[3] — *The two-norm spaces and their conjugate spaces*, ibidem 18 (1959), p. 275-293.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[5] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Ergebnisse der Mathematik 21, Berlin 1958.

[6] J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. Journal 15 (1948), p. 1057-1071.

[7] W. F. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. of Sci. 33 (1947), p. 51-53.

[8] M. Eidelheit, *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 6 (1936), p. 104-111.

[9] E. Helly, *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlichen vielen Unbekannten*, Monatshefte Math. Phys. 31 (1921), p. 60-91.

[10] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52 (1950), p. 518-527.

[11] S. Kakutani, *Weak topology and regularity of Banach spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 15 (1939), p. 169-173.

[12] S. Mazur and W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (II)*, Studia Math. 13 (1953), p. 137-179.

[13] S. Mazurkiewicz, *Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires*, ibidem 2 (1930), 68-71.

[14] W. Orlicz and V. Pták, *Some remarks on Saks spaces*, ibidem 16 (1957), p. 56-68.

[15] A. Sobczyk, *On the extension of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), p. 153-169.

Reçu par la Rédaction le 11. 5. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren

von

G. GOES (Ludwigsburg)

1. Einleitung (¹). Die Absicht dieser Note ist es zu zeigen, wie der bekannte Satz von Schur-Bosanquet über Summierbarkeitsfaktoren mit einem Schlag verschiedene bekannte und neue Kriterien für Fourierkoeffizienten liefert, wenn man die in den Arbeiten [13] und [14] eingeführte Theorie komplementärer Fourierkoeffizientenräume heranzieht. Abschnitt 2 enthält einige Raumdefinitionen, Abschnitt 3 enthält Aussagen über Fourierkoeffizienten, welche das bekannte Kriterium von Kolmogoroff [26] und seine Verallgemeinerungen durch Moore [30], [31] und Cesari [7] enthalten. Abschnitt 4 enthält neue Aussagen über Multiplikatoren, welche teilweise auch mit dem Satz von Schur-Bosanquet bewiesen werden und Verallgemeinerungen bekannter Aussagen. Abschnitt 5 enthält ergänzende Bemerkungen und auch ergänzende Literaturhinweise zu den Arbeiten [11], [13] und [14].

2. Definitionen. Wir verwenden die in den Arbeiten [13] und [14] eingeführten Symbole und Vereinbarungen und verweisen auf die dortigen ausführlichen Raumdefinitionen für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C, V, A, die zugeordneten komplementären Räume E^* und die zugeordneten Stieltjes-Räume dE. Die in [13] und [14] mit $(C_1-E)^*$ bezeichneten C_1-komplementären Räume bezeichnen wir hier — wie in [15] — kürzer durch das Symbol E^{1*}. Neu hinzu kommen die folgenden Räume:

1) Ist $E \subset P_\infty$ (P_∞ = Menge der trigonometrischen Reihen) und E ein BK-Raum, so ist E_{kN} $(0 \leqslant k < \infty)$ die Untermenge von E in der das trigonometrische Orthogonalsystem eine C_k-Basis bildet, d. h. es ist genau dann

$$\mathring{f} \equiv (a_j, b_j) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \in E_{kN} \qquad (0 \leqslant k < \infty),$$

(¹) Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre finanzielle Unterstützung bei der Abfassung der vorliegenden Note.

wenn $\mathring{f}\epsilon E$ und wenn für die n-ten Teilsummen $\sigma_n^k(\mathring{f})$ der Cesàrosumme k-ter Ordnung von $\mathring{f}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n^k(\mathring{f})-\mathring{f}\|_E = 0.$$

Es sei $E_{0N} = E_N$.

2) S ist der Raum der reellen Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_j\}$ für die $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ existiert. Mit der Norm $\|\mathfrak{a}\|_S = \sup_n |\sum_{j=1}^{n} a_j|$ ist S bekanntlich ein BK-Raum.

3) S_k $(0 \leqslant k < \infty)$ ist der Raum der reellen Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_j\}$ für die die Cesàrosumme k-ter Ordnung $C_k - \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ existiert. Ist $\sigma_n^k(\mathfrak{a})$ die n-te Teilsumme dieser Summe, so ist S_k mit der Norm $\|\mathfrak{a}\|_{S_k} = \sup_n |\sigma_n^k(\mathfrak{a})|$ ein BK-Raum. Es ist also $S_0 = S$.

4) $'S_k$ $(0 \leqslant k < \infty)$ ist der Raum der reellen Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_j\}$ für die $\sup_n |\sigma_n^k(\mathfrak{a})| < \infty$ ist. Mit der Norm $\|\mathfrak{a}\|_{'S_k} = \sup_n |\sigma_n^k(\mathfrak{a})|$ ist auch $'S_k$ ein BK-Raum.

Vereinbarung. Wir verwenden die Symbole S_k und $'S_k$ auch für die Räume der Kosinusreihen deren Koeffizienten zu S_k beziehungsweise zu $'S_k$ gehören und schreiben dann auch etwa $\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jt\|_{S_k} = \|\mathfrak{a}\|_{S_k}$. Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich sein, wie die Symbole S_k und $'S_k$ zu verstehen sind.

5) $(E \to E_1)$ ist der E_1-komplementäre Raum zu E und folgendermaßen definiert: Sind E und E_1 Räume $\subset P_\infty$, so ist genau dann $\mathring{g} = (c_j, d_j)\,\epsilon\,(E \to E_1)$, wenn für jedes $\mathring{f} = (a_j, b_j)\,\epsilon\,E$ gilt

$$\mathring{h}(x) = \langle \mathring{f}(t), \mathring{g}(t-x)\rangle = \langle \mathring{f}, \mathring{g}(t-x)\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} [(a_j c_j + b_j d_j)\cos jx - (a_j d_j - b_j c_j)\sin jx]\,\epsilon\,E_1.$$

Ist E so beschaffen, daß gewisse der Koeffizienten a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots)$ null sind für alle $\mathring{f}\epsilon E$, so gelte dasselbe für die entsprechenden Koeffizienten c_j, d_j $(j = 1, 2, \ldots)$ aller $\mathring{g}\,\epsilon\,(E \to E_1)$.

Sind E und E_1 als Folgenräume mit den Folgenpaaren $\{a_j, b_j\}$ und $\{a_j c_j + b_j d_j, -a_j d_j + b_j c_j\}$ als Elementen der BK-Räume, so ist $(E \to E_1)$ ebenfalls ein BK-Raum mit der Norm für $\mathring{g}\,\epsilon\,(E \to E_1)$

$$\|\mathring{g}\|_{(E\to E_1)} = \pi \sup_{\|\mathring{f}\|_E \leqslant 1} \|\langle \mathring{f}(t), \mathring{g}(t-x)\rangle\|_{E_1}.$$

Da die Räume S_k und $'S_k$ nur Kosinusreihen enthalten, ist diese Definition der Räume $(E \to E_1)$ nur für Räume $E_1 \neq S_k$ und $E_1 \neq {}'S_k$ passend.

6) Für die Räume $E_1 = S_k$ und $E_1 = {}'S_k$ definieren wir entsprechend wie unter 5).

Ist $E \subset P_\infty$, so ist genau dann $\mathring{g} = (c_j, d_j)\,\epsilon\,(E \to E_1)$, wenn für jedes $\mathring{f} = (a_j, b_j)\,\epsilon\,E$

$$C_k - \langle \mathring{f}, \mathring{g}\rangle = C_k - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j c_j + b_j d_j)$$

existiert (im Fall $E_1 = S_k$), beziehungsweise

$$\sup_n |\langle \mathring{f}, \sigma_n^k(\mathring{g})\rangle| < \infty$$

ist (im Fall $E_1 = {}'S_k$).

Ist E dabei so beschaffen, daß gewisse der Koeffizienten a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots)$ null sind für alle $\mathring{f}\epsilon E$, so gelte dasselbe für die entsprechenden Koeffizienten c_j, d_j aller $\mathring{g}\,\epsilon\,(E \to E_1)$. Ist E als Folgenraum ein BK-Raum, so ist $(E \to E_1)$ ebenfalls ein BK-Raum mit der Norm für $g\,\epsilon\,(E \to E_1)$

$$\|\mathring{g}\|_{(E\to E_1)} = \pi \sup_{\|\mathring{f}\|_E \leqslant 1} \|\{a_j c_j + b_j d_j\}\|_{E_1}.$$

7) Ist $E \subset P_\infty$, so sei E_c die Menge der reinen Kosinusreihen in E und E_s die Menge der reinen Sinusreihen in E.

Bemerkung. Offensichtlich ist der in [13] und [14] erklärte komplementäre Raum E^* identisch mit $(E \to S)$ und entsprechend $E^{1*} \equiv (C_1 - E)^* \equiv (E \to S_1)$, allgemeiner $E^{k*} = (E \to S_k)$. Man bestätigt auch leicht, daß die früher definierte Norm für die komplementären bzw. C_k-komplementären Räume übereinstimmt mit der für $(E \to S_k)$ definierten Norm, d. h. es ist für $\mathring{g}\,\epsilon\,E^{k*}$, wenn E ein BK-Raum ist

$$\|\mathring{g}\|_{E^{k*}} = \pi \sup_n \sup_{\|\mathring{f}\|_E \leqslant 1} |\langle \mathring{f}, \sigma_n^k(\mathring{g})\rangle| = \pi \sup_{\|\mathring{f}\|_E \leqslant 1} \sup_n |\langle \mathring{f}, \sigma_n^k(\mathring{g})\rangle| = \|\mathring{g}\|_{(E\to S_k)}.$$

Bezüglich der Räume E^{k*} sei ferner an die folgenden Beziehungen erinnert. Es ist

$L_p^{k*} = L_p$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und $0 < k < \infty$ (s. [47], S. 48, und [14]),

$L_\Phi^{\Delta k*} = L_\Psi^\nabla$ für $0 < k < \infty$ (s. [47], S. 48, und [14]),

$L_\Phi^{\nabla k*} = L_\Psi^\Delta$ für $0 < k < \infty$ (s. [47], S. 48, und [14]),

$C^{k*} = dV$ für $0 < k < \infty$ (s. [47], S. 48, und [13]).

$(dV)^{k*}$ $(0 \leqslant k < \infty)$ ist der Raum der $\mathring{f}$ für die $\sup_n \|\sigma_n^k(\mathring{f})\|_C < \infty$ ist und $\{\sigma_n^k(\mathring{f})\} \equiv \{\sigma_n^k(f; x)\}$ für jedes $x\,\epsilon\,\langle 0, 2\pi\rangle$ gegen $\mathring{f}(x)$ konvergiert (s. [14] und [15]).

L^* ist der Raum der $\mathring{f}$, für die mit $s_n(\mathring{f}) = \sigma_n^0(\mathring{f})$ gilt; $\sup\limits_n \|s_n(\mathring{f})\|_C < \infty$ (s. [13], S. 355).

C^* ist der Raum der $\mathring{f}$, für die $\sup\limits_n \|s_n(\mathring{f})\|_L < \infty$ (s. [13], S. 355).

L_Φ^{A*} ist der Raum der $\mathring{f}$, für die $\sup\limits_n \|s_n(\mathring{f})\|_\Psi^V < \infty$ (s. [14], S. 377).

L_p^* $(1 < p \leqslant \infty)$ ist der Raum der $\mathring{f}$, für die $\{s_n(\mathring{f})\}$ schwach gegen $\mathring{f} \epsilon L_p$, konvergiert. Speziell ist L_p^* $(1 < p < \infty) = L_{p'}$ (s. [47], S. 154 und [15], Satz 6).

3. Charakterisierung von Fourierkoeffizienten. Die nachfolgenden Sätze beweisen wir mit einem einheitlichen und neuen Beweisprinzip. Es sei dabei $\mathring{K} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jt$, $\mathring{\tilde{K}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin jt$ und für beliebige $k \geqslant 0$ sei (falls diese Reihe konvergiert)

$$\triangle^k a_j = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n-j-k-1}{n-j} a_n \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

speziell also sei $\triangle^1 a_j \equiv \triangle a_j = a_j - a_{j+1}$ und $\triangle^2 a_j = \triangle^1 a_j - \triangle^1 a_{j+1}$.

Satz 1. *Ist* $0 < k < \infty$ *und*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^k |\triangle^{k+1} a_j| < \infty,$$

so gilt:

a) *genau dann ist* $\mathring{K} \epsilon dV$, *wenn* $a_j = O(1)$ $(j \to \infty)$,

b) *genau dann ist* $\mathring{K} \epsilon L$, *wenn* $a_j = o(1)$ $(j \to \infty)$.

Satz 2. $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle a_j| < \infty$ *impliziert* $\mathring{K} \epsilon (dV)^{**}$, *also auch* $\mathring{K} \epsilon V^*$.

Satz 3. $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle a_j| < \infty$ *mit* $a_j = o(1)$ $(j \to \infty)$ *impliziert* $\mathring{K} \epsilon L^{**}$.

Satz 4. $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle (j a_j)| < \infty$ *impliziert* $\mathring{\tilde{K}} \epsilon V^{**}$, *also auch* $\mathring{\tilde{K}} \epsilon (dV)^* \subset L^* \subset L_\infty$ *und* $\mathring{K} \epsilon L_p$ *für* $p < \infty$.

Bemerkung. Die Sätze 1a), 2, 3 und 4 sind wohl neu. Satz 1b) wurde für $k = 1$ von Kolmogoroff [26], S. 84, II, [47], S. 109, 5.12, bewiesen und für $0 < k < \infty$ von C. N. Moore [30] oder [31] und Cesari [7], S. 126, Th. 21. Allerdings findet sich dort die Aussage jeweils nicht in der Form „Genau dann...". Die Notwendigkeit von $a_j = o(1)$ im Fall $\mathring{K} \epsilon L$ ist klar auf Grund des bekannten Satzes von Riemann-Lebesgue.

Teilaussagen des folgenden Satzes wurden in zahlreichen Arbeiten bewiesen. Für ganzzahlige k und l wurde der Satz wohl erstmals von I. Schur [36] aufgestellt. Für ganzzahlige k wurde der Satz von Knopp [25] und für beliebige k von Bosanquet [6] bewiesen.

Hilfssatz (Satz von Schur). *Für* $0 \leqslant l \leqslant k < \infty$ *gilt: Genau dann ist* $\mathring{K} \epsilon (S_k \to S_l)$, *bzw.* $\mathring{K} \epsilon ('S_k \to S_l)$, *wenn*

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^k |\triangle^{k+1} a_j| < \infty$$

und $a_j = O(j^{l-k})$ $(j \to \infty)$ *ist, bzw. wenn* (1) *gilt und* $a_j = o(j^{l-k})$ $(j \to \infty)$ *ist.*

Für $0 \leqslant k < l < \infty$ *ist* $(S_k \to S_l) = (S_k \to S_k)$ *und* $('S_k \to S_l) = ('S_k \to S_k)$.

Zum Beweis der Sätze 1 bis 4 benötigen wir nur die folgenden Sonderfälle dieses Satzes.

I) *Genau dann ist* $\mathring{K} \epsilon (S_k \to S_k)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, *wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^k |\triangle^{k+1} a_j| < \infty$ *und* $a_j = o(1)$ $(j \to \infty)$ *ist.*

II) *Genau dann ist* $\mathring{K} \epsilon ('S_k \to S_k)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, *wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^k \times |\triangle^{k+1} a_j| < \infty$ *und* $a_j = o(1)$ $(j \to \infty)$ *ist.*

Beweis von Satz 1a). Offensichtlich ist $C_c \subset S_k$ $(0 < k < \infty)$ ([47], S. 48, 3.3) also $S_k^{k*} = (S_k \to S_k) \subset C_c^{k*} = dV_c$, d. h. nach I) die a_j-Bedingungen sind hinreichend für $\mathring{K} \epsilon dV$. Umgekehrt folgt bekanntlich $a_j = O(1)$ $(j \to \infty)$ aus $\mathring{K} \epsilon dV$ wegen $|a_j| = |\langle \cos jt, \mathring{K} \rangle| \leqslant \|\cos jt\|_C \|\mathring{K}\|_{dV} = O(1)$ $(j \to \infty)$.

Beweis von Satz 1b). Offensichtlich ist $L_{\infty c} \subset {}'S_k$ $(0 < k < \infty)$ ([47], 3.22 und 3.3), also ist ${}'S_k^{k*} = ('S_k \to S_k) \subset L_{\infty c}^{k*} = L$. Daraus folgt mit II) das Hinreichen der a_j-Bedingungen. Die Notwendigkeit von $a_j = o(1)$ $(j \to \infty)$ für $\mathring{K} \epsilon L$ ergibt sich leicht so: P, d. h. die Menge der trigonometrischen Polynome ist dicht in L. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\mathring{K} \epsilon L$ ein $p \epsilon P$, sodaß $\|\mathring{K} - p\|_L < \varepsilon$ ist. Ist n der Grad von p, so ist, für alle $j > n$, $\int_0^{2\pi} p \cos jt\, dt = 0$. Also ist für alle $j > n$

$$|a_j| = \frac{1}{\pi} \Big| \int_0^{2\pi} f \cos jt\, dt \Big|$$

$$= \Big| \frac{1}{\pi} \Big[\int_0^{2\pi} (f-p) \cos jt\, dt + \int_0^{2\pi} p \cos jt\, dt \Big] \Big| \leqslant \frac{1}{\pi} \|f-p\|_L = \frac{\varepsilon}{\pi},$$

woraus die Behauptung folgt.

Beweis der Sätze 2 und 4. Es ist $(dV)_c^* \subset S$, also $S^* = (S \to S) \subset (dV)_c^{**}$. Daraus folgt mit I) die Aussage in Satz 2. (Es ist $(dV)^{**} \subset V^*$ ([14], S. 376, 5).

Die Aussage in Satz 4 ergibt sich ganz entsprechend unter Beachtung von: $\mathring{K} \epsilon (dV)^{**}$ ist äquivalent mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \sin jt}{j} \,\epsilon\, V^{**},$$

d. h. $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle a_j| < \infty$ impliziert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jt \,\epsilon\, (dV)^{**}$ ist äquivalent mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle (ja_j)| < \infty$ impliziert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin jt \,\epsilon\, V^{**}$.

Die restlichen Aussagen von Satz 4 folgen aus evidenten Raumeigenschaften und der Tatsache, daß $\mathring{K} \epsilon L_p$ $(1 < p < \infty)$ auch $\mathring{\tilde{K}} \epsilon L_p$ $(1 < p < \infty)$ impliziert ([47], 7.21].

Beweis von Satz 3. Es ist $L_c^* \subset {}'S$ ([13], S. 354), also ${}'S^* = ({}'S \to S) \subset L_c^{**}$, woraus mit II) die Behauptung folgt.

Bemerkungen. 1. Nach Andersen [2], S. 10, (22), implizieren die nach Satz 1a) für $\mathring{K} \epsilon dV$ hinreichenden a_j-Bedingungen auch $a_j = c + o(1)$ $(j \to \infty)$ für eine gewisse Konstante c.

2. Satz 1a) wird falsch für $k = 0$. Dies hat schon Orlicz [32], S. 26, bemerkt. Die Relation $S^* \not\subset dV_c$ läßt sich folgendermaßen beweisen: Es gibt ein $\mathring{f} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jt \,\epsilon\, S^*$ mit $a_j \to 0$ $(j \to \infty)$, sodaß f stetig ist für alle $0 < t < 2\pi$, aber $\mathring{f} \notin L$ ([47], S. 3, 1.23, und S. 111, 5.121). Also ist $\int_x^\pi |f|\,dt = \int_x^\pi |dF|$ nicht beschränkt und so $\mathring{f} \notin dV$. Wir wollen auch umgekehrt zeigen, daß $dV_c \not\subset S^*$ ($S^* = (S \to S)$ ist der Raum der $\{a_j\}$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle a_j| < \infty$). Wäre nun $dV_c \subset S^*$, so wäre $S^{**} \subset (dV_c)^*$, also wegen $S^{**} = S$ wäre $S \subset (dV_c)^*$, was durch folgendes Beispiel widerlegt wird: $\{(-1)^j/j\} \epsilon S$, aber $\notin (dV_c)^*$ wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \cos jt}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty \quad \text{für} \quad t = \pi.$$

3. Die Aussage von Satz 4 $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle (ja_j)| < \infty$ impliziert $\mathring{\tilde{K}} \epsilon L_p$ $(p < \infty)$ wird falsch für $p = \infty$, wie $\mathring{\tilde{K}} = (1/j, 0) \notin L_\infty$ zeigt.

4. Mit entsprechenden Schlüssen wie bei den obigen Sätzen läßt sich auch folgern: *Für* $0 < k < \infty$ *gilt*:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (j+1)^k |\triangle^{k+1} a_j| < \infty$$

mit $a_j = O(j^{-k})$ *impliziert* $\mathring{\tilde{K}} \epsilon C^*$ (es ist $C_c \subset S_k$ $(0 < k < \infty)$, also $S_k^* = (S_k \to S) \subset C_c^*$). Interessant ist hierzu die Aussage ([14], S. 381 Satz 7): *Ist*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (n+1) |\triangle^2 a_j| < \infty,$$

so ist genau dann $\mathring{\tilde{K}} \epsilon C^*$, *wenn* $a_j = O(1/\lg j)$ $(j \to \infty)$ *ist und nach Helson* [17] *ist ganz allgemein für* $\mathring{f} = (a_j, b_j) \epsilon C^*$ *notwendig* $a_j = o(1)$, $b_j = o(1)$ $(j \to \infty)$.

5. Mit gewissen Zusatzbedingungen implizieren die Voraussetzungen in Satz 3 sogar $\mathring{\tilde{K}} \epsilon L$. Nach Uljanow [42], S. 476, genügt die Zusatzbedingung: $\mathring{K}$ ist einseitig beschränkt, und nach Boas [5], S. 625, die Zusatzbedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \triangle \sum_{\substack{j \neq n \\ j=1}}^{\infty} a_j \frac{(-1)^{j-n} - 1}{j-n} \right| < \infty.$$

Nach Cesari [7], S. 114, Th. I, ist auch $\mathring{\tilde{K}} \epsilon L$, wenn man, in Satz 3, $\triangle a_j$ durch $\triangle^k a_j$ für $0 < k < 1$ ersetzt, jedoch genügen nach Uljanow [42], S. 476, die Voraussetzungen von Satz 3, wenigstens für

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\mathring{K} - s_n(\mathring{K})|^p\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\mathring{\tilde{K}} - s_n(\mathring{\tilde{K}})|^p\,dt = 0$$

für jedes $p < 1$.

6. $\sum_{j=1}^{\infty} |\triangle (ja_j)| < \infty$ impliziert die Konvergenz von $\mathring{\tilde{K}}$ für $0 < t \leqslant \pi$ ([4], Satz 4).

4. Einige Sätze über Multiplikatoren. Die reelle Koeffizientenfolge $\lambda = \{\lambda_j\}$ heißt ein *Multiplikator der Klasse* (E, E_1), wenn $\mathring{K} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cos jt \,\epsilon\, (E \to E_1)$. Sind E und E_1 BK-Räume, so vermittelt λ für jedes $\mathring{f} \epsilon E$ eine lineare und stetige Operation $T \epsilon (E, E_1)$ mit $T\mathring{f} \epsilon E_1$. Es sei $s_n(T\mathring{f}) = T_n \mathring{f}$ und $\sigma_n^k(T\mathring{f}) = T_n^k \mathring{f}$ gesetzt.

Definition. Ein normierter Raum $E \subset P_\infty$ heißt ein *translationsinvarianter Raum*, wenn für jedes $\mathring{f} \in E$ und jedes $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ gilt: $\mathring{f}(x+t) \in E$ und $\|\mathring{f}\|_E = \|\mathring{f}(x+t)\|_E$.

SATZ 5. *Ist E ein translationsinvarianter BK-Raum $\subset P_\infty$, so gilt: Genau dann ist $T \in \big(E, (dV)^{k*}\big)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, wenn $\mathring{K} \in E^{k*}$.*

Beweis. Ist $T \in \big(E, (dV)^{k*}\big)$, so konvergiert $\langle \mathring{f}(t), \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t-x)\big)\rangle$ für jedes $\mathring{f} \in E$ und jedes $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, also ist $\mathring{K} \in E^{k*}$, d. h. die Bedingung ist notwendig. Ist umgekehrt $\mathring{f} \in E$ und $\mathring{K} \in E^{k*}$, so konvergiert $\langle \mathring{f}(t), \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t-x)\big)\rangle$ für jedes $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, und zwar beschränkt wegen $|\langle \mathring{f}(t+x), \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t)\big)\rangle| \leqslant \|\mathring{f}\|_E \|\mathring{K}\|_{E^{k*}}$, also ist $T \in \big(E, (dV)^{k*}\big)$.

Bemerkung. Offensichtlich sind die Räume $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C, V und A und ihre zugeordneten Räume dE und E^{k*} $(0 \leqslant k < \infty)$ translationsinvariante BK-Räume. Ist P überdies dicht in E, so ist $\big(E, (dV)^{k*}\big) = (E, C_{kN})$ (vgl. [14], S. 380, Satz 6] und allgemeiner ([15], Satz 1).

Definition. Ist E ein Banachraum, E' der zu E konjugierte Raum (= der Raum der über E definierten linearen und stetigen Funktionale) und $E_0' \subset E'$, dann heißt E_0' eine *normbestimmende Menge* für E, wenn für $x \in E$ und $x_0' \in E_0'$ gilt

$$\sup_{\|x_0'\|_{E'} \leqslant 1} |x_0'(x)| = \|x\|_E.$$

Zum Beispiel ist C eine normbestimmende Menge für L und L eine normbestimmende Menge für C (es ist hier zweckmäßig $C' = dV$ zu setzen im Gegensatz zum sonst üblichen $C' = V$, da das allgemeine lineare und stetige Funktional in C dargestellt werden kann in der Gestalt $C_1 - \langle \mathring{f}, \mathring{g}\rangle$ mit $\mathring{f} \in C$ und $\mathring{g} \in C^{1*} = dV$). E' selbst ist stets eine normbestimmende Menge für E.

SATZ 6. *Ist E_1 ein BK-Raum $\subset P_\infty$, P dicht in E_1 und sind E_0 und E_∞ BK-Räume $\subset P_\infty$, welche für denselben Raum normbestimmende Mengen darstellen, so ist $(E_0, E_1^{k*}) = (E_\infty, E_1^{k*})$ $(0 \leqslant k < \infty)$.*

Beweis. Für die beiden Multiplikatorenklassen ist genau dann $T\mathring{f} \in E_1^{k*}$ für jedes $\mathring{f} \in E_0$ bzw. $\mathring{f} \in E_\infty$, wenn $\sup\limits_n \|T_n^k \mathring{f}\|_{E_1'} < \infty$ (s. [13], S. 355, Satz 2.3 für $k = 0$ und [15], Satz 3′ für beliebiges k, wo der Beweis ganz entsprechend geführt werden kann). Nach dem Satz von Banach und Steinhaus ist also die Folge der Normen $\|T_n^k\|_{E_0 E_1'}$ bzw. $\|T_n^k\|_{E_\infty E_1'}$ beschränkt. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß beide Normenfolgen identisch sind (s. [9] oder [18], S. 34, Th. 2.8.6 oder [40], Th. 4.4-B).

Folgerungen. Erfüllt E_1^{k*} die Voraussetzungen des Satzes 6 (ist also z. B. $E_1^{k*} = L_p$ $(1 < p \leqslant \infty)$, L_Φ^∇, dV, C^{k*}, L^{k*}, $L_\Phi^{\Delta k*}$), so ist $(dV, E_1^{k*}) = (L, E_1^{k*})$ und $(L_\infty, E_1^{k*}) = (C, E_1^{k*})$. Daraus lassen sich mit Hilfe des Satzes 1 in [15] zahlreiche weitere identische Multiplikatorenklassen bestimmen. So ist z. B. nach diesem Satz $(C, L^*) = (C, C_N)$, also nach Satz 6 auch $(L_\infty, L^*) = (C, L^*) = (C, C_N)$ und genau dann ist T in einer dieser Klassen, wenn $\mathring{K} \in C^*$ ([11], Satz 1, und [13], S. 356, 1) (Schon W. H. Young [45], S. 438, bemerkte, daß z. B. $\mathring{K} = (1/\lg j, 0) \in (L_\infty \to L^*)$; nach Tomić [41] ist dann $\mathring{K} \in (C, C_N)$). Die Aussage: $T \in (L_\infty, L^*)$ genau dann, wenn $\mathring{K} \in C^*$, kann auch aus einem allgemeineren Satz von Lozinski [27], S. 377, Satz, gefolgert werden.

SATZ 7. *Ist E ein translationsinvarianter BK-Raum $\subset P_\infty$ und P dicht in E, so gilt: Genau dann ist $T \in (dV, E^{k*}) = (L, E^{k*})$ $(0 \leqslant k < \infty)$, wenn $\mathring{K} \in E^{k*}$.*

Beweis. Die Gleichheit der beiden Multiplikatorenklassen folgt aus Satz 6 und die Notwendigkeit von $\mathring{K} \in E^{k*}$ aus $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \cos jt \in dV$. Es genügt also zu zeigen, daß $\mathring{K} \in E^{k*}$ hinreichend ist für $T \in (L, E^{k*})$. Für $T \in (L, E^{k*})$ ist aber die Beschränktheit der Folge der Normen $\|T_n^k\|_{LE'}$ hinreichend (vgl. [13], Satz 362, Satz 4.6, oder [11], S. 305, Satz 2, und [15], Satz 3′). Mit Abschätzungen wie in [13], S. 366, Satz 4.11, ergibt sich für $\mathring{K} \in E^{k*}$ (²):

$$\begin{aligned}
\|T_n^k\|_{LE'} &= \sup_{\|\mathring{f}\|_L \leqslant 1} \|T_n^k \mathring{f}\|_{E'} \\
&= \sup_{\|\mathring{f}\|_L \leqslant 1} \sup_{\|\mathring{h}\|_E \leqslant 1} \big|\langle\langle \mathring{f}(t), \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t-x)\big)\rangle, \mathring{h}(x)\rangle\big| \\
&= \sup_{\|\mathring{h}\|_E \leqslant 1} \sup_{\|\mathring{f}\|_L \leqslant 1} \big|\langle\langle \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t-x)\big), \mathring{h}(x)\rangle, \mathring{f}(t)\rangle\big| \\
&= \frac{1}{\pi} \sup_{\|\mathring{h}\|_E \leqslant 1} \big\|\langle \sigma_n^k\big(\mathring{K}(t-x)\big), \mathring{h}(x)\rangle\big\|_C = \frac{1}{\pi}\|\sigma_n^k(\mathring{K})\|_{E'} = O(1) \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

In [15], Satz 1, wurde bewiesen: Sind E und E_1 BK-Räume $\subset P_\infty$, ist P dicht auf E und sind E_1 oder E_1^{k*} translationsinvariante Räume,

---

(²) Ist E' einer der von Zaanen modifizierten Orlicz-Räume L_Φ, so ist $\|T_n^k\|_{L'E} = \dfrac{M}{\pi}\|\sigma_n^k(\mathring{K})\|_{E'}$ für eine positive Konstante M (vgl. [11]). Wir führen den Beweis nur für solche Räume E', für die $M = 1$ ist (entsprechend in Satz 9), jedoch gilt der Satz für alle vorausgesetzten Räume.

so gilt: $(E\colon E_1^{k*}) = \big(E, (E_1^{k*})_{kN}\big)$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$. Dies gilt, wie man leicht einsieht, auch für $0 \leqslant k < \infty$. Dieser Satz ergibt zusammen mit Satz 6 den

SATZ 8. *Sind E_0' und E_1 BK-Räume $\subset P_\infty$, ist P dicht auf E_0' und E_1, ist E_0' eine normbestimmende Menge für E und ist E_1 oder E_1^{k*} $(0 \leqslant k < \infty)$ ein translationsinvarianter Raum, so gilt*

$$(E_0', E_1^{k*}) = (E', E_1^{k*}) = \big(E_0', (E_1^{k*})_{kN}\big).$$

Beweis. Sind die angegebenen Voraussetzungen erfüllt, so ist, nach Satz 6, $(E_0', E_1^{k*}) = (E', E_1^{k*})$, denn E' selbst ist eine normbestimmende Menge für E und P ist dicht auf E_1. Da ferner P dicht ist auf E_0' und da E_1 oder E_1^{k*} translationsinvariante Räume sind, so ist nach dem auf $0 \leqslant k < \infty$ erweiterten Satz 1 in [15] (s. oben) auch $(E_0', E_1^{k*}) = \big(E_0', (E_1^{k*})_{kN}\big)$, woraus die Behauptung folgt.

Folgerungen.

$(L, L_\Phi^\nabla) = (dV, L_\Phi^\nabla) = (L, L_{\Phi 1N}^\nabla)$, speziell $(L, L_\infty) = (dV, L_\infty) = (L, C)$.

$(C, L_\Phi^\nabla) = (L_\infty, L_\Phi^\nabla) = (C, L_{\Phi 1N}^\nabla)$, speziell $(C, L_\infty) = (L_\infty, L_\infty) = (C, C)$.

$(L, L_\Phi^{\Delta *}) = (dV, L_\Phi^{\Delta *}) = (L, L_{\Psi N}^\nabla)$, speziell $(L, L^*) = (dV, L^*) = (L, C_N)$.

$(C, L_\Phi^{\Delta *}) = (dV, L_\Phi^{\Delta *}) = (L, L_{\Psi N}^\nabla)$, speziell $(C, L^*) = (L_\infty, L^*) = (C, C_N)$.

$(L, C^{k*}) = (dV, C^{k*}) = (L, L_{kN})$, speziell $(L, C^*) = (dV, C^*) = (L, L_N)$ und

$(L, dV) = (dV, dV) = (L, L)$,

$(C, C^{k*}) = (L_\infty, C^{k*}) = (C, L_{kN})$, speziell $(C, C^*) = (L_\infty, C^*) = (C, L_N)$ und

$(C, dV) = (L_\infty, dV) = (C, L)$.

Sind E und E_1 irgendwelche der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, C, dV (oder V), so sind die obigen Identitäten bekannt. Jedoch sind die Beweismethoden von der unserigen verschieden. Es sei hingewiesen auf die Arbeiten [37], [10], [38], [46], [32], [33], [20], [21], [43] sowie [47], [22].

SATZ 9. *Ist E ein translationsinvarianter BK-Raum $\subset P_\infty$, so ist genau dann $T \epsilon (dV, E_{kN})$ $(0 \leqslant k < \infty)$, wenn $\mathring{K} \epsilon E_{KN}$.*

Beweis. Die Notwendigkeit ist klar wegen $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \cos jt \epsilon dV$ und das Hinreichen folgt aus der Tatsache, daß

$$\|T_n^k\|_{dVE} = \|T_n^k\|_{LE} = \frac{1}{\pi}\, \|\sigma_n^k(\mathring{K}_E)\|$$

ist (vgl. Beweis von Satz 7), sodaß für $\mathring{f} \epsilon dV$ und $\mathring{K} \epsilon E_{KN}$

$$\|\sigma_n^k(T\mathring{f}) - \sigma_m^k(T\mathring{f})\|_E \leqslant \frac{1}{\pi}\, \|\sigma_n^k(\mathring{K}) - \sigma_m^k(\mathring{K})\|_E \|f\|_{dV} = o(1) \qquad (m > n \to \infty)$$

ist. Also ist $T \epsilon (dV, E_{kN})$ $(0 \leqslant k < \infty)$.

Bemerkung. Für $E = C$ wurde der Satz von Katayama [24] und für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ in [12] bewiesen, (jeweils im Fall $k = 0$).

SATZ 10. *$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\triangle \lambda_j| < \infty$ impliziert $T \epsilon (E^*, E^*)$ und $T \epsilon (E, E^{**})$ für jeden Raum $E \subset P_\infty$.*

Beweis. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\triangle \lambda_j| < \infty$ ist äquivalent $\lambda \epsilon S^* = (S \to S)$ (s. Satz von Schur). Ist $\mathring{f} \epsilon E^*$, so konvergiert $\langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle$ für jedes $\mathring{g} \epsilon E$. Ist nun $\lambda \epsilon S^*$, so ist auch $\langle T\mathring{f}, \mathring{g} \rangle = \langle \mathring{f}, T\mathring{g} \rangle$ konvergent für jedes $\mathring{f} \epsilon E^*$, $\mathring{g} \epsilon E$. Daraus folgen die Behauptungen.

Bemerkung. Die Gültigkeit der Aussage im Fall $E = L_p$ $(1 < p < \infty)$ bemerkte schon M. Riesz ([35], S. 491). Marcinkiewicz ([28], S. 79, Satz 1, und S. 90, Satz 9) bewies darüber hinaus, daß $\lambda_j = O(1)$ $(j \to \infty)$ zusammen mit $\sum\limits_{j=2^a}^{2^{a+1}} |\triangle \lambda_j| = O(1)$ oder $\sum\limits_{j=2^a+2^i}^{2^a+2^{i+1}} |\triangle \lambda_j| = O(1)$ $(a \to \infty$, $i \to \infty)$ und $a, i = 0, 1, 2, \ldots$ auch $T \epsilon (L_p, L_p)$ $(1 < p < \infty)$ implizieren. (Vgl. auch [39].)

SATZ 11. *Für $0 \leqslant l \leqslant k < \infty$ und $E \subset P_\infty$ gilt: $\lambda_j = O(j^{l-k})$ $(j \to \infty)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (n+1)^k |\triangle^{k+1} \lambda_j| < \infty$ impliziert $T \epsilon (E^{k*}, E^{l*})$ und $T \epsilon (E, E^{k*l*})$.*

Beweis. Die λ_j-Bedingungen sind äquivalent den Bedingungen für $\lambda \epsilon (S_k \to S_l)$. Daraus folgen ganz entsprechend wie im Satz 10 die Behauptungen.

Bemerkung. Steinhaus [37] bewies den Satz für $k = l = 1$ und $E^{1*} = L$.

SATZ 12. *Für $0 \leqslant k < \infty$ und $E, E_1 \subset P_\infty$ gilt: $T \epsilon (E, E_1)$ impliziert $T \epsilon (E_1^{k*}, E^{k*})$.*

Beweis. Ist $T \epsilon (E, E_1)$ und $\mathring{f} \epsilon E$ also $T\mathring{f} \epsilon E_1$, so existiert für jedes $\mathring{g} \epsilon E_1^{k*}$ die C_k-Summe $C_k - \langle T\mathring{f}, \mathring{g} \rangle = C_k - \langle \mathring{f}, T\mathring{g} \rangle$, woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung. Sind E und E_1 Räume vom Typus $(E \to S_k)$, d. h. ist $E^{k*k*} = E$ und $E_1^{k*k*} = E_1$, so folgt aus Satz 12 $(E, E_1) = (E_1^{k*}, E^{k*})$.

HILFSSATZ. *Ist E ein BK-Raum $\subset P_\infty$, $0 \leqslant k < \infty$ und $E = E_{kN}$, so ist, für jedes $l \geqslant k$, $E^{l*} = E^{k*}$.*

Beweis. Offensichtlich gilt für $l \geqslant k$, $E^{k*} \subset E^{l*}$. Ist nun $E = E_{kN}$, so existiert für jedes $l \geqslant k$, $\mathring{f} \epsilon E$ und $\mathring{g} \epsilon E^{l*}$ die Summe $C_l - \langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle$ und dieser Ausdruck ist ein lineares und stetiges Funktional $\varphi(\mathring{f})$. Da jedes lineare und stetige Funktional in E_{kN} dargestellt werden kann in der Form $\varphi(\mathring{f}) = C_k - \langle \mathring{f}, \mathring{h}\rangle$ mit $\mathring{h}\in E^{k*}$, so ist $C_l - \langle \mathring{f}, \mathring{g}\rangle = C_k - \langle \mathring{f}, \mathring{h}\rangle$ für jedes $\mathring{f}\in E$, also $\mathring{g} = \mathring{h}\in E^{k*}$, also $E^{l*}\subset E^{k*}$, woraus zusammen mit $E^{k*}\subset E^{l*}$ die Behauptung folgt.

Mit diesem Hilfssatz und Satz 12 ergeben sich unmittelbar die folgenden Aussagen.

SATZ 13. *Für BK-Räume* $\subset P_\infty$ *gilt:* $T\in(E, E_{1lN})$ *impliziert* $T\in(E_1^{k*}, E^{l*})$ *für jedes* $k\geq l$ *und* $T\in(E_{lN}, E_1)$ *impliziert* $T\in(E_1^{k*}, E^{l*})$ *für jedes* $k\geq l$.

SATZ 14. *Ist* $\lambda_j=\pm1$ $(j=1,2,\ldots)$ *und für beliebige* λ_j, $\mathring{f} = (\lambda_j a_j, \lambda_j b_j)\in E^{k*}$ $(0\leq k<\infty)$ $(E^{k*}\subset P_\infty)$, *so ist* $\mathring f\in E^*$ *und für beliebige* e_j *mit* $|e_j|\leq 1$ $(j=1,2,\ldots)$ *ist* $\mathring{h} = (e_j a_j, e_j b_j)\in E^*$.

Beweis. Ist $\mathring f = (\lambda_j a_j,\lambda_j b_j)\in E^{k*}$ für jede Folge $\lambda_j=\pm1$, so existiert $C_k - \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(a_jc_j+b_jd_j)$ für jedes $\mathring g = (c_j,d_j)\in E$, also existiert auch $\sum_{j=1}^\infty |a_jc_j+b_jd_j|$ für jedes $\mathring g\in E$, also existiert auch für jede Folge e_j mit $|e_j|\leq1$ und jedes $\mathring g\in E$ die Summe $\sum_{j=1}^\infty e_j(a_jc_j+b_jd_j)$, also ist $\mathring h = (e_ja_j, e_jb_j)\in E^*$.

Bemerkungen. Der Satz verallgemeinert und verschärft eine Aussage von Karlin ([23], Th. 4), der unter den obigen Voraussetzungen bewies: $\mathring f\in L_p$ $(1\leq p<\infty)$ *impliziert* $\mathring h\in L_p$. Nach Satz 14 gilt sogar: $\mathring f\in L_p$ $(1\leq p\leq\infty)$ *impliziert* $\mathring f\in L^*_{p'}$, *und* $\mathring h\in L^*_{p'}$.

Folgender Sonderfall von Satz 14 verdient Interesse: Ist obiges $\mathring f\in dV = C^{1*}$, so ist $\mathring f\in C^*$. Daraus folgt nach Helson [17] und [13], S. 355, Satz 2.3, $a_j, b_j = o(1)$ $(j\to\infty)$ (³).

5. Ergänzende Bemerkungen und Literaturhinweise. Im folgenden bringen wir noch einige kürzere Hinweise, welche vor allem zur Charakterisierung komplementärer Räume von Interesse sein dürften. Zu den Arbeiten [11], [13] und [14] ergänzen wir Literaturhinweise.

1. $\sum_{j=1}^\infty (j+1)|\triangle^2\lambda_j|<\infty$ *impliziert: Aus* $\mathring K\in C^*$ *folgt* $\mathring K\in L$, *aber aus* $\mathring K\in L$ *folgt nicht* $\mathring K\in C^*$.

Beweis. $\mathring K\in C^*$ impliziert nach Helson [17] und [13], S. 355, $\lambda_j=o(1)$ $(j\to\infty)$. Daraus folgt nach Kolmogoroff [26] für quasikonvexe λ_j auch

(³) Nach Abschluß der Arbeit bemerkte der Verfasser, daß die von Karlin [23] für $\mathring f\in L_p$ $(1\leq p<\infty)$ bewiesene Aussage schon von Orlicz für $\mathring f\in L_p$ $(1<p\leq\infty)$ und $\mathring f\in V$ im Fall allgemeinerer Orthogonalsysteme bewiesen wurde (s. W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* (V), Studia Math. 6 (1936), p. 20-38. Seite 24, Satz 1).

$\mathring K\in L$. Umgekehrt folgt jedoch für quasikonvexe λ_j aus $\mathring K\in L$ nur $\lambda_j=o(1)$ $(j\to\infty)$ und nicht $\lambda_j = O(1/\lg j)$ $(j\to\infty)$, also nicht $\mathring K\in C^*$ ([14], S. 381, Satz 7).

2. *Für* $\triangle\lambda_j\geq0$ *ist* $\{\lambda_j/\lg j\}\in L^*_{\infty c}$. Dies folgt aus einem Satz von W. H. Young ([45], S. 438) zusammen mit [14], Satz 5.

3. Für Sinusreihen mit monoton gegen Null strebenden Koeffizienten gilt: *Genau dann ist*

$$\mathring{\tilde K}\in L^*_\infty, \quad \textit{wenn} \quad \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{j}<\infty \qquad ([44],\ S.\ 57),$$

$$\mathring{\tilde K}\in (dV)^*, \quad \textit{wenn} \quad \lambda_j = O\left(\frac{1}{j}\right)\ (j\to\infty) \qquad ([16],\ S.\ 35,\ Th.\ 49),$$

$$\mathring{\tilde K}\in C_N, \quad \textit{wenn} \quad \lambda_j = o\left(\frac{1}{j}\right) \qquad ([47],\ S.\ 108),$$

$$\mathring{\tilde K}\in L_N, \quad \textit{wenn} \quad \sum_{j=1}^\infty \triangle\lambda_j \lg j<\infty \qquad ([47],\ S.\ 112,\ 5.13).$$

4. Die von G. Alexits [1] für konvexe Nullfolgen gemachten Aussagen für Multiplikatoren bei gewissen Orthogonalsystemen gelten großenteils schon für quasikonvexe Nullfolgen.

5. Mit Hilfe der komplementären Räume läßt sich folgender Satz von Izumi und Kawata ([19], S. 412, Th. 2) verschärfen: $\mathring g\in dV$ *und* $\mathring f\in V$ *implizieren die Existenz von* $\langle\mathring f,\mathring g\rangle$. Es genügt offensichtlich dabei $\mathring f\in(dV)^*$ vorauszusetzen (es ist $(dV)^*\not\subset V$, aber $V\subset(dV)^*$).

6. Aus der Tatsache, daß $(a_j,b_j)\in C^*$, $a_j,b_j=o(1)$ $(j\to\infty)$ impliziert [17] mit [13], S. 355, folgt, daß *für jedes* $x_0\in\langle0,2\pi\rangle$ *ein* $\mathring f\in C$ *mit in* x_0 *divergenter Fourierreihe existiert.*

Beweis. Für kein $x_0\in\langle 0,2\pi\rangle$ ist $\mathring h = (\cos jx_0, \sin jx_0)\in C^*$. Also gibt es ein $\mathring f=(a_j,b_j)\in C$ für das $\langle\mathring f,\mathring h\rangle = \sum_{j=1}^\infty (a_j\cos jx_0 + b_j\sin jx_0)$ divergiert.

Bemerkung. Aus der Tatsache, daß obiges $\mathring h = (c_j,d_j) = (\cos jx_0,\sin jx_0)\notin C^*$ ist, auch wenn man $c_j=d_j=0$ setzt für $j\neq j_n$ mit

$$\frac{j_{n+1}}{j_n}>k>1, \tag{1}$$

folgt, daß es zu jeder Lückenbedingung (1), $\mathring f=(a_j,b_j)\in C$ gibt, derart daß

$$\mathring s(x_0) = \sum_{j=1}^\infty (a_j\cos jx_0 + b_j\sin jx_0)$$

divergiert, wenn man, in $\mathring{s}$, $a_j = b_j = 0$ setzt für $j \neq j_n$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Nach Szidon [47], S. 139, 6.4, ist dann $\mathring{s} \notin L_\infty$, aber $\mathring{s} \in L_p$ für jedes $p < \infty$ ([47], S. 216, 9.601).

7. In Ergänzung der Literaturhinweise in [11], [13] und [14] sei folgendes bemerkt: Die in [11], Satz 2, angegebene Bedingung für $T \in (L, L_N)$ läßt sich auch aus der schon zitierten Arbeit von Lozinski [27], S. 333, Satz 1, folgern. Banach und Steinhaus [3] bewiesen schon die Aussage in [13] (S. 355, Satz 2.3): *Genau dann ist* $\mathring{f} \in L^*$, *wenn* $\sup_n \|s_n(\mathring{f})\|_C < \infty$ *ist.* Satz 1 in [14]: *Genau dann ist* $\mathring{f} \in (dV)^*$, *wenn* $\{s_n(\mathring{f})\}$ *beschränkt konvergiert*, läßt sich auch unmittelbar aus einem Satz von Pi Calleja [34], S. 314, Th. XI, folgern.

Literaturnachweis

[1] G. Alexits, *Über die Transformierten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 2 (1951), p. 1-9.

[2] A. F. Andersen, *On the extension within the theory of Cesàro summability of a classical convergence theorem of Dedekind*, Proc. London Math. Soc. (3) 8 (1958), p. 1-52.

[3] S. Banach et H. Steinhaus, *Sur la convergence en moyenne*, Bull. Int. Ac. Sci. Cracovie, Cl. Sci. Math. et Nat., Sér. A: Sci. Math. 1918, p. 87-96.

[4] R. P. Boas, *Integrability of trigonometric series I*, Duke Math. J. 18 (1951), p. 787-793.

[5] — *Absolute convergence and integrability of trigonometric series*, J. Rat. Mech. Anal. 5 (1956), p. 621-632.

[6] L. S. Bosanquet, *Note on convergence and summability factors III*, Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1949), p. 482-496.

[7] L. Cesari, *Sulle condizioni sufficienti per la successione di Fourier*, Annali di Pisa 3 (1934), p. 105-134.

[8] T. W. Chaundy and A. E. Jollife, *The uniform convergence of a certain class of trigonometric series*, Proc. London Math. Soc. 15 (1916), p. 214-216.

[9) N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Trans. Am. Math. Soc. 44 (1938), p. 305-356.

[10] M. Fekete, *Über Faktorenfolgen, welche die Klasse einer Fourierschen Reihe unverändert lassen*, Acta litt, ac sci. R. Univ. Hung. Franc.-Jos., Szeged, Sect. Sci. Math. 1 (1922-23), p. 148-179.

[11] G. Goes, *Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I*, Studia Mathematica 17 (1958), p. 299-308.

[12] — *Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen II*, ibidem 17 (1958), p. 309-311.

[13] — *BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten*, Math. Z. 70 (1959), p. 345-371.

[14] — *Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren*, Math. Annalen 137 (1959), p. 371-384.

[15] — *Identische Multiplikatorenklassen und O_k-Basen in O_k-komplementären Fourierkoeffizientenräumen*, Math. Nachrichten (im Druck).

[16] G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, *Fourier series*, Cambirdge 1950.

[17] H. Helson, *Proof of a conjecture of Steinhaus*, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 40 (1954), p. 205-206.

[18] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, New York 1957.

[19] S. Izumi and T. Kawata, *Notes in Fourier series IV: Stieltjes integrals*, Tôhoku math. J. 44 (1938), p. 410-420.

[20] S. Kaczmarz, *On some classes of Fourier series*, J. London math. Soc. 8 (1933), p. 39-46.

[21] — *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 21-26.

[22] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, New York 1951.

[23] S. Karlin, *Unconditional convergence in Banach spaces*, Bull. Am. math. Soc. 54 (1948), p. 148-152.

[24] M. Katayama, *Fourier series VII: Uniform convergence factors of Fourier series*, J. Fac. Sci. Hokkaidô Univ. 13 (1957), p. 121-129.

[25] K. Knopp, *Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes*, J. reine angew. Math. 187 (1949), p. 70-74.

[26] A. Kolmogoroff, *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue*, Bull. int. l'Acad. Polon., cl. A sci. math. et nat., Cracovie 1923, p. 83-86.

[27] S. Lozinski, *Über singuläre Integrale*, Mat. Sbornik 49, N. S. 7 (1940), p. 329-363.

[28] J. Marcinkiewicz, *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Mathematica 8 (1939), p. 78-91.

[29] C. N. Moore, *On certain criteria for Fourier constants of L-integrable functions*, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 18 (1932), p. 396-399.

[30] — *On criteria for Fourier constants of L-integrable functions*, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 19 (1933), p. 846-848.

[31] — *On the use of Cesàro-means in determining criteria for Fourier constants*, Bull. Am. Math. Soc. 39 (1933), p. 907-913.

[32] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen I*, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-39.

[33] — *Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen*, Studia Mathematica 5 (1934), p. 127-140.

[34] P. Pi Calleja, *Sobre la convergencia de integrales dependientes de un nódulo variable*, Memòries de l'Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, Tercera Epoca 25 (1936), p. 281-337.

[35] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta Mathematica 49 (1926), p. 465-497.

[36] I. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. reine angew. Math. 151 (1921), p. 79-111.

[37] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. 5 (1919), p. 186-221.

[38] — *Sur les développements orthogonaux*, Bull. Int. Acad. Polon., cl. A, sci. math. et nat., Cracovie 1926, p. 11-39.

[39] С. Б. Стечкин. *О билинейных формах*, Доклады Ак. Наук СССР 71 (1950), p. 237-240.

[40] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, New York 1958.

[41] M. Tomić, *Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues*, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 8 (1955), p. 23-32.

[42] П. Л. Ульянов, *Применение A-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов*, Мат. Сборник 35 (1954), no 3, p. 469-490.

[43] S. Verblunsky, *On some classes of Fourier series*, Proc. London math. Soc. (2) 33 (1932), p. 287-327 .

[44] W. H. Young, *On the Fourier series of bounded functions*, Proc. London math. Soc. (2) 12 (1913), p. 41-70.

[45] — *On the mode of oscillation of Fourier series and its allied series*, Proc. London math. Soc. (2) 12 (1913), p. 433-452.

[46] A. Zygmund, *Sur un théorème de M. Fekete*, Bull. Int. Acad. Polon., cl. A, sci. math. et nat., Cracovie 1927, p. 343-347.

[47] — *Trigonometrical series*, New York 1952.

Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

On some functional equations in Banach spaces

by

S. KUREPA (Zagreb)

Throughout this paper $R = \{t, s, u, \ldots\}$ denotes the set of all real numbers, $X = \{x, y, z, \ldots\}$ a complete Banach space, X^* the adjoint of X and $L(X)$ the set of all linear and continuous mappings of X into X endowed with the usual structure of a Banach space.

In § 1 we consider operator-valued mappings F and G of R into $L(X)$ such that

$$F(t+s)+F(t-s) = 2F(t)G(s) \tag{1}$$

holds for all $t, s \in R$. In the case $F = G$ we have a cosine functional equation for which we have proved [6] that a weak measurability of F on one interval implies a weak continuity of F on R in the case of X being a separable Hilbert space. Theorem 1 of this paper extends this result to the case of a reflexive and separable Banach space. If X is a Hilbert space, $F(t) = N(t)$ is a normal operator and the function $N(t)$ is weakly continuous, then $N(t) = \cos tN$ for all $t \in R$, where the normal operator N does not depend on t [6]. In this paper we generalise this result to the functional equation (1).

In § 2 we consider continuous complex-valued functionals f and g defined on X and such that

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)g(y) \tag{2}$$

for all $x, y \in X$. We prove that the functionals f and g can be expressed as functions of an additive and continuous functional. Some other functional equations which can be reduced to (2) are also treated.

We note that St. Kaczmarz [3] has considered real-valued functions f, φ defined on R and such that

$$f(x)+f(x+y) = \varphi(y)f(x+y/2).$$

Replacing here x by $x+y/2$ and setting $\varphi(y) = 2g(y/2)$ we find that f and g satisfy (2) and conversely. Kaczmarz has proved that the measurability of f implies the continuity of functions f, φ and he has found all