the relation *a space Ω_1 is smaller than Ω_2* may be defined variously (e. g. it might mean that $\Omega_1 \underset{\text{top}}{\subset} \Omega_2$, or that Ω_1 is a continuous image of Ω_2). On the other hand, functional analysis gives also many definitions of the relation *a space $C(\Omega_1)$ is smaller than $C(\Omega_2)$* (such a definition may be based on the linear dimension, on isometrical or isotonical embedding, and so on).

These notions suggest the problem whether the statement *Ω_1 is smaller than Ω_2* implies the statement *$C(\Omega_1)$ is smaller than $C(\Omega_2)$* and whether the converse implication is true, both notions *smaller* being suitably defined.

The methods and results of both parts of this general problem — the part concerning topological embedding and that concerning continuous images — are mutually different; moreover, the first part is more difficult and the issues are not complete.

The problem of necessary and sufficient conditions for Ω_0 to be a continuous image of a compact Hausdorff space Ω is completely solved by the following theorem of M. H. Stone ([1]): *Ω_0 is a continuous image of a com-*

([1]) This theorem may be formulated in various ways (e. g. in ring terms or in lattice terms). It has been proved and discussed by M. H. Stone ([23], p. 475), G. Šilov [21], H. Yoshizawa [24], S. B. Myers ([17], p. 240), Ky Fan [8], K. Gęba and Z. Semadeni [11]. It is closely related to the Stone-Weierstrass approximation theorem and to the theory of semicontinuous decompositions of a compact set Ω.