[4] E. Hecke, *Vorlesungen ueber die Theorie der Algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923.

[5] E. Landau, *Ueber einige neuere Fortschritte der Additiven Zahlentheorie*, Cambridge 1937.

[6] I. Niven, *Sums of 4-th powers of Gaussian integers*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), pp. 923-926.

[7] L. G. Peck, *Diophantine equations in algebraic number fields*, Amer. J. Math. 71 (1949), pp. 387-402.

[8] C. L. Siegel, *Generalization of Waring's problem to algebraic number fields*, Amer. J. Math. 66 (1944), pp. 122-136.

[9] — *Additive Theorie der Zahlkörper. I*, Math. Ann. 87 (1922), pp. 1-35.

[10] — *Additive Theorie der Zahlkörper. II*, Math. Ann. 88 (1923), pp. 184-210.

[11] — *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Annals of Math. (2) 46 (1945), pp. 313-339.

[12] T. Tatuzawa, *On the Waring problem in an algebraic number field*, J. Math. Soc. Japan 10 (1958), pp. 322-341.

[13] L. Tornheim, *Sums of n-th powers in fields of prime characteristic*, Duke Math. J. 4 (1938), pp. 359-362.

[14] E. M. Wright, *An easier Waring's problem*, Journal London Math. Soc. 9 (1934), pp. 267-272.

UNIVERSITY OF ILLINOIS

Reçu par la Rédaction le 21. 8. 1960

ACTA ARITHMETICA
VI (1961)

Remarques sur le travail de M. J. W. S. Cassels „On a diophantine equation"

par

W. Sierpiński (Warszawa)

Dans son travail *On a diophantine equation* qui a paru dans ce volume, p. 47-52, M. J. W. S. Cassels démontre le théorème suivant:

Théorème I. *Le système d'équations*

$$r+s+t = rst = 1 \tag{1}$$

n'a pas de solutions en nombres rationnels r, s, t.

Il est à remarquer que la question de savoir s'il existe trois nombres rationnels dont la somme ainsi que le produit soient égaux à 1 a été posée en 1956 par M. Werner Mnich; voir Elemente der Mathematik XI (1956), p. 134, où A. Schinzel démontre aussi que pour tout nombre naturel donné $s>3$ il existe une infinité de systèmes de s nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_s$, tels que

$$x_1+x_2+\ldots+x_s = x_1x_2\ldots x_s = 1. \tag{2}$$

Par exemple, pour $s=4$, les nombres

$$x_1 = -\frac{1}{n^2-1}, \quad x_2 = \frac{n^2}{n^2-1}, \quad x_3 = \frac{1-n^2}{n}, \quad x_4 = \frac{n^2-1}{n},$$

où $n = 2, 3, 4, \ldots$, satisfont aux conditions (2).

L'équivalence des théorèmes I et II de M. Cassels est démontrée dans mon article *Sur quelques problèmes non résolus d'arithmétique* paru dans L'Enseignement Mathématique, tome V, fasc. 4 (1959), p. 221-222.

En 1957 dans le journal Matematyka paraissant à Varsovie, X, Nr. 1 (45), p. 55, W. Mnich a posé la question de savoir si l'équation

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} = 1 \tag{3}$$

a des solutions en nombres entiers x, y, z.

Dans le même volume Nr. 3 (47), p. 11-13, j'ai démontré que cette question est équivalente au problème de W. Mnich dont nous avons parlé plus haut (Voir aussi mon livre *Teoria liczb II* (Warszawa 1959), p. 176.) M. W. Mnich a aussi posé son problème sous la forme équivalente suivante:

Existe-t-il un nombre rationnel r tel que toutes les racines de l'équation

$$x^3-x^2+rx-1=0$$

soient rationnelles?

Pour la démonstration de l'équivalence de ces problèmes voir mon article cité dans l'Enseignement Mathématique p. 223.

M. Tomaš Husák de Prague a démontré d'une façon élémentaire que le problème de W. Mnich équivaut à la question de savoir si l'équation

$$x^3+y^3+13z^3=7xyz$$

a des solutions en entiers non nuls x, y, z.

Comme l'a démontré M. Cassels, le problème de W. Mnich équivaut à la question de savoir si l'équation

$$y^2=x^3+(x+4)^2 \tag{4}$$

a des solutions en nombres rationnels $x\neq 0$ et y.

La démonstration de M. Cassels que de telles solutions n'existent pas n'est pas élémentaire. Or, on peut démontrer d'une façon élémentaire que l'équation (4) n'a pas de solutions en nombres entiers $x\neq 0$ et y. Voici une démonstration basée sur une idée de A. Schinzel.

Supposons que les entiers $x\neq 0$ et y satisfassent à l'équation (4). On a donc

$$x^3=(y-x-4)(y+x+4). \tag{5}$$

D'après (5) et $x\neq 0$, les entiers $y-x-4$ et $y+x+4$ sont non nuls. Soit

$$d=(y-x-4, y+x+4). \tag{6}$$

Si d avait un diviseur premier impair p, alors, d'après (5), on aurait $p|x$, $p|y-x-4$, $p|y+x+4$, d'ou $p|2y$, donc $p|y$ et $p|4$, ce qui est impossible. Donc d n'a aucun diviseur premier impair et parsuite d est une puissance du nombre 2 (d'exposant entier $\geqslant 0$).

Si $16|d$, on aurait, d'après (6) et (5), $2^8|x^3$, d'où $2^3|x$ et, comme $d|2x+8$, on aurait $16|8$, ce qui est impossible. On a donc $16\nmid d$.

Si $d=2$, on aurait $y-x-4=2m$, $y+x+4=2n$, où $(m,n)=1$. D'après (6) et (5) on aurait $2|x$, donc aussi $2|y$. Or, on a $2y=2m+2n$, d'où $y=m+n$, donc $2|m+n$ et, comme $(m,n)=1$, cela prouve que les nombres m et n sont tous les deux impairs. Comme $x^3=4mn$, le nombre x^3 est divisible par 4, mais ne l'est pas par 8, ce qui est impossible. On a donc $d\neq 2$.

Si $d=4$, on aurait $y-x-4=4m$, $y+x+4=4n$, où $(m,n)=1$. D'après (5) on aurait donc $x^3=16mn$, d'où il résulte que $4|x$ et $4|mn$ et, comme $(m,n)=1$, un des nombres m et n est divisible par 4 et l'autre impair. Or, d'après $4|x$ et $4|d|x-y-4$, on a $4|y=m+n$, ce qui est impossible. On a donc $d\neq 4$.

Comme $16\nmid d$, $d\neq 2$ et $d\neq 4$, les seuls cas possibles sont $d=1$ ou $d=8$.

Si $d=1$, il résulte de (6) et (5) que les nombres $y-x-4$ et $y+x+4$ sont des cubes d'entiers, soit $y-x-4=a^3$, $y+x+4=b^3$, d'où d'après (5), $x=ab$ et $2x+8=b^3-a^3$, donc $2ab+8=b^3-a^3$.

Il est évident qu'on ne peut pas avoir ici $a=b$. On a $2ab+8=b^3-a^3=(b-a)[(b-a)^2+3ab]$ d'où il résulte que si $b-a=1$, on aurait $2ab+8=1+3ab$, d'où $ab=7$, donc $a(a+1)=7$, ce qui est impossible. Donc, si $ab>0$, on a $b-a>0$, d'où $b-a\geqslant 2$ et $2ab+8>6ab$, ce qui donne $ab<2$, donc $ab=1$, d'où $a=b$, ce qui est impossible. Or, si $ab<0$, on a soit $a>0$, $b<0$, d'où $a^3-b^3=a^3+(-b)^3\geqslant a^2+(-b)^2\geqslant -2ab$, contrairement à $a^3-b^3=-2b-8<-2ab$, soit $a<0$, $b>0$, d'où $b^3<8$, donc $b=1$, ce qui donne $a^3+2a+7=0$, ce qui est impossible, la dernière équation n'ayant pas de racines entières. On a donc $ab=0$, contrairement à l'hypothèse que $x=ab\neq 0$. Par conséquent $d\neq 1$, $d=8$.

D'après (6) on a donc $y-x-4=8m$, $y+x+4=8n$, où m et n sont des entiers premiers entre eux et, d'après (5), on trouve $x^3=64mn$, donc $\left(\frac{x}{4}\right)^3=mn$ ce qui prouve, d'après $(m,n)=1$, que les nombres m et n sont des cubes d'entiers, soit $m=a^3$, $n=b^3$, donc $\frac{x}{4}=ab$ et $2x+8=8(n-m)=8(b^3-a^3)$, d'où $ab+1=b^3-a^3$. Il est évident qu'on ne peut pas avoir $a=b$. Donc $|b-a|\geqslant 1$. Si $ab>0$, on a $b>a$ et $b-a\geqslant 1$ et comme $ab+1=b^3-a^3=(b-a)[(b-a)^2+3ab]>3ab$, on trouve $2ab<1$, ce qui est incompatible avec $ab>0$. Comme $4ab=x\neq 0$, on a donc $ab<0$; puisque $|b-a|\geqslant 1$ et $|b^3-a^3|=|b-a|\times|(b+a)^2-ab|\geqslant -ab$, et que, d'autre part, d'après $ab<0$ on a $|ab+1|<|ab|=-ab$, l'égalité $ab+1=b^3-a^3$ est impossible.

La démonstration de l'impossibilité de l'équation (4) en nombres entiers $x\neq 0$ et y est ainsi achevée.

Quant aux équations (1), remarquons qu'il est facile de trouver toutes leurs solutions en nombres entiers de Gauss. Les seules solutions sont $r=1$, $s=i$, $t=-i$ et celles qu'on obtient en permutant ces trois nombres. Pour la démonstration voir mon livre cité, p. 176.

Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1960