En particulier, si

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/x = 2\liminf_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = K \qquad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

alors $\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi/\sqrt{K}$.

Remarquons que, grâce à ce dernier corollaire, on peut améliorer l'évaluation de la limite inférieure de la fonction $T_g(x)$, donnée par le théorème 12. En effet, dans les hypothèses de ce théorème, on doit avoir non seulement l'inégalité (40), mais aussi

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{K}} \leqslant \liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2K}}.$$

Revenons encore à l'exemple du n° 16. On voit facilement qu'il est possible de choisir les nombres $a_1, a_2, \ldots$ de telle sorte que la limite supérieure du quotient $g(x)/x$ soit égale à 2 et que la limite du quotient $G(x)/x^2$ soit égale à 1. Cela étant, du corollaire 12 il résulte que, pour là fonction $g(x)$ construite dans ce n°, on a $\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi$, tandis que $\limsup_{x\to+\infty} T_g(x) = +\infty$.

Travaux cités

[1] P. Appell, *Traité de mécanique rationelle*, vol. 1, Paris 1919.

[2] Z. Opial, *O ruchach izo- i tautochronicznych*, Zeszyty Naukowe U. J., Zeszyt 4, (1958), p. 13-15.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur la limitation des dérivées des solutions bornées d'un système d'équations différentielles du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

1. On sait que certaines hypothèses sur le second membre de l'équation différentielle du second ordre

$$u'' = f(t, u, u') \tag{1}$$

permettent d'évaluer les dérivées des solutions bornées de cette équation. Par exemple, si la fonction $f(t, u, v)$ est continue dans l'ensemble R: $-\infty < t < +\infty$, $-m \leqslant u \leqslant m$, $-\infty < v < +\infty$ et si elle satisfait dans R à l'inégalité

$$|f(t, u, v)| \leqslant a + \beta w(v) \qquad (a, \beta > 0), \tag{2}$$

où $w(v)$ est une fonction positive continue pour $v > 0$ et telle que

$$\int_1^\infty \frac{v\,dv}{w(v)} = +\infty, \tag{3}$$

la dérivée $u'(t)$ de toute solution $u(t)$ de l'équation (1), pour laquelle

$$|u(t)| \leqslant m \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

est bornée, elle aussi, dans le même intervalle $(-\infty, +\infty)$ (cf. M. Nagumo [3]). Il en est de même dans tout intervalle fini, pourvu que sa longueur soit suffisamment grande.

D'autres conditions suffisantes et nécessaires pour que les solutions de l'équation (1) jouissent de cette propriété ont été trouvées par T. Yoshizawa [5].

Il est facile de construire un exemple d'équation différentielle (1) qui admette des solutions bornées, mais dont les dérivées premières ne soient pas bornées. En effet, il en est ainsi de l'équation

$$u'' = (1 + u'^2)^{3/2}. \tag{4}$$

Pour le constater, il suffit de remarquer que ce sont les demi-circonférences de rayon 1 qui constituent la famille de solutions de l'équation (4), puisque l'égalité (4) signifie que la courbure $u''/(1+u'^2)^{3/2}$ des courbes cherchées est constante et égale à 1.

Il est à noter que le second membre de l'équation (4) ne satisfait pas aux conditions du théorème de M. Nagumo, car l'ordre de la croissance de la fonction $(1+v^2)^{3/2}$ est supérieur à celui qu'expriment l'inégalité (2) et la condition (3).

L'importance du théorème de M. Nagumo et d'autres théorèmes de ce type découle du fait qu'ils assurent la possibilité d'un prolongement des solutions de l'équation (1). Ils sont donc très utiles dans la résolution des problèmes aux limites pour l'équation différentielle du second ordre (cf. M. Nagumo [3]) et d'autres problèmes de ce genre (cf. p. ex. Z. Opial [4]).

Récemment R. Bass [1] a étendu quelques-uns de ces résultats aux systèmes d'équations différentielles du second ordre. Il a établi, entre autres, un théorème analogue au théorème de M. Nagumo. Dans la présente note je me propose d'étudier de plus près le problème de l'évaluation des dérivées des solutions bornées d'un tel système.

2. Envisageons le système d'équations différentielles du second ordre

$$X'' = f(t, X, X'), \tag{5}$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $f(t, X, Y) = \big(f_1(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)\big)$, et supposons que la fonction vectorielle $f(t, X, Y)$ soit continue dans tout l'espace (t, X, Y). Nous désignerons par $|X|$ la longueur euclidienne du vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ c'est-à-dire le nombre $\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.

Définition. Nous dirons que *le système* (5) *est du type* (K) si à tout $m > 0$ on peut faire correspondre deux nombres positifs $M(m)$ et $T(m)$ tels que toute solution $X(t)$ de ce système, pour laquelle

$$|X(t)| \leqslant m \tag{6}$$

dans un intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$ de longueur plus grande que $T(m)$, satisfait dans le même intervalle à l'inégalité

$$|X'(t)| \leqslant M(m). \tag{7}$$

3. R. Bass a démontré (cf. [1], lemme 1) que le système (5) est du type (K) si la fonction $f(t, X, Y)$ vérifie l'inégalité

$$|f(t, X, Y)| \leqslant A+B|Y| \tag{8}$$

dans tout ensemble R_m: $-\infty < t < +\infty$, $|X| \leqslant m$, $|Y| < +\infty$. Les constantes A et B peuvent dépendre de m.

L'inégalité (8) signifie que dans tout ensemble de l'espace (t, X, Y), dont les points ont des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ bornées, la fonction $f(t, X, Y)$ ne saurait croître trop vite par rapport à $|Y|$.

Nous allons montrer que le système (5) est du type (K), même dans le cas où l'ordre de la croissance de la fonction $f(t, X, Y)$ par rapport à $|Y|$ est supérieur à celui qu'exprime l'inégalité (8).

Théorème 1. *Si pour tout $m > 0$ la fonction continue $f(t, X, Y)$ satisfait dans l'ensemble R_m $(-\infty < t < +\infty, |X| \leqslant m, |Y| < +\infty)$ à l'inégalité*

$$|f(t, X, Y)| \leqslant A_m+B_m|Y|^{1+\alpha} \quad (A_m, B_m > 0) \tag{9}$$

où $\alpha < 1$, le système (5) *est du type* (K).

Pour la démonstration il suffit de modifier légèrement la démonstration du lemme de R. Bass cité ci-dessus.

Soit $X(t)$ une solution du système (5) qui satisfait à l'inégalité (6) dans un intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$. Pour abréger, nous écrirons A et B au lieu de A_m et B_m. Posons

$$C = 2m+\tfrac{1}{2}nA, \quad M(m) = \max\big(2C, (2nBC)^{1/(1-\alpha)}\big) \tag{10}$$

et supposons que la longueur de l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$ soit au moins égale à

$$T(m) = 4C/M(m). \tag{11}$$

Nous allons montrer que dans l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$ la fonction $X'(t)$ vérifie l'inégalité (7). Pour la démonstration par l'absurde supposons le contraire. La fonction $|X'(t)|$ admet donc en un point t_0 de l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$ un maximum plus grand que $M(m)$:

$$|X'(t_0)| > M(m). \tag{12}$$

La longueur de l'un des intervalles $\langle t_1, t_0\rangle$, $\langle t_0, t_2\rangle$ doit être au moins égale à $T(m)/2$. Supposons pour fixer les idées que l'on ait $t_2-t_0 \geqslant T(m)/2$.

En vertu du théorème de Taylor on a

$$X(t) = X(t_0)+(t-t_0)X'(t_0)+\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2\theta(t), \tag{13}$$

où $\theta(t) = \big(x_1''(t_0+\theta_1(t-t_0)), \dots, x_n''(t_0+\theta_n(t-t_0))\big)$ $(0 \leqslant \theta_i \leqslant 1,\ i = 1, \dots, n)$.

En raison de l'inégalité (9) on a pour tout $t \in \langle t_1, t_2\rangle$

$$|\theta(t)| \leqslant nA+nB|X'(t_0)|^{1+\alpha}. \tag{14}$$

Des formules (13) et (14) on tire l'inégalité

$$(t-t_0)|X'(t_0)| \leqslant 2m+\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2nA+\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2nB|X'(t_0)|^{1+\alpha} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_2). \tag{15}$$

Posons $t_3 = t_0+2C/|X'(t_0)|$. En raison des formules (10) et (11) le point t_3 appartient à l'intervalle $\langle t_0, t_2\rangle$. On a de plus $t_3-t_0 < 1$. De l'inégalité (15), appliquée à $t = t_3$, il vient

$$2C < 2m+\tfrac{1}{2}nA+\tfrac{1}{2}nB(2C)^2|X'(t_0)|^{\alpha-1}.$$

Enfin, en vertu de (10), on en tire

$$|X'(t_0)|^{1-\alpha} < 2nBC$$

ce qui est en contradiction avec la seconde des définitions (10) et l'inégalité (12).

4. Dans le cas où $\alpha = 1$ l'inégalité (15) se réduit à

$$(16) \qquad (t-t_0)|X'(t_0)| \leqslant 2m + \tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 nA + \tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 nB|X'(t_0)|^2 .$$

Choisissons le point t_3 de sorte que l'on ait $(t_3-t_0)|X'(t_0)| = 3m$. De l'inégalité (16) on obtient alors

$$2 \leqslant 9m\big(nA/|X'(t_0)|^2 + nB\big) .$$

Il s'ensuit que pour m suffisamment petit la valeur de $|X'(t_0)|$ ne peut pas être trop grande. Cela signifie que dans le cas $\alpha = 1$ l'inégalité (6) entraîne l'inégalité (7) pourvu que la constante m soit suffisamment petite.

5. Il est facile de construire un exemple d'un système (5) montrant que le théorème 1 cesse d'être vrai si l'on remplace l'inégalité (9) par celle-ci:

$$(17) \qquad |f(t, X, Y)| \leqslant A + B|Y|^2 .$$

On peut notamment construire un système de deux équations du second ordre

$$(18) \qquad x_1'' = f_1(x_1, x_2, x_1', x_2') , \qquad x_2'' = f_2(x_1, x_2, x_1', x_2')$$

dont les seconds membres satisfont à l'inégalité (17) et tel que pour tout $T > 0$ et tout $M > 0$ il existe une solution $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ qui vérifie l'inégalité

$$\max\big(x_1'^2(t) + x_2'^2(t)\big) \geqslant M^2 ,$$

bien que l'on ait

$$x_1^2(t) < 1 \quad \text{et} \quad x_2^2(t) < 1$$

dans tout l'intervalle $\langle 0, T\rangle$.

Pour ne pas compliquer les raisonnements nous nous bornerons à la construction d'un système (18) dont les seconds membres sont discontinus sur certains hyperplans de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2). Pour en obtenir un système ayant les mêmes propriétés, mais à seconds membres continus, il serait nécessaire d'y introduire quelques modifications.

Posons:

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x_1| \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ et } x_2, y_1, y_2 \text{ quelconques} , \\ -2y_2^2 \operatorname{sgn} y_1 & \text{pour } |x_1| > \tfrac{1}{2} \text{ et } x_2, y_1, y_2 \text{ quelconques} , \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x_2| \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ et } x_1, y_1, y_2 \text{ quelconques} , \\ -2y_1^2 \operatorname{sgn} y_2 & \text{pour } |x_2| > \tfrac{1}{2} \text{ et } x_1, y_1, y_2 \text{ quelconques} . \end{cases}$$

Il en résulte que la fonction vectorielle

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \big(f_1(x_1, x_2, y_1, y_2), f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)\big)$$

satisfait à l'inégalité (17) avec $A = 0$ et $B = 2$.

Soit $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ une solution du système (18) pour laquelle on a

$$x_1(0) = -\tfrac{1}{2} , \quad x_1'(0) = a > 0 , \quad x_2(0) = \tfrac{1}{2} , \quad x_2'(0) = a .$$

Dans l'intervalle $\langle 0, 1/a\rangle$ les fonctions $x_1(t), x_2(t)$ sont des solutions des équations

$$(19) \qquad x_1'' = 0 \quad \text{et} \quad x_2'' = -2a^2 .$$

Pour $t = 1/2a$ on a

$$x_1(1/2a) = 0 , \quad x_1'(1/2a) = a , \quad x_2(1/2a) = \tfrac{3}{4} , \quad x_2'(1/2a) = 0$$

et pour $t = 1/a$:

$$x_1(1/a) = \tfrac{1}{2} , \quad x_1'(1/a) = a , \quad x_2(1/a) = \tfrac{1}{2} , \quad x_2'(1/a) = -a .$$

Pour $t \geqslant 1/a$ on prolonge les fonctions $x_1(t), x_2(t)$ de sorte qu'elles soient continues, ainsi que leurs dérivées premières, dans tout l'intervalle $\langle 0, 2/a\rangle$ et qu'elles satisfassent dans l'intervalle $\langle 1/a, 2/a\rangle$ au système d'équations

$$(20) \qquad x_1'' = -2a^2 \quad \text{et} \quad x_2'' = 0 .$$

Pour $t = 2/a$ on obtient ainsi

$$x_1(2/a) = \tfrac{1}{2} , \quad x_1'(2/a) = -a , \quad x_2(2/a) = -\tfrac{1}{2} , \quad x_2'(2/a) = -a .$$

Dans l'intervalle $\langle 2/a, 3/a\rangle$ les fonctions $x_1(t), x_2(t)$ devront satisfaire au système d'équations

$$(21) \qquad x_1'' = 0 \quad \text{et} \quad x_2'' = 2a^2$$

et dans l'intervalle $\langle 3/a, 4/a\rangle$ au système

$$(22) \qquad x_1'' = 2a^2 \quad \text{et} \quad x_2'' = 0 .$$

Tous ces systèmes (19)-(22) constituent des cas particuliers du système (18). Or, pour $t = 4/a$ on a

$$x_1(4/a) = -\tfrac{1}{2} , \quad x_1'(4/a) = a , \quad x_2(4/a) = \tfrac{1}{2} , \quad x_2'(4/a) = a .$$

Cela signifie que $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est une solution périodique du système (18) de période $4/a$.

Dans tout l'intervalle $\langle 0, 4/a\rangle$ les fonctions $|x_1(t)|$ et $|x_2(t)|$ sont bornées par la constante 3/4 et, de plus, en tout point de cet intervalle on a ou bien $|x_1'(t)| = a$, ou bien $|x_2'(t)| = a$. Mais la constante a est tout à fait arbitraire, le système (18) n'est donc pas du type (K).

6. Revenons au cas d'une seule équation du second ordre (1). La fonction $w(v) = v^2$ vérifie la relation (3). L'équation (1) est donc du type (K) si son second membre satisfait à l'inégalité

$$|f(t, u, v)| \leqslant a + \beta v^2 \qquad (a, \beta > 0) .$$

L'exemple que nous venons de construire montre qu'il n'en est pas ainsi pour un système d'équations du second ordre. En même temps cet exemple explique bien la différence entre une seule équation du second ordre et un système de telles équations.

Soit par exemple $u(t)$ une solution de l'équation (1) telle que $u(0) = u'(0) = 0$. Si la fonction $f(t, u, v)$ satisfait à une inégalité du type (2), dans un voisinage de 0 la dérivée $u''(t)$ de la solution envisagée ne peut pas être trop grande. En d'autres termes, la fonction $|u''(t)|$ ne peut pas être grande si les valeurs des fonctions $|u(t)|$ et $|u'(t)|$ sont petites. Or, il n'en est pas ainsi, par exemple, pour le système de deux équations (18). En effet, si, pour $t = 0$, $x_1(0) = x_1'(0) = 0$, dans un voisinage suffisamment petit de 0 les fonctions $x_1(t)$ et $x_1'(t)$ doivent être assez petites, mais la dérivée seconde $x_1''(t)$ peut être très grande, car sa valeur ne dépend pas seulement de la grandeur des fonctions $|x_1(t)|, |x_1'(t)|$, mais aussi de celle des fonctions $|x_2(t)|, |x_2'(t)|$. Et c'est justement cette propriété des solutions du système (18) qui nous a permis de construire l'exemple d'un système d'équations qui n'est pas du type (K), bien que les seconds membres de ce système satisfassent à l'inégalité (17) — inégalité qui est suffisante, dans le cas d'une seule équation, pour que cette équation soit du type (K).

7. Dans l'hypothèse que la fonction vectorielle $f(t, X, Y)$ satisfait à l'inégalité (8) et vérifie la condition

$$Xf(t, X, Y) \leqslant 0 \tag{23}$$

pour tout t, X et Y, R. Bass [1] a démontré que le système (5) admet une famille F à un paramètre de solutions, telle que toute solution $X(t) \in F$ existe dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et que la fonction $X(t)$ soit non croissante dans le même intervalle. Dans la démonstration de ce théorème on n'a besoin de l'inégalité (8) que pour montrer que le système envisagé est du type (K). On peut donc, dans l'énoncé de ce théorème, substituer à (8) l'inégalité (9), puisque cette inégalité est suffisante, comme nous l'avons démontré, pour que le système (8) soit du type (K).

En outre, il est facile de remarquer que dans la démonstration du théorème de R. Bass la condition (23) peut être remplacée par la suivante, moins restrictive:

$$Xf(t, X, Y) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant 0 \text{ et } X, Y \text{ tels que } XY = 0 . \tag{24}$$

De ce que nous avons dit il résulte que l'on peut énoncer le théorème suivant généralisant le théorème cité de R. Bass:

THÉORÈME 2. *Si la fonction vectorielle continue $f(t, X, Y)$ satisfait dans un ensemble R_m $(-\infty < t < +\infty, |X| \leqslant m, |Y| < +\infty)$ à l'inégalité* (9) *avec $a < 1$ et vérifie dans cet ensemble la condition* (24), *le système* (5) *admet une famille à un paramètre de solutions $X(t)$ qui existent dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et telles que les fonctions $|X(t)|$ sont non croissantes dans le même intervalle.*

Remarquons enfin qu'on peut obtenir une démonstration de ce théorème, différente de celle de R. Bass, en appliquant au système (5), dont les seconds membres satisfont aux inégalités (9) et (24), un théorème général établi par M[me] Z. Mikołajska [2].

Travaux cités

[1] R. Bass, *On non-linear repulsive forces*, Contributions to the theory of non-linear oscillations 4 (1958), p. 201-211.

[2] Z. Mikołajska, *Sur les mouvements asymptotiques d'un point matériel dans le champ des forces repoussantes*, Bull. Ac. Pol. Sci., Cl. III., 1 (1953), p. 11-13.

[3] M. Nagumo, *Über die Differentialgleichung* $y'' = f(x, y, y')$, Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19 (1937), p. 861-866.

[4] Z. Opial, *Sur les solutions bornées de l'équation différentielle* $u'' = f(t, u, u')$, Ann. Polon. Math. 4 (1958), p. 314-324.

[5] T. Yoshizawa, *On the evaluation of the derivatives of solutions of* $y'' = f(x, y, y')$, Memoirs Coll. Sci. Univ. Kyoto. s. A, Vol. 28 (1953), p. 27-32.

Reçu par la Rédaction le 27. 5. 1959