[19] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), p. 209-228.

[20] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), p. 516-541.

[21] G. Silov, *Ideals and subrings of the ring of continuous functions*, Doklady 22 (1939), p. 7-10.

[22] A. Sobczyk, *Projection of the space m on its subspace c_0*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), p. 938-947.

[23] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), p. 375-481.

[24] H. Yoshizawa, *On simultaneous extensions of continuous functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), p. 653-654.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs (IV)

(Opérations linéaires)

par

N. DINCULEANU (Bucarest)

Introduction. Soient Z un espace localement compact et ν une mesure de Radon (1) positive sur Z; $\mathcal{E} = (E(z))_{z\in Z}$ une famille d'espaces de Banach et $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z\in Z}$ la famille des duals des espaces $E(z)$.

Désignons par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ (respectivement $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$) l'ensemble des champs de vecteurs (2) $\boldsymbol{x}$ (resp. de fonctionnelles $\boldsymbol{x}'$) définis sur Z tels que $\boldsymbol{x}(z)\in E(z)$ (resp. $\boldsymbol{x}'(z)\in E'(z)$) quel que soit $z\in Z$.

Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(\mathcal{E})$ de champs de vecteurs continus et une famille fondamentale $\mathcal{A}'\subset\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ de champs de fonctionnelles continus vérifiant la condition suivante:

La fonction scalaire $z\to\langle\boldsymbol{x}(z),\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ est continue quels que soient $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ et $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{A}'$.

Soit X un espace de Banach et pour tout $z\in Z$ désignons par $G(z)$ l'espace $\mathcal{L}(E(z), X)$ (des applications linéaires et continues de $E(z)$ dans X), par $\mathcal{G}$ la famille $(G(z))_{z\in Z}$ et par $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ l'ensemble des champs d'opérations U définis sur Z tels que $U(z)\in G(z)$ quel que soit $z\in Z$.

Soient φ une fonction positive définie sur $[0, +\infty]$, croissante, continue à gauche, telle que $\varphi(0) = 0$ et $0<\varphi(t)<\infty$ pour $0<t<+\infty$, ψ la fonction inverse de φ, Φ et Ψ les fonctions définies sur $[0, +\infty]$ par les égalités

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt, \qquad \Psi(v) = \int_0^v \psi(s)\,ds.$$

Considérons l'espace d'Orlicz (3) $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$.

Dans [4] nous avons montré que si: 1) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 1$, 2) *il existe* $M>0$

(1) Pour ce qui concerne l'intégration voir [1].

(2) Pour ce qui concerne les champs de vecteurs voir [8].

(3) Pour la définition et les propriétés des espaces $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ voir un des ouvrages [2], [3], [4], [5].

tel que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ *pour* $u \geqslant 0$, 3) $\mathcal{A}$ *vérifie l'axiome* (G) (4) *de Godement*, 4) X *est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach* F; *alors toute application linéaire et continue* f *de* $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ *dans* X *peut s'écrire*

$$\langle a, f(x)\rangle = \int \langle a, U_f(z)x(z)\rangle d\nu(z) \quad \textit{pour} \quad x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu) \ \textit{et} \ a \in F,$$

où $U_f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ *et* $\frac{1}{2}\|U_f\|_{\Psi} \leqslant \|f\| \leqslant \|U_f\|_{\Psi}$.

Dans cet article, en ne supposant plus la condition 1), on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ dans X admette une représentation intégrale de la forme précédente.

La démonstration utilise la théorie des mesures vectorielles, [6], [7], dont un bref exposé sera donné dans la suite.

1. Mesures vectorielles. La norme d'un élément x appartenant à l'un des espaces $E(z)$, $E'(z)$ ou X sera notée par $|x|$. Si $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, on désigne par $|x|$ la fonction numérique $z \to |x(z)|$.

Pour tout ensemble $A \subset Z$ et tout $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ on pose

$$\|x\|_A = \sup_{z \in A} |x(z)|.$$

Soit $\mathcal{B}$ le clan des parties boréliennes relativement compactes de Z.

En ajoutant, au besoin, à $\mathcal{A}$, des champs de vecteurs continus, on peut supposer que $\mathcal{A}$ vérifie la condition suivante:

(*) *Quels que soient* $A, B \in \mathcal{B}$, *tels que* $A \subset B$, $\varepsilon > 0$ *et* $x \in \mathcal{A}$, *il existe* $y \in \mathcal{A}$ *tel que* $\varphi_A x = \varphi_A y$ *et* $\|y\|_B \leqslant \|x\|_A + \varepsilon$.

On considère sur $\mathcal{A}$ la topologie d'espace localement convexe séparé, définie par la famille filtrante de seminormes $(\|x\|_A)_{A \in \mathcal{B}}$. Par $\mathcal{A}_A$ on désigne l'ensemble $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur A, définie par la seule séminorme $\|x\|_A$.

$\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, X)$ est l'espace de Banach des applications linéaires et continues U de $\mathcal{A}_A$ dans X, muni de la topologie définie par la norme

$$\|U\|_A = \sup_{\|x\|_A \leqslant 1} |Ux|.$$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}, X)$ est l'espace des applications linéaires et continues de $\mathcal{A}$ dans X. On a

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, X) = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, X).$$

Si $\boldsymbol{m}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, X)$ telle que $\boldsymbol{m}(A)x = \boldsymbol{m}(A)y$ si $\varphi_A x = \varphi_A y$, $(x, y \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{B})$, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $\boldsymbol{m}(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, X)$ et $\|\boldsymbol{m}(A)\|_A = \|\boldsymbol{m}(A)\|_B$ quel que soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$.

(4) (G): il existe une partie dénombrable $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ telle que l'ensemble $\{x(z) \mid x \in \mathcal{A}_0\}$ soit dense dans $E(z)$ quel que soit $z \in Z$.

Cette propriété nous permet d'écrire $\|\boldsymbol{m}(A)\|$ au lieu de $\|\boldsymbol{m}(A)\|_A$. Si (A_n) est une suite d'ensembles de $\mathcal{B}$ dont la réunion A appartient à $\mathcal{B}$, les normes $\|\boldsymbol{m}(A_n)\|$ séront calculés par rapport à un ensemble quelconque $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$. La relation $\boldsymbol{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{m}(A_n)$ signifie que la série est convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}_B, X)$ et que sa somme est $\boldsymbol{m}(A)$.

Définition. *On appelle mesure vectorielle sur* Z *toute application* $\boldsymbol{m}$ *de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{A}, X)$ *telle que*:

1° *pour tout* $x, y \in \mathcal{A}$ *et* $A \in \mathcal{B}$ *vérifiant* $\varphi_A x = \varphi_A y$ *on a*

$$\boldsymbol{m}(A)x = \boldsymbol{m}(A)y;$$

2° *pour toute suite* (A_n) *d'ensembles disjoints de* $\mathcal{B}$ *dont la réunion appartient à* $\mathcal{B}$ *on a*

$$\boldsymbol{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{m}(A_n).$$

À chaque mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$ on attache sa *variation* μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}$ par l'égalité

$$\mu(A) = \sup \sum_i \|m(A_i)\|,$$

le sup étant considéré pour toutes les familles finies (A_i) d'ensembles disjoints de $\mathcal{B}$ dont la réunion est A.

La variation μ de $\boldsymbol{m}$ est une fonction d'ensemble positive (finie ou infinie), croissante, dénombrablement additive, et

$$\|\boldsymbol{m}(A)\| \leqslant \mu(A) \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B}.$$

On dit que $\boldsymbol{m}$ est à *variation finie* si $\mu(A) < +\infty$ quel que soit $A \in \mathcal{B}$.

Une mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$ est *régulière* si, quels que soient $A \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ et un ouvert relativement compact $G \supset A$, tels que si $A' \in \mathcal{B}$ et $K \subset A' \subset G$, on ait $\|\boldsymbol{m}(A) - \boldsymbol{m}(A')\| < \varepsilon$.

Une mesure vectorielle à variation finie est régulière, si et seulement si sa variation est régulière.

2. Intégration des champs de vecteurs par rapport à une mesure vectorielle. Soit $\boldsymbol{m}$ une mesure vectorielle *régulière* et *à variation finie* μ.

On dit qu'un champ de vecteurs $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est *intégrable* par rapport à $\boldsymbol{m}$ (ou $\boldsymbol{m}$-intégrable), si x est μ-intégrable. On désigne par $L^1_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{m})$ l'espace des champs de vecteurs $\boldsymbol{m}$-intégrable $(L^1_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{m}) = L^1_{\mathcal{A}}(\mu))$ muni de la topologie définie par la seminorme

$$N_1(x, \mu) = \int |x| d\mu.$$

Pour définir l'intégrale $\int x\,dm$ de x par rapport à m, on considère d'abord les champs de vecteurs *étagés*, de la forme

$$x = \sum_i \varphi_{A_i} x_i \quad (A_i \in \mathcal{B},\ x_i \in \mathcal{A},\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Pour un tel champ de vecteurs étagé on définit l'intégrale $\int x\,dm$ par l'égalité

$$\int x\,dm = \sum_i m(A_i) x_i.$$

Puisque μ est régulière, l'espace $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(Z)$ des champs de vecteurs étagés est dense dans $L^1_{\mathcal{A}}(m)$. Pour tout $x \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(Z)$ on a

$$\left|\int x\,dm\right| \leqslant \int |x|\,d\mu = N_1(x, \mu),$$

donc l'application $x \to \int x\,dm$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(Z)$ dans X est continue pour la topologie définie sur $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(Z)$ par la séminorme N_1 et par suite peut être prolongée uniquement, par continuité, en une application linéaire et continue de $L^1_{\mathcal{A}}(m)$ dans X. La valeur de ce prolongement pour un élément $x \in L^1_{\mathcal{A}}(m)$, notée toujours par $\int x\,dm$, est appelée *l'intégrale de x par rapport à m*.

Pour tout $x \in L^1_{\mathcal{A}}(m)$ on a $|x| \in L^1(\mu)$ et

$$\left|\int x\,dm\right| \leqslant \int |x|\,d\mu.$$

La relation entre les intégrales par rapport à m et μ est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome (G) et F est un espace de Banach de type dénombrable, pour toute mesure vectorielle m à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F')$, régulière et à variation finie μ, il existe un champ d'opérations $U_m \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ déterminé localement μ-presque partout, tel que $\|U_m(z)\| \equiv 1$ et*

$$\langle a, \int x\,dm\rangle = \int \langle a, U_m(z)x(z)\rangle\,d\mu(z),$$

quels que soient $a \in F$ et $x \in L^1_{\mathcal{A}}(m)$. Si, en outre, F' est de type dénombrable, alors

$$\int x\,dm = \int U_m(z)x(z)\,d\mu(z) \quad \textit{pour} \quad x \in L^1_{\mathcal{A}}(m).$$

Ce théorème sera utilisé dans la démonstration du théorème de représentation annoncé au commencement.

3. Le théorème de représentation. Dans ce paragraphe on suppose que X est le dual F' d'un espace de Banach F.

Soit f une application linéaire de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ dans F'. Posons

$$|||f||| = \sup \sum_i |f(\varphi_{A_i} x_i)| \quad \text{et} \quad \|f\| = \sup \Big|\sum_i f(\varphi_{A_i} x_i)\Big|,$$

le sup étant considéré pour toutes les familles finies $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{B}$ et toutes les familles finies $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, telles que $\|\sum_i \varphi_{A_i} x_i\|_{\Phi} \leqslant 1$.

On a évidemment

$$\|f\| \leqslant |||f||| \leqslant +\infty.$$

Remarque. S'il existe $M > 0$ tel que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pour $u \geqslant 0$, alors l'espace $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(Z)$ est dense dans $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$, donc $\|f\|$ est la norme habituelle de f.

THÉORÈME 2. *Supposons que: 1) il existe $M > 0$ tel que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pour tout $u \geqslant 0$; 2) $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome (G); 3) F est de type dénombrable. Alors $|||f||| < +\infty$ si, et seulement si, il existe un champ d'opérations $U_f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ tel que $\|U_f\|_{\Psi} < +\infty$ et*

$$\langle a, f(x)\rangle = \int \langle a, U_f(z)x(z)\rangle\,d\nu(z)$$

quels que soient $a \in F$ et $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$. Dans ce cas on a

$$\tfrac{1}{2}\|U_f\|_{\Psi} \leqslant |||f||| \leqslant \|U_f\|_{\Psi}.$$

Démonstration. On peut considérer que $\mathcal{A}$ vérifie la condition (*), en lui ajoutant, au besoin, des champs de vecteurs continus.

Supposons d'abord que $|||f||| < +\infty$. Posons

$$M_B(\varphi)x = f(\varphi x \varphi_B), \quad B \in \mathcal{B},\ \varphi \in L^{\Phi}(\nu),\ x \in \mathcal{A}.$$

L'application $M_B(\varphi): x \to M_B(\varphi)x$ de $\mathcal{A}$ dans F' est linéaire et *continue* pour la séminorme $\|x\|_B$, car

$$|M_B(\varphi)x| = |f(\varphi x \varphi_B)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|_B \cdot \|\varphi\|_{\Phi},$$

donc $M_B(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F')$ et $\|M_B(\varphi)\|_B \leqslant \|f\| \cdot \|\varphi\|_{\Phi}$.

Pour chaque ensemble $A \in \mathcal{B}$ posons $m(A) = M_A(\varphi_A\cdot)$ Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$ on a $m(A) = M_B(\varphi_A)$.

Montrons que m est une mesure vectorielle régulière, dont la variation μ est finie et de base ν.

a) Il est aisé de voir que si $A \in \mathcal{B}$ et $x, y \in \mathcal{A}$ sont tels que $\varphi_A x = \varphi_A y$, alors

$$m(A)x = m(A)y.$$

b) Soit (A_n) une suite d'ensemble disjoints de $\mathcal{B}$, dont la réunion A appartient à $\mathcal{B}$, et soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi\Big(\varphi_A - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\Big)\, d\nu = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|\varphi_A - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\Big\|_\Phi = 0$$

(à cause de la condition 1).

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| M_B(\varphi_A) - \sum_{i=1}^{n} M_B(\varphi_{A_i})\Big\|_B = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|\boldsymbol{m}(A) - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}(A_i)\Big\|_B = 0,$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{m}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{m}(A_i).$$

Les propriétés a) et b) montrent que $\boldsymbol{m}$ est une *mesure vectorielle*.

c) Pour montrer que $\boldsymbol{m}$ est à *variation finie* μ, soit $A \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$; soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles disjoints de $\mathcal{B}$, dont la réunion est A.

Pour chaque i, soit $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{A}$ tel que $\|\boldsymbol{x}_i\|_A \leqslant 1$ et

$$\|\boldsymbol{m}(A_i)\| - \frac{\varepsilon}{n} < |\boldsymbol{m}(A_i)\boldsymbol{x}_i|.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{m}(A_i)\| - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{m}(A_i)\boldsymbol{x}_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| \leqslant |||f|||\cdot\Big\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i\Big\|_\Phi$$
$$\leqslant |||f|||\cdot\Big\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}\Big\|_\Phi = |||f|||\cdot\|\varphi_A\|_\Phi,$$

donc $\mu(A) - \varepsilon < |||f|||\cdot\|\varphi_A\|_\Phi$.

ε étant arbitraire, on déduit $\mu(A) \leqslant |||f|||\cdot\|\varphi_A\|_\Phi < +\infty$.

d) μ est *absolument continue* par rapport à ν. En effet, soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $\nu(A) = 0$. Alors $\|\varphi_A\|_\Phi = 0$ et de l'inégalité précédente on déduit que $\mu(A) = 0$.

e) Puisque ν est régulière, il s'ensuit que μ est régulière, donc aussi $\boldsymbol{m}$ est *régulière*.

Du théorème 1 on déduit qu'il existe un champ d'opérations $U_{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ tel que $\|U_{\boldsymbol{m}}(z)\| \equiv 1$ et

$$\langle a, \int \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{m}\rangle = \int \langle a, U_{\boldsymbol{m}}(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\mu(z) \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{x} \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu) \text{ et } a \in F.$$

Puisque μ est de base ν, il existe une fonction positive g localement ν-intégrable telle que $\varphi \in L^1(\mu)$ si et seulement si $\varphi g \in L^1(\nu)$, et alors

$$\int \varphi\, d\mu = \int \varphi g\, d\nu \quad \text{pour} \quad \varphi \in L^1(\mu)$$

f) Montrons que $g \in L^\Psi(\nu)$.

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i$ une fonction positive étagée, telle que les A_i soient disjoints. Alors

$$\int \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) c_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque i, il existe une famille finie $(B_{ij})_j$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{B}$ dont la réunion est A_i, telle que

$$\mu(A_i)c_i < \sum_j \|m(B_{ij})\| c_i + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Pour chaque paire d'indices (i, j), il existe un champ de vecteurs $\boldsymbol{x}_{ij} \in \mathcal{A}$, tel que $\|\boldsymbol{x}_{ij}\|_A \leqslant 1$, où $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et

$$\sum_j \|\boldsymbol{m}(B_{ij})\| c_i \leqslant \sum_j |\boldsymbol{m}(B_{ij})\boldsymbol{x}_{ij}| c_i + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Alors

$$\int \varphi\, d\mu - \varepsilon = \sum_i \mu(A_i)c_i - \varepsilon < \sum_{i,j} |\boldsymbol{m}(B_{ij})\boldsymbol{x}_{ij} c_i|$$
$$= \sum_{i,j} |f(\varphi_{B_{ij}}\boldsymbol{x}_{ij} c_i)| \leqslant |||f|||\cdot\Big\|\sum_{i,j} \varphi_{B_{ij}}\boldsymbol{x}_{ij} c_i\Big\|_\Phi$$
$$\leqslant |||f|||\cdot\Big\|\sum_{i,j} \varphi_{B_{ij}} c_i\Big\|_\Phi = |||f|||\Big\|\sum_i \varphi_{A_i} c_i\Big\|_\Phi$$
$$= |||f|||\cdot\|\varphi\|_\Phi \leqslant |||f|||(|\varphi|_\Phi + 1).$$

ε étant arbitraire, on a

$$\int \varphi\, d\mu \leqslant |||f|||\cdot\|\varphi\|_\Phi \leqslant |||f|||(|\varphi|_\Phi + 1).$$

De cette inégalité on déduit d'abord que $L^{\Phi}(\nu) \subset L^1(\mu)$ et puis

$$\|g\|_{\Psi} = \sup_{|\varphi|_{\Phi}\leqslant 1} \int |\varphi g|\, d\nu = \sup_{|\varphi|_{\Phi}\leqslant 1} \int |\varphi|\, d\mu \leqslant 2|||f||| < +\infty.$$

g) Posons maintenant

$$U_f(z) = U_m(z)g(z).$$

On a $|U_f(z)| = g(z)$, donc $\|U_f\|_{\Psi} = \|g\|_{\Psi} \leqslant 2|||f|||$.

D'autre part, pour tout $a \in F$ et $\boldsymbol{x} \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ on a

$$\langle a, \int \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{m}\rangle = \int \langle a, U_{\boldsymbol{m}}(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\mu(z)$$
$$= \int \langle a, U_{\boldsymbol{m}}(z)g(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z) = \int \langle a, U_f(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z).$$

En particulier, cette égalité est vraie pour tout $\boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$.

h) Démontrons maintenant la formule de représentation et les inégalités énoncées dans le théorème 2.

Pour tout champ de vecteurs étagé $\boldsymbol{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i$ on a

$$\int \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{m} = \sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\boldsymbol{x}_i = \sum_i f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i) = f\Big(\sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i\Big) = f(\boldsymbol{x}),$$

donc, pour tout $a \in F$,

$$\langle a, f(\boldsymbol{x})\rangle = \int \langle a, U_f(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z).$$

Alors, en supposant que les A_i sont disjoints,

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| \leqslant \sum_i \int_{A_i} \|U_f(z)\|\|\boldsymbol{x}_i(z)\|\, d\nu(z)$$
$$= \int \|U_f(z)\|\cdot\Big\|\sum_i \varphi_{A_i}(z)\boldsymbol{x}_i(z)\Big\|\, d\nu(z) \leqslant \|U_f\|_{\Psi}\Big\|\sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i\Big\|_{\Phi},$$

donc $|||f||| \leqslant \|U_f\|_{\Psi}$, d'où il résulte que

$$\tfrac{1}{2}\|U_f\|_{\Psi} \leqslant |||f||| \leqslant \|U_f\|_{\Psi}.$$

Soit maintenant $\boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$. À cause de la condition 1), les champs de vecteurs étagés de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ forment un ensemble dense dans $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$; donc il existe une suite $(\boldsymbol{x}_n)$ de champs de vecteurs étagés de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$, telle que $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\|_{\Phi} \to 0$. Alors $f(\boldsymbol{x}_n) \to f(\boldsymbol{x})$ et $\int \boldsymbol{x}_n\, d\boldsymbol{m} \to \int \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{m}$, donc $f(\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{m}$ et

$$\langle a, f(\boldsymbol{x})\rangle = \int \langle a, U_f(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z), \quad a \in F,$$

ce qui achève la première partie de la démonstration.

Inversement, soit $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ un champ d'opérations tel que pour chaque $\boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ et chaque $a \in F$, la fonction $z \to \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle$ soit ν-intégrable, et que $\|U\|_{\Psi} < +\infty$. L'application

$$a \to \int \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z)$$

est une forme linéaire et continue sur F, car

$$\Big|\int \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z)\Big| \leqslant |a| \int \|U(z)\|\cdot|\boldsymbol{x}(z)|\, d\nu(z) \leqslant |a|\,\|U\|_{\Psi}\cdot\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi}.$$

Désignons par $f(\boldsymbol{x})$ cette forme linéaire:

$$\langle a, f(\boldsymbol{x})\rangle = \int \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z), \quad a \in F,\ \boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu).$$

Il est immédiat que f est une application linéaire de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$ dans F'. Montrons que $|||f||| < +\infty$.

Soit $\boldsymbol{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i$ un champ de vecteurs étagé tel que les A_i soient disjoints et que $\|\sum \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i\|_{\Phi} \leqslant 1$.

Pour chaque i il existe $a_i \in F$ tel que $|a_i| = 1$ et que

$$|f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| = \langle a_i, f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)\rangle.$$

Alors

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| = \sum_i \langle a_i, f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)\rangle = \int \sum_i \langle a_i, U(z)\varphi_{A_i}(z)\boldsymbol{x}_i(z)\rangle\, d\nu(z)$$
$$\leqslant \int \|U(z)\| \sum_i \varphi_{A_i}(z)|\boldsymbol{x}_i(z)|\, d\nu(z) = \int \|U(z)\|\cdot\Big|\sum_i \varphi_{A_i}(z)\boldsymbol{x}_i(z)\Big|\, d\nu(z)$$
$$\leqslant \|U\|_{\Psi}\Big\|\sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i\Big\|_{\Phi} \leqslant \|U\|_{\Psi},$$

donc $|||f||| \leqslant \|U\|_{\Psi} < +\infty$.

Il reste à montrer l'unicité de U_f. Soient $U, U' \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ tels que

$$\int \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z) = \int \langle a, U'(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z)$$

quels que soient $a \in F$ et $\boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$.

Pour a et $\boldsymbol{x}$ fixes et $A \in \mathcal{B}$ quelconque on a

$$\int_A \langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z) = \int_A \langle a, U'(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle\, d\nu(z),$$

donc il existe un ensemble localement ν-négligeable $N(a, \boldsymbol{x})$ tel que pour $z \notin N(a, \boldsymbol{x})$ on ait

$$\langle a, U(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle = \langle a, U'(z)\boldsymbol{x}(z)\rangle.$$

Soit (a_n) une suite dense dans F et posons $N(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N(a_n, \boldsymbol{x})$; $N(\boldsymbol{x})$ est localement ν-négligeable et pour $z \notin N(\boldsymbol{x})$ on a

$$U(z)\boldsymbol{x}(z) = U'(z)\boldsymbol{x}(z).$$

Enfin si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ est une partie dénombrable telle que l'ensemble $\{\boldsymbol{x}(z) | \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_0\}$ soit dense dans $E(z)$ quel que soit $z \in Z$, (axiome (G)), en posant $N = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_0} N(\boldsymbol{x})$, N est localement ν-négligeable et pour $z \notin N$ on a $U(z) = U'(z)$.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarques. 1° Si l'espace F' est de type dénombrable, la fonction $z \to U_f(z)x(z)$ est ν-mesurable quel que soit $\boldsymbol{x}$ ν-mesurable; donc, dans ce cas, la formule de représentation s'écrit

$$f(\boldsymbol{x}) = \int U_f(z)\boldsymbol{x}(z)d\nu(z), \qquad \boldsymbol{x} \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu).$$

2° Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$ vérifiant l'axiome (G) et la condition suivante:

La fonction $z \to U(z)\boldsymbol{x}(z)$, (à valeurs dans F') *est continue quels que soient* $U \in \mathcal{D}$ *et* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$.

Dans ce cas la fonction $z \to U_f(z)$ est ν-mesurable, donc $U_f \in L^{\Psi}_{\mathcal{D}}(\nu)$.

3° Si $F = C$, alors $|||f||| = \|f\|$. En effet, si $\boldsymbol{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i$ est un champ de vecteurs étagé, tel que les A_i soient disjoints et que $\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi} \leqslant 1$, alors, pour chaque i il existe un nombre complexe θ_i tel que $|\theta_i| = 1$ et que

$$|f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| = \theta_i f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i) = f(\varphi_{A_i}\theta_i\boldsymbol{x}_i).$$

Alors

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\boldsymbol{x}_i)| = f\Big(\sum_i \varphi_{A_i}\theta_i\boldsymbol{x}_i\Big) \leqslant \|f\|\cdot\Big\|\sum \varphi_{A_i}\theta_i\boldsymbol{x}_i\Big\|_{\Phi} \leqslant \|f\|,$$

d'où l'on déduit que $|||f||| \leqslant \|f\|$, donc $|||f||| = \|f\|$.

Le théorème 2 de cet article contient donc le théorème 2 de [3] concernant la représentation intégrale des fonctionnelles linéaires et continues sur $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}(\nu)$.

Travaux cités

[1] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. I-IV, 1952, chap. V, 1956.

[2] N. Dinculeanu, *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs I*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 22 (1957), p. 135-139.

[3] — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs II*, ibidem 22 (1957), p. 239-275.

[4] — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs III*, Studia Math. 17 (1958), p. 285-293.

[5] — *Spații Orlicz de cîmpuri de vectori*, Studii și cercetări matematice 8 (1957), p. 343-412.

[6] N. Dinculeanu et C. Foiaş, *Mesures vectorielles et opérations linéaires sur* L^p_E, C. R. Acad. Sci. 248 (1959), p. 1759-1762.

[7] — *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires IV* (à paraître).

[8] R. Godement, *Sur la théorie des représentations linéaires*, Annals of Math. 53 (1951), p. 68-124.

[9] М. А. Красносельский и И. Б. Рутицкий, *Линейные функционалы в пространствах Орлича Δ*, А. Н. 97. 4 (1954), p 68-124

[10] — *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[11] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B*, Bull. Intern. Acad. Pol., Classe A (1932), p. 207-220.

[12] A. C. Zaanen, *On a certain class of Banach spaces*, Annals of Math. 47 (1946), p. 654-666.

[13] — *Linear Analysis*, New York-Amsterdam 1953.

Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1960