ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation elliptique dont les coefficients dépendent d'une fonction inconnue

par D. Sadowska (Łódź)

1. Introduction. H. Poincaré, le premier, a posé le problème aux limites aux dérivées tangentielles en connexion avec l'étude du phénomène de la marée [1]. Le problème consistait à trouver une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine plan satisfaisant, sur la frontière de ce domaine, à une relation linéaire entre les valeurs limites: 1° de la dérivée dans la direction de la normale, 2° de la dérivée dans la direction de la tangente, 3° de la fonction elle-même.

Les travaux sur le problème de Poincaré ont été assez nombreux; citons en particulier ceux de B. Hvédélidzé [2] et de I. Vécoua [3].

Le problème de Poincaré a été généralisé par W. Pogorzelski pour le cas où les valeurs limites des dérivées satisfont, sur la frontière, à une relation non linéaire [4].

On doit à J. Wolska-Bochenek [11] l'extension du problème, résolu par W. Pogorzelski, au cas où la fonction $u(A)$ vérifie à l'intérieur du domaine l'équation $\Delta u = F(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$.

W. Pogorzelski a posé ensuite et résolu dans les travaux [5] et [9] le problème aux dérivées tangentielles pour les équations paraboliques et elliptiques de l'espace à n dimensions.

C'est également à W. Pogorzelski que je dois le problème qui fait l'objet du présent travail.

Soit dans l'espace euclidien à n dimensions ($n > 2$) l'équation aux dérivées partielles du type elliptique

$$(1)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A)u = F\left(A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

On admet les hypothèses suivantes sur les fonctions qui figurent dans l'équation (1):

I. Les fonctions réelles $a_{\alpha\beta}(A, u)$ et $b_\alpha(A, u)$ sont définies dans le domaine fermé

$$A(x_1, \dots, x_n) \in \Omega + S, \quad |u| \leqslant R, \tag{2}$$

où Ω désigne un domaine borné dans l'espace euclidien à n dimensions, limité par la surface fermée S; $(x_1, \dots, x_n)$ désignent les coordonnées rectangulaires du point A; R est un nombre positif donné. On suppose que les fonctions $a_{\alpha\beta}(A, u)$ et $b_\alpha(A, u)$ vérifient les conditions

$$|a_{\alpha\beta}(A, u) - a_{\alpha\beta}(A_1, u_1)| < k_a[r^h_{AA_1} + |u - u_1|^h], \tag{3}$$

$$|b_\alpha(A, u) - b_\alpha(A_1, u_1)| < k_b[r^h_{AA_1} + |u - u_1|^h], \tag{4}$$

où r_{AA_1} est la distance des deux points A et A_1, h une constante positive non supérieure à l'unité.

II. La fonction réelle $c(A)$, définie et continue dans le domaine fermé $\Omega + S$, satisfait dans ce domaine à une condition de Hölder de la forme

$$|c(A) - c(A_1)| < \mathrm{const}\, r^h_{AA_1}. \tag{5}$$

III. La fonction réelle $F(A, u, u_1, u_2, \dots, u_n)$ est définie et continue dans la région fermée

$$A \in \Omega + S, \quad |u| \leqslant R, \quad |u_\alpha| \leqslant R \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \tag{6}$$

en outre cette fonction vérifie la condition

$$|F(A, u, u_1, \dots, u_n) - F(A, u', u'_1, \dots, u'_n)| < k_F\Big[r^h_{AA_1} + |u - u'|^h + \sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu - u'_\nu|^h\Big]. \tag{7}$$

IV. La forme quadratique

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, u) X_\alpha X_\beta$$

est définie positive dans le domaine (2).

V. La surface S satisfait aux conditions de Liapounoff:

a. il existe un plan tangent en tout point de la surface S,

b. l'angle $\Delta(P, Q)$ entre deux normales aux points P, Q de la surface S, vérifie l'inégalité

$$\Delta(P, Q) < \mathrm{const}\, r^\varkappa_{PQ} \quad (0 < \varkappa \leqslant 1), \tag{8}$$

c. il existe un nombre positif δ tel que la sphère de centre au point arbitraire $P \in S$ et de rayon δ découpe une portion S_k de cette surface, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection sur le plan tangent au point P est un ensemble de points qui correspondent dans cette projection d'une façon univoque à l'ensemble des points S_k.

2. Formules et théorèmes principaux. Si l'on désigne par $\Psi^{(u)}_A(v)$ l'opération différentielle par rapport aux coordonnées du point $A(x_1, \dots, x_n)$, opération qui dépend de la fonction u:

$$\Psi^{(u)}_A(v) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\big(A, u(A)\big)\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha\big(A, u(A)\big)\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + c(A)v(A),$$

la solution fondamentale de l'équation $\Psi^{(u)}_A(v) = 0$ s'exprime, conformément aux résultats obtenus par W. Pogorzelski dans [7], par la formule

$$\Gamma^{(u)}(A, B) = w^B_{(u)}(A, B) + \iiint_\Omega w^M_{(u)}(A, M)\Phi^{(u)}(M, B)\,dM + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(A)\beta^{(u)}_\nu(B) \tag{9}$$

où

$$w^B_{(u)}(A, B) = \Big\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}[B, u(B)](x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)\Big\}^{-n/2+1}. \tag{10}$$

Les symboles des formules (9) et (10) sont définis comme il suit:

1. $A(x_1, \dots, x_n)$ et $B(\xi_1, \dots, \xi_n)$ désignent deux points arbitraires distincts du domaine Ω.

2. $a^{\alpha\beta}$ sont les éléments de la matrice inverse de la matrice des coefficients $\|a_{\alpha\beta}(A, u)\|$.

3. $u(B)$ est une fonction arbitraire dans $\Omega + S$, satisfaisant à l'inégalité $|u(B)| \leqslant R$ et à la condition

$$|u(A) - u(A_1)| < k r^\theta_{AA_1}, \tag{11}$$

où k est une constante positive, $0 < \theta \leqslant 1$.

4. $a_\nu(A)$, $\beta^{(u)}_\nu(B)$ désignent, pour le moment, des fonctions arbitraires, où les secondes dérivées des fonctions $a_\nu(A)$ et les fonctions $\beta^{(u)}_\nu(B)$ elles-mêmes sont bornées, et satisfont à la condition de Hölder dans le domaine $\Omega + S$ par rapport aux variables spatiales et à la variable u.

5. La fonction $\Phi^{(u)}(M, B)$ est la solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$\lambda^{(u)}_n(A)\Phi^{(u)}(A, B) = \Psi^{(u)}_A[w^B_{(u)}(A, B)] + \sum_{\nu=1}^{p} \Psi^{(u)}_A[a_\nu(A)]\beta^{(u)}_\nu(B) + \iiint_\Omega \Psi^{(u)}_A[w^M_{(u)}(A, M)]\Phi^{(u)}(M, B)\,dM, \tag{12}$$

où

$$\lambda^{(u)}_n(A) = \frac{2(n-2)\big(\sqrt{\pi}\big)^n}{\big[\det|a^{\alpha\beta}\big(A, u(A)\big)|\big]^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2}n)}. \tag{13}$$

La solution de l'équation (12) existe sous les hypothèses faites au début, comme l'a prouvé Pogorzelski (voir [7], p. 47), et elle a la forme

$$(13') \qquad \Phi^{(u)}(A, B) = [\lambda_n^{(u)}(A)]^{-1} \Psi_A^{(u)}\Big[w_{(u)}^{B}(A, B) + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(A)\beta_\nu^{(u)}(B)\Big] +$$

$$+ \iiint_{\Omega} \mathfrak{M}^{(u)}(A, M) \Psi_M^{(u)}\Big[w_{(u)}^{B}(M, B) + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(M)\beta_\nu^{(u)}(B)\Big][\lambda_n^{(u)}(M)]^{-1} dM .$$

Si en outre l'équation intégrale homogène respective a une solution différente de zéro, on peut choisir les fonctions $a_\nu(A)$ et $\beta_\nu^{(u)}(B)$ de manière que les conditions connues d'orthogonalité du troisième théorème de Fredholm soient satisfaites.

Les limitations suivantes ont lieu ([7], (14))

$$(14) \qquad |\Psi_A^{(u)}[w_{(u)}^{B}(A, B)]| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}},$$

où h est l'exposant de Hölder pour la fonction $a_{\alpha\beta}[A, u(A)]$, const est une constante positive qui dépend du coefficient de Hölder de la fonction $a_{\alpha\beta}$.

On a de même ([7], (17))

$$(15) \qquad |\Phi^{(u)}(A, B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}.$$

De plus la fonction $\Phi^{(u)}$ satisfait à la condition de Hölder dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$ qui ne contient pas le point B ([6], (59))

$$(16) \qquad |\Phi^{(u)}(A, B) - \Phi^{(u)}(A_1, B)| < \frac{\text{const}}{\inf(r_{AB}^{n+1})} r_{AA_1}^{h'}$$

$\inf(r_{AB})$ étant ici la borne inférieure de la distance du point fixé B au point mobile $A \in \Omega^*$, h' un nombre positif arbitraire inférieur à h.

On a les limitations suivantes des fonctions $\Gamma_{(u)}(A, B)$ et de ses dérivées ([7]), (29), (50))

$$(17) \qquad |\Gamma_{(u)}(A, B)| < \frac{C_1}{r_{AB}^{n-2}}, \qquad |\Gamma'_{(u)x_\nu}(A, B)| < \frac{C_1'}{r_{AB}^{n-1}},$$

où C_1, C_1' sont des constantes positives.

Le coefficient $\lambda_n^{(u)}(A)$ est borné inférieurement par un certain nombre positif

$$(18) \qquad 0 < C_2 < \lambda_n^{(u)}(A) .$$

La dérivée transversale de la fonction $\Gamma_{(u)}(A, B)$, définie par la formule

$$(19) \qquad \frac{d\Gamma_{(u)}(A, B)}{dT_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\big(A, u(A)\big)\cos(N_P, x_\beta)\frac{\partial\Gamma_{(u)}(A, B)}{\partial x_\alpha},$$

admet la limitation suivante ([7], (23))

$$(20) \qquad \left|\frac{d\Gamma_{(u)}(P, Q)}{dT_P}\right| < \frac{C_3}{r_{PQ}^{n-1-h^*}}, \qquad P \in S, \qquad Q \in S,$$

où $h^* = \min(h, \varkappa)$, $\varkappa$ est l'exposant de Hölder dans la condition de Liapounoff.

En outre ([7], (36))

$$(21) \qquad \left|\frac{d\Gamma_{(u)}(P, B)}{dT_P} + g(P)\Gamma_{(u)}(P, B)\right| < \frac{C_4}{r_{PB}^{n-1-h^*}}$$

pour toute fonction $u(A)$ qui vérifie les conditions (11) et $|u| \leqslant R$.

Dans les raisonnements à suivre on appliquera les théorèmes suivants (voir [6]).

THÉORÈME 1. *Si la fonction $\varrho(B)$ satisfait dans le domaine Ω à la condition de Hölder, l'intégrale*

$$(22) \qquad W_{(u)}(A) = \iiint_{\Omega} \Gamma_{(u)}(A, B)\varrho(B)dB,$$

dite potentiel généralisé de charge spatiale, a en tout point intérieur $A \in \Omega$ des dérivées du second ordre continues et elle satisfait à l'équation

$$(23) \qquad \Psi_{(u)}[W_{(u)}(A)] = -\lambda_n^{(u)}(A)\varrho(A) .$$

THÉORÈME 2. *Si la fonction $\varrho(B)$ est une fonction bornée et intégrable dans le domaine Ω, les dérivées du potentiel spatial (22) vérifient dans le domaine Ω une condition de Hölder de la forme* ([6], (85))

$$(24) \qquad |W_{(u)x_\alpha}(A) - W_{(u)x_\alpha}(A_1)| \leqslant dM_a M_\varrho r_{AA_1}^{\delta}$$

où δ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, $M_\varrho = \sup|\varrho(B)|$, $M_a = \sup|a^{\alpha\beta}(B, u)|$, *$d$ est une constante indépendante de ϱ.*

THÉORÈME 3. *Si la fonction $\varphi(Q)$ est continue, la dérivée transversale de la fonction*

$$(25) \qquad V_{(u)}(A) = \iint_{S} \Gamma_{(u)}(A, Q)\varphi(Q)dQ,$$

dite potentiel généralisé de simple couche, jouit de la propriété limite suivante ([6], (100)):

(26) $$\lim_{A\to P}\frac{d}{dT_P}\Big[\iint_S \Gamma_{(u)}(A,Q)\varphi(Q)\,dQ\Big] = -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u)}(P)\varphi(P)+\iint_S \frac{d\Gamma_{(u)}(P,Q)}{dT_P}\varphi(Q)\,dQ\,.$$

THÉORÈME 4. *Si la fonction $\varphi(Q)$, définie sur la surface S, est bornée et intégrable, les intégrales de surface*

(27) $$V_{(u)}(P)=\iint_S \Gamma_{(u)}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ\,,$$

(28) $$V_{(u)}^T(P)=\iint_S \frac{d\Gamma_{(u)}(P,Q)}{dT_P}\varphi(Q)\,dQ$$

vérifient, pour toute fonction u définie au point 3 de la p. 9, des conditions de Hölder de la forme ([6], (107), (108))

(29) $$|V_{(u)}(P)-V_{(u)}(P_1)|<k_1M_\varphi r_{PP_1}^{\delta}\,,$$

(30) $$|V_{(u)}^T(P)-V_{(u)}^T(P_1)|<k_2M_\varphi r_{PP_1}^{h^*}\,,$$

où δ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité, $h^*=\min(h,\varkappa)$, $M_\varphi=\sup|\varphi(P)|$.

Considérons maintenant un champ de directions $\{s_P\}$, défini sur la surface S, qui associe à chaque point P de la surface S un certain axe s_P tangent à la surface S au point P.

On admet que l'angle formé par les directions du champ en deux points arbitraires P et Q de la surface S, vérifie l'inégalité

(31) $$(s_P, s_Q)<\mathrm{const}\, r_{PQ}^{h_s}$$

où h_s est une constante positive arbitraire inférieure à l'unité.

Dans les raisonnements qui suivent on utilisera les propriétés suivantes des dérivées tangentielles du potentiel de simple couche, établies par W. Pogorzelski dans [8].

THÉORÈME 5. *Si la fonction $\varphi(Q)$ satisfait à une condition de Hölder de la forme*

(32) $$|\varphi(Q)-\varphi(Q_1)|<k_\varphi r_{QQ_1}^{h_\varphi}\qquad (k_\varphi>0;\ 0<h_\varphi\leqslant 1)$$

la dérivée du potentiel de simple couche (25) *dans la direction de la tangente s_P au point arbitraire $P\in S$ a une limite déterminée par la formule*

(33) $$\lim_{A\to P}\frac{d}{ds_P}[V^{(u)}(A)]=V_{s_P}^{(u)}(P)=\iint_S \Gamma_{s_P}^{(u)}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ$$

lorsque A tend d'une manière arbitraire vers P.

Signalons, à cette occasion, que la convergence absolue de l'intégrale de la formule (33) n'a généralement pas lieu. Cette intégrale est une intégrale singulière au sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire

$$\iint_S \Gamma_{s_P}^{(u)}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ=\lim_{\delta\to 0}\iint_{S-S_\Pi}\Gamma_{s_P}^{(u)}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ\,,$$

où S_Π est une portion de la surface S découpée par la sphère Π de centre au point P et de rayon δ.

THÉORÈME 6. *Si le champ $\{s_P\}$ de directions de tangentes sur la surface S vérifie la condition* (31) *et la densité $\varphi(Q)$ vérifie celle de Hölder* (32) *avec l'exposant $0<h_\varphi<1$, les valeurs limites des dérivées du potentiel de simple couche dans les directions du champ des tangentes $\{s_P\}$ satisfont à l'inégalité*

(34) $$|V_{s_P}^{(u)}(P)-V_{s_{P_1}}^{(u)}(P_1)|<(d_1M_\varphi+d_2k_\varphi)r_{PP_1}^{h'_\varphi}\,,$$

où $M_\varphi=\sup|\varphi|$, d_1, d_2 sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ, $h'_\varphi=\min(h_\varphi,\theta h_s,h,\varkappa)$, $0<\theta<1$.

COROLLAIRE. *Si le champ $\{s_P\}$ de directions de tangentes sur la surface S vérifie la condition* (31) *et la densité $\varphi(Q)$ vérifie celle de Hölder avec l'exposant h_φ, les valeurs limites des dérivées dans les directions du champ des tangentes $\{s_P\}$ du potentiel de simple couche satisfont à une condition de Hölder avec le même exposant h_φ, pourvu qu'on choisisse h_φ de manière que les inégalités suivantes soient vérifiées*

$$h_\varphi<h_s\quad \textit{et simultanément}\quad h_\varphi\leqslant\min(h,\varkappa)\,.$$

3. Enoncé du problème. Etant donnés q champs de directions de tangentes

(35) $$\{s_P^{(1)}\},\ \{s_P^{(2)}\},\ \ldots,\ \{s_P^{(q)}\}$$

sur la surface S, où

$$1\leqslant q\leqslant n-1\,,$$

on suppose que tous les champs (35) satisfont à la condition de la forme (31), c'est-à-dire que l'angle formé par deux directions du même champ aux points arbitraires P et Q de la surface S vérifie l'inégalité

(36) $$(s_P^{(\alpha)}, s_Q^{(\alpha)})<\mathrm{const}\, r_{PQ}^{h_s}\qquad (\alpha=1,2,\ldots,q)\,,$$

où $0<h_s<1$.

On cherche une fonction $u(A)$ qui satisfasse 1° à l'équation (1) en tout point intérieur du domaine Ω, 2° à une condition limite aux dérivées tangentielles de la forme

(37) $$\frac{du}{dT_P}+g(P)u(P)=G[P,u(P),u_{s_P^{(1)}}(P),u_{s_P^{(2)}}(P),\ldots,u_{s_P^{(q)}}(P)]$$

en tout point $P \in S$. On admet que la fonction donnée $G(P, u, v_1, \dots, v_q)$ est définie en tout point de la région

$$(38) \qquad P \in S, \quad |u| \leqslant R, \quad |v_a| \leqslant R \quad (a = 1, 2, \dots, q)$$

et qu'elle vérifie une condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$(39) \qquad |G(P, u, v_1, \dots, v_q) - G(P', u', v_1', \dots, v_q')| < k_G\Big[r_{PP'}^{h_G} + |u-u'| + \sum_{a=1}^{q} |v_a - v_a'|\Big].$$

On suppose enfin que la fonction donnée $g(P)$, définie en tout point $P \in S$, satisfait à une condition de Hölder de la forme

$$(40) \qquad |g(P) - g(P')| < k_g r_{PP'}^{h_g}.$$

4. Résolution du problème. On cherche la solution du problème sous forme de la somme

$$(41) \qquad u(A) = \iiint_{\Omega} \Gamma^{(u)}(A, B)[\lambda_n^{(u)}(B)]^{-1} F\Big[B, u(B), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\Big] dB + \iint_S \Gamma^{(u)}(A, Q)\varphi(Q)\, dQ$$

d'un potentiel de charge spatiale et d'un potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q)$.

Si l'on veut que la fonction (41) satisfasse à la condition limite (37), sous l'hypothèse que la fonction $\varphi(Q)$ vérifie la condition de Hölder, on obtient, d'après le théorème 3 l'équation suivante:

$$(42) \qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u)}(P)\varphi(P) + \iint_S \Big[\frac{d\Gamma^{(u)}(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u)}(P, Q)\Big]\varphi(Q)\, dQ +$$
$$+ \iiint_{\Omega} \Big[\frac{d\Gamma^{(u)}(P, B)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u)}(P, B)\Big][\lambda_n^{(u)}(B)]^{-1} F\Big[B, u(B), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\Big] dB$$
$$= G[P, u(P), u_{\substack{s(1)\\P}}(P), \dots, u_{\substack{s(q)\\P}}(P)],$$

où

$$(43) \qquad u_{\substack{s(a)\\P}}(P) = \iiint_{\Omega} \Gamma^{(u)}_{\substack{s(a)\\P}}(P, B) F\Big[B, u(B), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\Big][\lambda_n^{(u)} B)]^{-1} dB + \iint_S \Gamma^{(u)}_{\substack{s(a)\\P}}(P, Q)\varphi(Q)\, dQ \quad (a = 1, 2, \dots, q).$$

Ainsi, le problème est ramené à la résolution du système d'équations intégrodifférentielles (41), (42) à deux fonctions inconnues: $u(A)$ et $\varphi(P)$. Ce système présente de fortes singularités sous le signe de l'intégrale de surface dans l'expression (43), tandis que les singularités des autres intégrales sont faibles.

Afin de résoudre le sytème d'équations (41), (42), considérons le système suivant d'équations intégrales:

$$(44) \qquad \begin{cases} u_0(A) = \iiint_{\Omega} \Gamma^{(u_0)}(A, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B) \dots, u_n(B)]\, dB + \\ \qquad + \iint_S \Gamma^{(u_0)}(A, Q)\varphi(Q)\, dQ, \\ u_\nu(A) = \iiint_{\Omega} \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \dots, u_n(B)]\, dB + \\ \qquad + \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, Q)\varphi(Q)\, dQ \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

$$(45) \qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u_0)}(P)\varphi(P) + \iint_S \Big[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, Q)\Big]\varphi(Q)\, dQ +$$
$$+ \iiint_{\Omega} \Big[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, B)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, B)\Big] \times$$
$$\times [\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \dots, u_n(B)]\, dB$$
$$= G[P, u_0(P), \overline{u}_{\substack{s(1)\\P}}(P), \dots, \overline{u}_{\substack{s(q)\\P}}(P)]$$

à $n+2$ fonctions inconnues $u_0(A), u_1(A), \dots, u_n(A), \varphi(P)$. On a

$$(46) \qquad \overline{u}_{\substack{s(a)\\P}}(P) = \iiint_{\Omega} \Gamma^{(u_0)}_{\substack{s(a)\\P}}(P, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \dots, u_n(B)]\, dB + \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{\substack{s(a)\\P}}(P, Q)\varphi(Q)\, dQ.$$

Le système d'équations intégrales (44), (45) est irrésoluble, dans les hypothèses faites au début, par les méthodes de l'analyse classique. Il sera résolu à l'aide du théorème topologique de J. Schauder [6]: *Toute transformation continue d'un ensemble fermé et convexe de l'espace de Banach en son sous-ensemble compact admet au moins un point invariable.*

Considérons l'espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes

$$[u_0(A), u_1(A), \dots, u_n(A), \varphi(P)]$$

de fonctions réelles continues, définies pour $[A \in \Omega + S, P \in S]$.

On admet dans cet espace les définitions connues de la somme de deux points et du produit d'un point par un nombre réel. On admet pour norme du point $U[u_0, u_1, \dots, u_n, \varphi]$ la somme

$$\|U\| = \sum_{\nu=0}^{n} \sup |u_\nu(A)| + \sup |\varphi(P)|.$$

La distance de deux points est définie par la formule

$$\delta(U, V) = \|U - V\| .$$

L'espace Λ étant linéaire, normé et complet, est un espace de Banach.

Considérons dans l'espace Λ l'ensemble borné et fermé Z de tous les points $U[u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P)]$ qui vérifient les inégalités suivantes

$$(47)\qquad \begin{gathered} |u_\nu(A)| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \quad A \in \Omega + S, \\ |\varphi(P)| \leqslant \varrho, \quad P \in S, \\ |\varphi(P) - \varphi(P_1)| \leqslant k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, \quad P \in S, \quad P_1 \in S . \end{gathered}$$

L'ensemble Z est fermé, car si une suite arbitraire de points appartenant à Z satisfait aux formules (47), les points limites de cette suite les satisfont aussi. L'ensemble Z est convexe, car tout point

$$(1-\gamma)U + \gamma V \qquad (0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$$

du segment, joignant deux points arbitraires U et V de l'ensemble Z, appartient à cet ensemble.

En égard au système d'équations (44), (45), transformons l'ensemble Z moyennant les relations

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} v_0(A) &= \iiint_\Omega \Gamma^{(u_0)}(A, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,dB + \\ &\qquad + \iint_S \Gamma^{(u_0)}(A, Q)\varphi(Q)\,dQ , \\ v_\nu(A) &= \iiint_\Omega \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,dB + \\ &\qquad + \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, Q)\varphi(Q)\,dQ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

$$(49)\qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u_0)}(P)\psi(P) + \iint_S \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma^{(u_0)}(P, Q)] + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, Q)\right\}\psi(Q)\,dQ + \\ + \iiint_\Omega \left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, B)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, B)\right] \times \\ \times [\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,dB \\ = G[P, v_0(P), \overline{u}_{s_P^{(1)}}(P), \ldots, \overline{u}_{s_P^{(q)}}(P)] .$$

On prouvera que cette transformation associe à tout point $[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de l'ensemble Z un point déterminé $[v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi]$ de l'espace Λ et l'on cherchera les conditions pour que l'ensemble Z' des points transformés soit un sous-ensemble de Z, c'est-à-dire les conditions qui impliquent

$$(50)\qquad |v_\nu(A)| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \quad A \in \Omega + S ,$$

$$(51)\qquad |\psi(P)| \leqslant \varrho, \quad P \in S ,$$

$$(52)\qquad |\psi(P) - \psi(P_1)| \leqslant k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, \quad P, P_1 \in S .$$

Si l'on tient compte des inégalités (17), (18), et si l'on décompose l'intégrale

$$(53)\qquad \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, Q)\varphi(Q)\,dQ = \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, Q)[\varphi(Q) - \varphi(P)]\,dQ + \\ + \varphi(P)\iint_S \Gamma^{(u_0)}_{x_\nu}(A, Q)\,dQ ,$$

où P est un point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $A \in \Omega$, on conclut que les fonctions (48) satisfont aux relations

$$(54)\qquad |v_0(A)| < A_1 M_F + A_2\varrho , \qquad |v_\nu(A)| < A_1' M_F + A_2'\varrho + A_3' k_\varphi ,$$

$A_1, A_2, A_1', A_2', A_3'$ étant des constantes positives indépendantes des fonctions F et φ, $M_F = \sup|F|$.

En vertu des théorèmes 1 et 4 la fonction $v_0(A)$ vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(55)\qquad |v_0(A) - v_0(A_1)| < (A_5 \sup|\varphi| + DM_F) r_{AA_1}^{\theta} , \qquad A \in \Omega + S ,$$

où θ est un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité, tandis que A_5 et D sont des constantes positives, indépendantes de F et φ, mais dépendant du domaine d'intégration et de $\sup|a_{\alpha\beta}^{(u_0)}|$.

Si l'on admet, en vertu des théorèmes cités au début, les valeurs limites des fonctions v_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ pour valeurs de ces fonctions à la surface S, on trouve que ces fonctions sont continues dans le domaine fermé $\Omega + S$. Ces fonctions satisfont en outre à l'inégalité (50), pourvu que les constantes positives arbitraires ϱ et k_φ vérifient les relations

$$(56)\qquad A_1 M_F + A_2\varrho \leqslant R , \qquad A_1' M_F + A_2'\varrho + A_3' k_\varphi \leqslant R .$$

Cherchons à présent la condition pour que la fonction transformée $\psi(P)$ satisfasse à l'inégalité (51).

Considérons l'équation de Fredholm de la forme

$$(57)\qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u_0)}(P)\psi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, Q)\right]\psi(Q)\,dQ = f(P) ,$$

où $f(P)$ est une fonction donnée, bornée et intégrable sur la surface S. Supposons que l'équation homogène

$$(57')\qquad -\tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u_0)}(P)\psi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma^{(u_0)}(P, Q)\right]\psi(Q)\,dQ = 0$$

n'admette que la solution $\psi = 0$. Si l'on tient compte des inégalités (17), (18) et (20), on voit que le noyau de l'équation (57) satisfait à une inégalité de la forme

$$(58)\qquad \left|[2\lambda_n^{(u_0)}(P)]^{-1}\left[\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P,Q)}{dT_P}+g(P)\Gamma^{(u_0)}(P,Q)\right]\right| < \frac{C}{r_{PQ}^{n-1-h^*}}$$

où C est le même pour toutes les fonctions $u_0(A)\in Z$ et $h^* = \min(h, \varkappa)$. Ainsi l'équation (57) a, en vertu du premier théorème de Fredholm, une solution continue de la forme

$$(59)\qquad \psi(P) = \frac{2f(P)}{\lambda_n^{(u_0)}(P)} + \iint_S \mathfrak{M}^{(u_0)}(P,Q)\frac{f(Q)}{\lambda_n^{(u_0)}(Q)}\,dQ\,,$$

où la fonction $\mathfrak{M}^{(u_0)}$ est la somme de plusieurs noyaux itérés du noyau (58), ainsi que du noyau résolvant du premier noyau itéré borné. Par conséquent, il existe une constante positive C_5, indépendante de la fonction $f(P)$ et telle que

$$(60)\qquad |\psi(P)| < \frac{M_f}{C_2}(1+C_5 s_2)$$

où $M_f = \sup|f(P)|$, tandis que s_2 désigne la borne supérieure de l'intégrale

$$(61)\qquad \iint_S \frac{dQ}{r_{PQ}^{n-1-h^*}} \leqslant s_2\,.$$

Cherchons une limitation de M_f. On la trouve en tenant compte de la relation (21); en effet, on a

$$(62)\qquad M_f \leqslant \frac{M_F C_4}{C_2}\iiint_\Omega \frac{dB}{r_{PB}^{n-1}} + M_G = \frac{C_4 M_F \omega_n L}{C_2} + M_G$$

où ω_n est l'aire de la surface de la sphère unité dans l'espace à n dimensions, L le diamètre du domaine Ω, $M_G = \sup|G|$. On voit donc que $|\psi(P)|\leqslant \varrho$ lorsque

$$(63)\qquad \left(\frac{C_4\omega_n M_F L}{C_2^2}+\frac{M_G}{C_2}\right)(1+C_5 s_2) \leqslant \varrho\,.$$

Si l'on désigne par A_3 et A_4 les expressions

$$(64)\qquad A_3 = \frac{C_4\omega_n L}{C_2^2}(1+C_5 s_2)\,,\qquad A_4 = \frac{1+C_5 s_2}{C_2}\,,$$

on trouve que la fonction $\psi(P)$ satisfait à l'inégalité $|\psi(P)|\leqslant\varrho$, pourvu que soit vérifiée la condition

$$(65)\qquad A_3 M_F + A_4 M_G \leqslant \varrho\,.$$

Il ne reste qu'à trouver la condition pour que les fonctions transformées $\psi(P)$ vérifient l'inégalité de Hölder (52). Désignons dans ce but par $I_1(P)$ le potentiel de simple couche et par $I_2(P)$ le potentiel de charge spatiale qui figurent dans l'équation (49). Cette équation pourra alors s'écrire sous la forme

$$(66)\qquad \tfrac{1}{2}\lambda_n^{(u_0)}(P)\psi(P) = I_1(P)+I_2((P)-G[P, v_0(P), \overline{u}_{s_P^{(1)}}(P), \ldots, \overline{u}_{s_P^{(q)}}(P)]\,.$$

Cherchons une limitation de la différence $|\psi(P)-\psi(P_1)|$. On voit bien que cette différence satisfait à l'inégalité

$$(67)\qquad \begin{aligned}|\psi(P)-\psi(P_1)| < {} & \frac{|\psi(P_1)|}{\lambda_n^{(u_0)}(P)}|\lambda_n^{(u_0)}(P)-\lambda_n^{(u_0)}(P_1)| + \\ & +\frac{2}{\lambda_n^{(u_0)}(P)}|I_1(P)-I_1(P_1)| + \frac{2}{\lambda_n^{(u_0)}(P)}|I_2(P)-I_2(P_1)| + \\ & +\frac{2}{\lambda_n^{(u_0)}(P)}|G[P, v_0(P), \overline{u}_{s_P^{(1)}}(P), \ldots, \overline{u}_{s_P^{(q)}}(P)] - \\ & - G[P_1, v_0(P_1), \overline{u}_{s_{P_1}^{(1)}}(P_1), \ldots, \overline{u}_{s_{P_1}^{(q)}}(P_1)]| = R_1+R_2+R_3+R_4\,.\end{aligned}$$

La limitation de R_1 est la suivante:

$$(68)\qquad R_1 \leqslant a_1\varrho r_{PP_1}^{h}\,.$$

En vertu du théorème 4, on trouve la limitation de R_2:

$$(69)\qquad R_2 \leqslant \frac{\varrho}{C_2}[C_3 L\omega_n r_{PP_1}^{h^*} + C_1 M_g r_{PP_1}^{\delta} + C_1 k_g s_1 r_{PP_1}^{h_g}]\,,$$

où $h^* = \min(h, \varkappa)$, δ est un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité, s_1 la borne supérieure de l'intégrale

$$(70)\qquad \iint_S \frac{dQ}{r_{PQ}^{n-2}} \leqslant s_1\,.$$

Écrivons l'inégalité (69) sous la forme simplifiée

$$(71)\qquad R_2 \leqslant a_2\varrho r_{PP_1}^{h_2}$$

où

$$(72)\qquad a_2 = [C_3 L\omega_n + C_1 M_g + C_1 k_g s_1]\,C_2^{-1}$$

et

$$(73)\qquad h_2 = \min(h, \varkappa, h_g)\,.$$

La différence R_3 peut être mise sous la forme

(74) $$R_3 = \frac{2}{\lambda_n^{(u_0)}(P)}\Big|\iiint\limits_{\Omega}\Big\{\frac{d\Gamma^{(u_0)}(P,B)}{dT_P} - \frac{d\Gamma^{(u_0)}(P_1,B)}{dT_{P_1}} + g(P)[\Gamma^{(u_0)}(P,B)-\Gamma^{(u_0)}(P_1,B)]+\Gamma^{(u_0)}(P_1,B)[g(P)-g(P_1)]\Big\}\times \times[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1}F[B, u_0(B), \ldots, u_n(B)]\,dB\Big|.$$

Il en résulte la limitation suivante de R_3:

(75) $$R_3 \leqslant \frac{M_F}{C_2^2}[C_3L^2\omega_n r_{PP_1}^{\delta} + 2L\omega_n r_{PP_1} + C_1\omega_n L^2 r_{PP_1}^{h_g}],$$

où δ désigne un nombre positif inférieur à l'unité. L'inégalité (75) peut s'écrire succinctement sous la forme

(76) $$R_3 \leqslant a_3 M_F r_{PP_1}^{h_g},$$

où

(77) $$a_3 = (C_3L^2\omega_n + 2L^{1-h_g}\omega_n + CL^2\omega_n)\,C_2^{-2}.$$

Il est à remarquer que

(78) $$R_4 \leqslant \frac{2k_G}{C_2}\Big\{r_{PP_1}^{h_G} + |v_0(P)-v_0(P_1)| + \sum_{a=1}^{q}|\overline{u}_{\underset{P}{s(a)}}(P)-\overline{u}_{\underset{P_1}{s(a)}}(P_1)|\Big\}.$$

D'après le théorème 5, on a

(79) $$\overline{u}_{\underset{P}{s(a)}}(P)-\overline{u}_{\underset{P_1}{s(a)}}(P_1) = \iiint\limits_{\Omega}[\Gamma^{(u_0)}_{\underset{P}{s(a)}}(P,B)-\Gamma^{(u_0)}_{\underset{P_1}{s(a)}}(P_1,B)][\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1}F[B, u_0(B), \ldots, u_n(B)]\,dB + \iint\limits_{S}\Gamma^{(u_0)}_{\underset{P}{s(a)}}(P,Q)\varphi(Q)\,dQ - \iint\limits_{S}\Gamma^{(u_0)}_{\underset{P_1}{s(a)}}(P_1,Q)\varphi(Q)\,dQ \quad (a = 1, 2, \ldots, q).$$

Il découle du théorème 6 que

(80) $$|\overline{u}_{\underset{P}{s(a)}}(P)-\overline{u}_{\underset{P_1}{s(a)}}(P_1)| \leqslant \frac{M_F}{C_2}d_1^{(a)}r_{PP_1}^{\delta}L\omega_n + [d_2^{(a)}\varrho + d_3^{(a)}k_\varphi]r_{PP_1}^{h'_\varphi},$$

où $0<\delta<1$ et

(81) $$0 < h'_\varphi\begin{cases} < h_s, \\ \leqslant \min(h, \varkappa).\end{cases}$$

Ainsi on a la limitation suivante de R_4:

(82) $$R_4 \leqslant \frac{2k_G}{C_2}\Big\{r_{PP_1}^{h_G} + (A_5\varrho + DM_F)r_{PP_1}^{\theta} + \Big[M_F\sum_{a=1}^{q}Ld_1^{(a)}\omega_n C_2^{-1} + \varrho\sum_{a=1}^{q}d_2^{(a)} + k_\varphi\sum_{a=1}^{q}d_3^{(a)}\Big]r_{PP_1}^{h'_\varphi}\Big\}.$$

Si l'on désigne par h_4 un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

(83) $$h_4 \leqslant \min(h_G, h'_\varphi)$$

et par D_1, D_2, D_3 les coefficients de la relation (82)

(84) $$D_1 = 2k_GC_2^{-1}\Big[D + \sum_{a=1}^{q}d_1^{(a)}L\omega_n C_2^{-1}\Big],\quad D_2 = 2k_GC_2^{-1}\Big[A_5 + \sum_{a=1}^{q}d_2^{(a)}\Big],\quad D_3 = 2k_GC_2^{-1}\sum_{a=1}^{q}d_3^{(a)},$$

celle-ci pourra s'écrire sous la forme

(85) $$R_4 \leqslant [2k_GC_2^{-1} + D_1M_F + \varrho D_2 + k_\varphi D_3]r_{PP_1}^{h_4}.$$

En tenant compte des relations (67), (68), (71) et (85), on trouve

(86) $$|\psi(P)-\psi(P_1)| \leqslant [A_6\varrho + A_7M_F + D_3k_\varphi + 2k_GC_2^{-1}]r_{PP_1}^{h_\varphi},$$

où

(87) $$A_6 = a_1 + a_2 + D_2, \qquad A_7 = a_3 + D_1$$

et

(88) $$0 < h_\varphi\begin{cases}\leqslant \min(h, \varkappa, h_g, h_G), \\ < h_s.\end{cases}$$

Par conséquent les fonctions $\psi(P)$ vérifient la condition de Hölder (52) si

(89) $$A_6\varrho + A_7M_F + 2k_GC_2^{-1} \leqslant k_\varphi(1-D_3)$$

et si le nombre h_φ est choisi de manière que les relations (88) soient vérifiées. Tout calcul fait, les inégalités (56), (65) et (89) nous permettent d'énoncer le lemme suivant.

LEMME 1. *L'ensemble Z' des points transformés $[v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi]$ défini par les formules* (48), (49) *est un sous-ensemble de l'ensemble Z, défini par la relation* (47), *pourvu que les paramètres ϱ, k_φ et h_φ satisfassent simultanément aux équations suivantes:*

$$
(90)\qquad \begin{cases} A_1 M_F + A_2\varrho \leqslant R\,, & A_1' M_F + A_2'\varrho + A_3' k_\varphi \leqslant R\,, \\ A_3 M_F + A_4 M_G \leqslant \varrho\,, & A_6\varrho + A_7 M_F + 2k_G C_2^{-1} \leqslant k_\varphi(1-D_3)\,, \\ 0 < h_\varphi \begin{cases} \leqslant \min(h, \varkappa, h_g, h_G)\,, \\ < h_s\,. \end{cases} & \end{cases}
$$

Le genre de ces inégalités montre qu'elles peuvent être simultanément satisfaites, pourvu que les bornes supérieures M_F, M_G et k_G soient convenablement choisies.

Nous établirons maintenant le lemme suivant:

LEMME 2. *La transformation définie par les formules* (48) *et* (49) *est continue dans l'espace* Λ.

Démonstration. Soit une suite arbitraire de points

$$
U_m[u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}]
$$

de l'espace Λ tendant vers le point $U[u_0, u_1, \dots, u_n, \varphi]$ de cet espace, c'est-à-dire $\delta(U_m, U)\to 0$ lorsque $m\to\infty$. Il s'agit de démontrer que la suite des points transformés $V_m[v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, \dots, v_n^{(m)}, \psi^{(m)}]$ tend vers un point $V[v_0, v_1, \dots, v_n, \psi]$ de cet espace qui correspond dans cette transformation (48), (49) au point limite $U[u_0, u_1, \dots, u_n, \varphi]$. Il faudra donc prouver que toutes les intégrales qui figurent dans les expressions (48), (49) et contiennent les fonctions $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}$, tendent uniformément vers les intégrales respectives contenant les fonctions limites $u_0, u_1, \dots, u_n, \varphi$.

Prouvons d'abord que la suite de fonctions

$$
(91)\qquad W_m(A) = \iiint_\Omega \Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B)[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(B)]^{-1} F[B, u_0^{(m)}(B), \dots, u_n^{(m)}(B)]\,dB
$$

tend uniformément vers la fonction

$$
(92)\qquad W(A) = \iiint_\Omega \Gamma^{(u_0)}(A,B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), \dots, u_n(B)]\,dB
$$

lorsque $u_\nu^{(m)}\to u_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, n)$. Considérons la différence

$$
\begin{aligned}
(93)\qquad W_m(A) - W(A) = \iiint_\Omega & [\Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B) - \Gamma^{(u_0)}(A,B)]\times \\
& \times [\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), \dots, u_n(B)]\,dB + \\
+ \iiint_\Omega & \{[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(B)]^{-1} - [\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1}\}\Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B) F[B, u_0(B), \dots, u_n(B)]\,dB + \\
+ \iiint_\Omega & \{F[B, u_0^{(m)}(B), \dots, u_n^{(m)}(B)] - F[B, u_0(B), \dots, u_n(B)]\}\times \\
& \times[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(B)]^{-1}\Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B)\,dB = \Delta_1(A) + \Delta_2(A) + \Delta_3(A)\,.
\end{aligned}
$$

Il est évident que les intégrales $\Delta_2(A)$ et $\Delta_3(A)$ tendent vers zéro lorsque $u_\nu^{(m)}\to u_\nu$. Il ne nous reste donc qu'à étudier l'intégrale $\Delta_1(A)$. On voit bien que la différence $\Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B) - \Gamma^{(u_0)}(A,B)$ peut être mise sous la forme

$$
\begin{aligned}
(94)\qquad \Gamma^{(u_0^{(m)})}(A,B) - \Gamma^{(u_0)}(A,B) & \\
= w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B) - w^B_{(u_0)}(A,B) & + \overline{w}^B_{(u_0^{(m)})}(A,B) - \overline{w}^B_{(u_0)}(A,B)\,,
\end{aligned}
$$

où $\overline{w}_{(u_0)}(A,B)$ est défini par la formule (10), tandis que

$$
(95)\qquad \overline{w}_{(u_0)}(A,B) = \iiint_\Omega w^M_{(u_0)}(A,M)\Phi^{(u_0)}(M,B)\,dM\,.
$$

Il est à remarquer ensuite qu'il existe deux nombres g_1 et g_2 tels que la relation suivante a lieu dans le domaine Ω:

$$
(96)\qquad g_1 r_{AB}^2 < \sum_{\alpha,\beta=1}^n a^{\alpha\beta}[B, u(B)](x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) < g_2 r_{AB}^2\,.
$$

Si l'on tient compte de la formule (10) et si l'on désigne par σ_{u_0} l'expression

$$
\sigma_{u_0} = \sum_{\alpha,\beta=1}^n a^{\alpha\beta}[B, u_0(B)](x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)
$$

et par $\sigma_{u_0^{(m)}}$ l'expression

$$
\sigma_{u_0}^{(m)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^n a^{\alpha\beta}[B, u_0^{(m)}(B)](x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)\,,
$$

on a

$$
\begin{aligned}
w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B) - w^B_{(u_0)}(A,B) &= |(\sigma_{(u_0^{(m)})})^{-n/2+1} - (\sigma_{u_0})^{-n/2+1}| \\
&= \left|\frac{(\sigma_{u_0})^{(n-2)/2} - (\sigma_{u_0^{(m)}})^{(n-2)/2}}{(\sigma_{u_0^{(m)}}\cdot\sigma_{u_0})^{(n-2)/2}}\right| \\
&= \left|\frac{(\sigma_{u_0})^{n-2} - (\sigma_{u_0^{(m)}})^{n-2}}{(\sigma_{u_0}\cdot\sigma_{u_0^{(m)}})^{(n-2)/2}[(\sigma_{u_0^{(m)}})^{(n-2)/2} + (\sigma_{u_0})^{(n-2)/2}]}\right| \\
&= \left|\frac{(\sigma_{u_0} - \sigma_{u_0^{(m)}})[(\sigma_{u_0})^{n-3} + (\sigma_{u_0})^{n-4}\sigma_{u_0^{(m)}} + \dots + (\sigma_{u_0^{(m)}})^{n-3}]}{(\sigma_{u_0}\cdot\sigma_{u_0^{(m)}})^{(n-2)/2}[(\sigma_{u_0^{(m)}})^{(n-2)/2} + (\sigma_{u_0})^{(n-2)/2}]}\right| \\
&\leqslant \frac{\sup\left|a^{\alpha\beta}(B, u_0^{(m)}(B)) - a^{\alpha\beta}(B, u_0(B))\right| r_{AB}^2 n g_2^{n-3} r_{AB}^{2n-6}}{(g_1^2 r_{AB}^4)^{(n-2)/2}\cdot 2(g_1 r_{AB}^2)^{(n-2)/2}} \\
&= \frac{n g_2^{n-3}}{2 g_1^{3(n-2)/2} r_{AB}^{n-2}}\cdot\sup|a^{\alpha\beta}[B, u_0^{(m)}(B)] - a^{\alpha\beta}[B, u_0(B)]|\,.
\end{aligned}
$$

Finalement on obtient la limitation suivante de la différence considérée:

$$(97)\qquad |w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)-w^B_{(u_0)}(A,B)|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2}}\cdot\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h .$$

Nous étudierons maintenant la différence $\overline{w}_{u_0^m}(A,B)-\overline{w}^B_{u_0}(A,B)$. La fonction $\Phi^{(u_0)}$ qui figure dans la formule (95) satisfait à l'équation intégrale suivante (cf. la formule (12)):

$$(98)\qquad \Phi^{(u_0)}(A,B)=\Psi_A^{(u_0)}\Big[w^B_{(u_0)}(A,B)+\sum_{\nu=1}^{p}a_\nu(A)\beta_\nu^{(u_0)}(B)\Big][\lambda_n^{(u_0)}(A)]^{-1}+$$
$$+\iiint_\Omega[\lambda_n^{(u_0)}(A)]^{-1}\Psi_A^{(u_0)}[w^M_{(u_0)}(A,M)]\Phi^{(u_0)}(M,B)\,dM .$$

L'équation (98) peut s'écrire sous la forme abrégée

$$(99)\ \Phi^{u_0}(A,B)=L^{(u_0)}(A,B)+K^{(u_0)}(A,B)+\iiint_\Omega L^{(u_0)}(A,M)\Phi^{(u_0)}(M,B)\,dM$$

où

$$(100)\qquad L^{(u_0)}(A,B)=[\lambda_n^{(u_0)}(A)]^{-1}\Psi_A^{(u_0)}[w^B_{(u_0)}(A,B)],$$

$$(101)\qquad K^{(u_0)}(A,B)=[\lambda_n^{(u_0)}(A)]^{-1}\Psi_A^{(u_0)}\Big[\sum_{\nu=1}^{p}a_\nu(A)\beta_\nu^{(u_0)}(B)\Big].$$

Ainsi la différence $\Phi^{(u_0^{(m)})}(A,B)-\Phi^{(u_0)}(A,B)$ vérifie l'équation intégrale

$$(102)\qquad \Phi^{(u_0^{(m)})}(A,B)-\Phi^{(u_0)}(A,B)=L^{(u_0^{(m)})}(A,B)-L^{(u_0)}(A,B)+$$
$$+K^{(u_0^{(m)})}(A,B)-K^{(u_0)}(A,B)+$$
$$+\iiint_\Omega[L^{(u_0^{(m)})}(A,M)-L^{(u_0)}(A,M)]\Phi^{(u_0^{(m)})}(M,B)\,dM+$$
$$+\iiint_\Omega L^{(u_0)}(A,M)[\Phi^{(u_0^{(m)})}(M,B)-\Phi^{(u_0)}(M,B)]\,dM .$$

Or, cette équation intégrale a la solution suivante

$$(103)\ \Phi^{(u_0^{(m)})}(A,B)-\Phi^{(u_0)}(A,B)=X(A,B)+\iiint_\Omega\mathfrak{M}^{(u_0)}(A,M)X(M,B)\,dM$$

où $X(A,B)$ désigne la fonction

$$(104)\qquad X(A,B)=L^{(u_0^{(m)})}(A,B)-L^{(u_0)}(A,B)+K^{(u_0^{(m)})}(A,B)-K^{(u_0)}(A,B)+$$
$$+\iiint_\Omega[L^{(u_0^{(m)})}(A,M)-L^{(u_0)}(A,B)]\Phi^{(u_0^{(m)})}(M,B)\,dM ,$$

tandis que $\mathfrak{M}^{(u_0)}$ est le même noyau qui figure dans la solution (13′). Remarquons, en ayant en vue la limitation de la fonction $X(A,B)$, que

$$\Psi_A[w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)]-\Psi_A[w^B_{(u_0)}(A,B)]$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\{[a_{\alpha\beta}(A,u_0^{(m)}(A))-a_{\alpha\beta}(A,u_0(A))]+$$
$$+[a_{\alpha\beta}(B,u_0(B))-a_{\alpha\beta}(B,u_0^{(m)}(B))]\}\cdot\frac{\partial^2w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+$$
$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[a_{\alpha\beta}(A,u_0(A))-a_{\alpha\beta}(B,u_0(B))]\cdot\left[\frac{\partial^2w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial^2w^B_{(u_0)}(A,B)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right]+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}[b_\alpha(A,u_0^{(m)}(A))-b_\alpha(A,u_0(A))]\frac{\partial w_{(u_0^{(m)})}(A,B)}{\partial x_\alpha}+$$
$$+\left[\frac{\partial w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial w^B_{(u_0)}(A,B)}{\partial x_\alpha}\right]b_\alpha(A,u_0(A))+$$
$$+c(A)[w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)-w^B_{(u_0)}(A,B)] .$$

Par conséquent

$$(105)\qquad |\Psi_A[w^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)]-\Psi_A[w^B_{(u_0)}(A,B)]|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h .$$

Si l'on tient compte de cette limitation, on trouve que la différence $L^{(u_0^{(m)})}(A,B)-L^{(u_0)}(A,B)$ admet une limitation de la même forme (à un facteur constant positif près). D'après les hypothèses 3 et 4 (voir p. 9), la différence $K^{(u_0^{(m)})}(A,B)-K^{(u_0)}(A,B)$ satisfait à une inégalité de la forme

$$|K^{(u_0^{(m)})}(A,B)-K^{(u_0)}(A,B)|<\text{const}\,\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h .$$

En portant les résultats obtenus dans la formule (102), nous trouvons que la fonction $\Phi^{(u_0^{(m)})}(A,B)$ satisfait à la relation

$$(106)\qquad |\Phi^{(u_0^{(m)})}(A,B)-\Phi^{(u_0)}(A,B)|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-h}}\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h .$$

Ainsi, on aura la limitation

$$(107)\qquad |\overline{w}^B_{(u_0^{(m)})}(A,B)-\overline{w}_{(u_0)}(A,B)|<\frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2-h}}\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h .$$

Les limitations (97) et (107) permettent de conclure que

$$(108) \qquad |\Gamma^{(u_0^{(m)})}(A, B) - \Gamma^{(u_0)}(A, B)| < \frac{\text{const}}{r_{AB}^{n-2}} \sup |u_0^{(m)} - u_0|^h .$$

Dès lors il est évident, d'après la limitation (108), que l'intégrale $\Delta_1(A)$ converge uniformément vers zéro lorsque $u_0^{(m)} \to u_0$. En définitive on obtient

$$(109) \qquad \lim_{m\to\infty} W_m(A) = W(A) .$$

On prouve, par un raisonnement analogue, que les autres intégrales figurant dans les relations (45), (46), qui ont des singularités faibles, jouissent des mêmes propriétés limites que celle que nous venons d'étudier.

Il faudra encore démontrer que

$$(110) \qquad \lim_{m\to\infty} G[P, v_0^{(m)}(P), u^{(m)}_{0_{s_P^{(1)}}}(P), \ldots, u^{(m)}_{0_{s_P^{(q)}}}(P)] = G[P, v_0(P), u_{0_{s_P^{(1)}}}(P), \ldots, u_{0_{s_P^{(q)}}}(P)] .$$

Or, on a

$$(111) \qquad |G[P, v_0^{(m)}(P), u^{(m)}_{0_{s_P^{(1)}}}(P), \ldots, u^{(m)}_{0_{s_P^{(q)}}}(P)] - G[P, v_0(P), u_{0_{s_P^{(1)}}}(P), \ldots, u_{0_{s_P^{(q)}}}(P)] < k_G\Big\{|v_0^{(m)}(P) - v_0(P)| + \sum_{a=1}^{q} |u^{(m)}_{0_{s_P^{(a)}}}(P) - u_{0_{s_P^{(a)}}}(P)|\Big\} .$$

La différence $u^{(m)}_{0_{s_P^{(a)}}}(P) - u_{0_{s_P^{(a)}}}(P)$ s'exprime par la formule

$$(112) \qquad u^{(m)}_{0_{s_P^{(a)}}}(P) - u_{0_{s_P^{(a)}}}(P)$$
$$= \Big[\iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\varphi^{(m)}(Q)\,dQ - \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\Big] +$$
$$+ \Big\{\iiint_\Omega \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, B)[\lambda_n^{(u_0^{(m)})}(B)]^{-1} F[B, u_0^{(m)}(B), \ldots, u_n^{(m)}(B)]\,dB -$$
$$- \iiint_\Omega \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, B)[\lambda_n^{(u_0)}(B)]^{-1} F[B, u_0(B), u_1(B), \ldots, u_n(B)]\,dB\Big\}$$
$$= [V^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) - V_{s_P^{(a)}}(P)] + [W^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) - W_{s_P^{(a)}}(P)] .$$

On cherchera d'abord une limitation de la différence $V^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) - V_{s_P^{(a)}}(P)$. Les intégrales qui figurent dans cette expression sont des intégrales à singularités fortes. On les mettra sous la forme suivante:

$$(113) \qquad V^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) = \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi^{(m)}(Q) - \varphi^{(m)}(P)]\,dQ +$$
$$+ [\varphi^{(m)}(P) - \varphi(P)] \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\,dQ + \varphi(P) \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\,dQ ,$$

$$(114) \qquad V_{s_P^{(a)}}(P) = \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi(Q) - \varphi(P)]\,dQ + \varphi(P) \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\,dQ .$$

La différence $V^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) - V_{s_P^{(a)}}(P)$ peut s'écrire en abrégé de la manière suivante

$$(115) \qquad V^{(m)}_{s_P^{(a)}}(P) - V_{s_P^{(a)}}(P) = \Delta_1(P) + \Delta_2(P) + \Delta_3(P) ,$$

où

$$(116) \qquad \Delta_1(P) = [\varphi^{(m)}(P) - \varphi(P)] \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)\,dQ ,$$

$$(117) \qquad \Delta_2(P) = \iint_S \Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi^{(m)}(Q) - \varphi^{(m)}(P)]\,dQ - \iint_S \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi(Q) - \varphi(P)]\,dQ = I_2^{(m)}(P) - I_2(P) ,$$

$$(118) \qquad \Delta_3(P) = \varphi(P) \iint_S [\Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q) - \Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)]\,dQ .$$

Il résulte immédiatement de la formule (116) que

$$(119) \qquad \Delta_1(P) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad m \to \infty .$$

Afin d'étudier la différence $\Delta_2(P)$, décomposons les intégrales $I_2^{(m)}(P)$ et $I_2(P)$ en sommes de deux intégrales

$$(120) \qquad I_2^{(m)}(P) = I_2^{(m)\sigma}(P) + I_2^{(m)S-\sigma}(P) , \qquad I_2(P) = I_2^{\sigma}(P) + I_2^{S-\sigma}(P)$$

étendues, les unes à la portion σ de la surface S qui contient le point P, les autres au reste $S - \sigma$ de la surface. Les fonctions figurant sous le signe intégral admettent une limitation de faible singularité, à savoir

$$(121) \qquad \left.\begin{array}{r} |\Gamma^{(u_0)}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi(Q) - \varphi(P)]| \\ |\Gamma^{(u_0^{(m)})}_{s_P^{(a)}}(P, Q)[\varphi^{(m)}(Q) - \varphi^{(m)}(P)]| \end{array}\right\} < \frac{\text{const}}{r_{PQ}^{n-1-h_\varphi}} .$$

Par conséquent les intégrales $I_2^{(m)}(P)$ et $I_2(P)$ sont absolument convergentes et on peut associer à tout nombre positif ε une portion σ de la surface S, telle que les inégalités

$$(122) \qquad |I_2^{(m)\sigma}(P)| < \varepsilon/3 , \qquad |I_2^{\sigma}(P)| < \varepsilon/3$$

aient lieu. Les intégrales étendues au domaine $S-\sigma$ étant régulières, il existe, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, un indice m_ε tel que

$$(123) \qquad |I_2^{(m)S-\sigma}(P) - I_2^{S-\sigma}(P)| < \varepsilon/3 \quad \text{lorsque} \quad m > m_\varepsilon .$$

Si l'on tient compte des inégalités (122) et (123), on trouve

$$(124) \qquad \Delta_2(P) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad m \to \infty .$$

Pour examiner l'intégrale $\Delta_3(P)$ nous la mettrons sous la forme d'une somme

$$(125) \qquad \Delta_3(P) = \varphi(P) \iint_S [w_{s_P^{(a)}}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - w_{s_P^{(a)}}^{(u_0)}(P,Q)]\,dQ + \\ + \varphi(P) \iint_S [\overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - \overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0)}(P,Q)]\,dQ = I_3(P) + \bar{I}_3(P) .$$

Comme la différence $|\overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - \overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0)}(P,Q)|$ admet la limitation

$$(126) \qquad |\overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - \overline{w}_{s_P^{(a)}}^{(u_0)}(P,Q)| < \frac{\text{const}}{r_{PQ}^{n-1-h}} \sup |u_0^{(m)} - u_0|^h ,$$

on trouve en raisonnant comme pour la limitation de $\Delta_2(P)$, que

$$(127) \qquad \bar{I}_3(P) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad u_0^{(m)} \to u_0 .$$

Afin de limiter $I_3(P)$, considérons le système de coordonnées rectangulaires dont l'origine est le point P de la surface S et l'axe Px_n est la normale intérieure à la surface S. Les axes $Px_1, Px_2, \ldots, Px_{n-1}$ sont alors contenus dans le plan tangent. La dérivée dans la direction d'un axe tangent, p. ex. Px_1, s'exprimera par la formule

$$(128) \qquad I_3(P) = \varphi(P) \iint_S [w_{x_1}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - w_{x_1}^{(u_0)}(P,Q)]\,dQ .$$

Cette intégrale a encore une singularité forte, puisque la différence $|w_{x_1}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - w_{x_1}^{(u_0)}(P,Q)|$ admet la limitation

$$(129) \qquad |w_{x_1}^{(u_0^{(m)})}(P,Q) - w_{x_1}^{(u_0)}(P,Q)| < \frac{\text{const}}{r_{PQ}^{n-1}} \sup |u_0^{(m)} - u_0|^h .$$

Décomposons l'intégrale $I_3(P)$ en une somme de deux intégrales

$$(130) \qquad I_3(P) = I_3^{S_w}(P) + I_3^{S-S_w}(P) ,$$

dont la première est étendue à la portion S_w de la surface S qui se trouve au voisinage du point P, à l'intérieur du cylindre W d'axe Px_n et de rayon suffisamment petit $\delta' < \delta$ (indépendant de P), et telle que l'hypothèse formulée dans la condition de Liapounoff soit vérifiée par la surface S_w;

la seconde intégrale est étendue à la portion $S-S_w$. L'intégrale $I_3^{S-S_w}(P)$ étant régulière, on a d'après la limitation (129)

$$(131) \qquad I_3^{S-S_w}(P) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad u_0^{(m)} \to u_0 .$$

On établira maintenant que $I_3^{S_w}(P) \to 0$ lorsque $u_0^{(m)} \to u_0$. Étudions pour cela l'intégrale

$$(132) \qquad \tilde{I}_3^{S_w}(A) = \varphi(P) \iint_{S_w} [w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q) - w_{x_1}^{(u_0)Q}(A,Q)]\,dQ$$

et introduisons deux intégrales auxiliaires

$$(133) \qquad \begin{aligned} X_{(u_0^{(m)})}(A) &= \varphi(P) \iint_{S'_w} w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q')\,dQ' , \\ X_{(u_0)}(A) &= \varphi(P) \iint_{S'_w} w_{x_1}^{(u_0)P}(A,Q')\,dQ' \end{aligned}$$

étendues à la projection S'_w de la portion S_w sur le plan tangent à la surface S au point P; dQ' désigne l'élément d'aire de la surface S'_w au point Q' qui est la projection du point $Q \in S$ sur le plan tangent.

Il a été établi dans [10] (formules (316) et (317)) que les valeurs principales des intégrales (133) existent lorsque $A = P$ et qu'elles tendent vers 0 lorsque $A \to P$.

Examinons l'intégrale

$$(134) \qquad \begin{aligned} R(A) &= \tilde{I}_3^{S_w}(A) - [X_{(u_0^{(m)})}(A) - X_{(u_0)}(A)] \\ &= \varphi(P) \iint_{S_w} \{[w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q) - w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q')\,\gamma(Q)] - \\ &\quad - [w_{x_1}^{(u_0)Q}(A,Q) - w_{x_1}^{(u_0)P}(A,Q')\,\gamma(Q)]\}\,dQ , \end{aligned}$$

où $\gamma(Q)$ désigne la valeur absolue du cosinus de l'angle que fait avec l'axe Px_n la normale à la surface S au point Q. Or, on a

$$(135) \qquad \begin{aligned} w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q) &= (2-n)[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^{Q}(A,Q)]^{-n}\Big[a^{1n}\big(Q, u_0^{(m)}(Q)\big)(x_n - \xi_n) - \\ &\quad - \sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}\big(Q, u_0^{(m)}(Q)\big)\xi_\beta\Big] , \\ w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q') &= (2-n)[\vartheta_{(u_0^{(m)})}^{P}(A,Q')]^{-n}\Big[a^{1n}\big(P, u_0^{(m)}(P)\big)x_n - \\ &\quad - \sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}\big(P, u_0^{(m)}(P)\big)\xi_\beta\Big] . \end{aligned}$$

La différence $w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q')$ pourra s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
(136)\quad & w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q') \\
&= (2-n)\{[\vartheta^{Q}_{(u_0^{(m)})}(A,Q)]^{-n}-[\vartheta^{P}_{(u_0^{(m)})}(A,Q')]^{-n}\}\Big[a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)(x-\xi_n)+ \\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\xi_\beta\Big]+(2-n)[\vartheta^{P}_{(u_0^{(m)})}(A,Q')]^{-n}\cdot\Big\{a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)x_n- \\
&\quad -a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\xi_n-a^{1n}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)x_n+ \\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{n-1}\big[a^{1\beta}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)-a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\big]\xi_\beta\Big\}.
\end{aligned}
$$

La différence $w_{x_1}^{(u_0)Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0)P}(A,Q')$ s'exprimera par une formule analogue. Ainsi la fonction, qui figure sous le signe intégral dans la formule (134), pourra s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
(137)\quad & [w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q')]-[w_{x_1}^{(u_0)Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0)P}(A,Q')] \\
&= (2-n)\Big\{\Big[\big(\vartheta^{Q}_{(u_0^{(m)})}(A,Q)\big)^{-n}-\big(\vartheta^{P}_{(u_0^{(m)})}(A,Q')\big)^{-n}\Big]- \\
&\qquad\qquad -\Big[\big(\vartheta^{Q}_{(u_0)}(A,Q)\big)^{-n}-\big(\vartheta^{P}_{(u_0)}(A,Q')\big)^{-n}\Big]\Big\}\times \\
&\quad \times\Big[a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)(x-\xi_n)+\sum_{\beta=1}^{n-1} a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\xi_\beta\Big]+ \\
&\quad +(2-n)\Big[\big(\vartheta^{Q}_{(u_0)}(A,Q)\big)^{-n}-\big(\vartheta^{P}_{(u_0)}(A,Q')\big)^{-n}\Big]\Big\{\Big[a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)- \\
&\qquad\qquad -a^{1n}\big(Q,u_0(Q)\big)\Big](x-\xi_n)+ \\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{n-1}\big[a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)-a^{1\beta}\big(Q,u_0(Q)\big)\big]\xi_\beta\Big\}+ \\
&\quad +(2-n)\Big[\big(\vartheta^{P}_{(u_0^{(m)})}(A,Q)\big)^{-n}-\big(\vartheta^{P}_{(u_0)}(A,Q')\big)^{-n}\Big]\Big\{a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)x_n- \\
&\quad -a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\xi_n-a^{1n}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)x_n+ \\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{n-1}\big[a^{1\beta}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)-a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\big]\xi_\beta\Big\}+ \\
&\quad +(2-n)[\vartheta^{P}_{(u_0)}(A,Q')]^{-n}\Big\{\Big[a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)-a^{1n}\big(Q,u_0(Q)\big)\Big]x_n- \\
&\quad -\big[-a^{1n}\big(Q,u_0(Q)\big)+a^{1n}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\big]\xi_n- \\
&\qquad\qquad -\Big[a^{1n}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)-a^{1n}\big(P,u_0(P)\big)\Big]x_n+ \\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{n-1}\Big(\big[a^{1\beta}\big(P,u_0^{(m)}(P)\big)-a^{1\beta}\big(Q,u_0^{(m)}(Q)\big)\big]- \\
&\quad -\big[a^{1\beta}\big(P,u_0(P)\big)-a^{1\beta}\big(Q,u_0(Q)\big)\big]\Big)\xi_\beta\Big\},
\end{aligned}
$$

où $\vartheta^{M}_{(u_0)}(A,B)$ s'exprime par la formule

$$\vartheta^{M}_{(u_0)}(A,B)=\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}\big(M,u_0(M)\big)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)\Big]^{1/2}.$$

La différence (137) admet la limitation suivante:

$$
\begin{aligned}
(138)\quad & \big|[w_{x_1}^{(u_0^{(m)})Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0^{(m)})P}(A,Q')]-[w_{x_1}^{(u_0)Q}(A,Q)-w_{x_1}^{(u_0)P}(A,Q')]\big| \\
&< \{\tfrac12 n(n-2)(g_1\chi r_{AQ})^{-n-2}[k_a r_{PQ}^{h} n^2 r_{AQ}^2+nM_a r_{QQ'}(r_{AQ}+r_{AQ'})]\times \\
&\quad \times\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h\cdot M_a[r_{AQ'}+(n-1)r_{PQ'}]+ \\
&\quad +\tfrac12 n(n-2)(g_1\chi r_{AQ})^{-n-2}[k_a r_{PQ}^{h} n^2\cdot r_{AQ}^2+nM_a r_{QQ'}(r_{AQ}+r_{AQ'})]\times \\
&\quad \times[r_{AQ'}+(n-1)r_{PQ'}]\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h+ \\
&\quad +\tfrac12 n(n-2)g_2^{n-1}g_1^{-3n/2}k_a r_{AQ'}^{-n}\cdot\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h\times \\
&\quad \times[k_a r_{PQ}^{h} r_{AQ'}+M_a|\xi_n|+(n-1)k_a r_{PQ}^{h+1}]+ \\
&\quad +|2-n|g_1^{-n}r_{AQ'}^{-n}[k_a r_{PQ}^{h} r_{AQ'}+k_a|\xi_n|+(n-1)r_{PQ}^{h+1}]k_a\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h\} \\
&< \frac{\mathrm{const}\; r_{PQ'}^{h^*}}{r_{AQ'}^{n-1}}\sup|u_0^{(m)}-u_0|^h,
\end{aligned}
$$

où $h^*=\min(h,2\varkappa)$, $M_a=\sup|a_{\alpha\beta}|$, k_a est le coefficient de Hölder de la fonction $a_{\alpha\beta}$, g_1 et g_2 sont les nombres qui figurent dans les inégalités (98), tandis que χ est un nombre satisfaisant aux relations

$$0<\chi\leqslant\frac{r_{AQ}}{r_{AQ'}}\leqslant\frac{1}{\chi}.$$

Il résulte de la limitation (138) que

$$\lim_{\substack{A\to P\\ u_0^{(m)}\to u_0}} R(A)=0.$$

Mais comme

$$\lim_{A\to P} R(A)=\lim_{A\to P}\tilde{I}_3^{S_w}(A)=I_3^{S_w}(P),$$

on a

$$(139)\qquad I_3^{S_w}(P)\to 0 \quad \text{lorsque} \quad u_0^{(m)}\to u_0.$$

Des relations (127), (131) et (139), on tire

$$(140)\qquad \Lambda_3(P)\to 0 \quad \text{lorsque} \quad m\to\infty.$$

On déduit des relations (119), (124) et (140) que

$$(141)\qquad \lim V^{(m)}_{s_P^{(\alpha)}}(P)=V_{s_P^{(\alpha)}}(P).$$

On établit la relation

$$\lim W^{(m)}_{s_P^{(\alpha)}}(P)=W_{s_P^{(\alpha)}}(P)$$

de même que la formule (109). Ainsi la démonstration de la continuité de la transformation (48), (49) est achevée.

LEMME 3. *L'ensemble Z' des points transformés est compact.*

Démonstration. On déduit des théorèmes cités au début du travail que toutes les intégrales figurant dans les formules (48), (49) satisfont à la condition de Hölder (avec le même coefficient et le même exposant) par rapport aux variables spatiales. Par suite les fonctions $v_\nu(A)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ et $\psi(P)$, qui forment l'ensemble transformé Z', sont des fonctions équicontinues. Elles sont aussi bornées dans leur ensemble. Le théorème d'Arzelà permet donc de conclure que l'ensemble Z' de l'espace Λ est un ensemble compact.

Il résulte des lemmes 1, 2, 3 et du théorème de Schauder qu'il existe au moins un point $U^*(u_1^*, \ldots, u_n^*, \varphi^*)$ de l'ensemble Z invariant par rapport à la transformation (48), (49). C'est ce système de fonctions $u_0^*, u_1^*, \ldots, u_n^*, \varphi^*$ qui est la solution du système d'équations (44), (45).

Mais les propriétés dont jouissent le potentiel de simple couche et le potentiel de charge spatiale permettent de conclure que

$$u_\nu^*(A) = \frac{\partial u_0^*(A)}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ A \in \Omega + S)$$

ce qui prouve que les fonctions $u_0^*(A)$, $\varphi^*(P)$ sont des solutions du système d'équations intégrodifférentielles (41), (42). Nous allons démontrer que la fonction $u_0^*(A)$ est la solution du problème posé. En effet, d'après les propriétés des potentiels en question, les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}[u_0^*(B)]$$

satisfont à la condition de Hölder par rapport à la variable B, et, forcément, la fonction

$$F\left[B,\ u_0^*(B),\ \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi_n}\right]$$

satisfait à la même condition par rapport à la même variable B. Il en résulte, en vertu du théorème 3, que la fonction $u_0^*(A)$ vérifie l'équation (1) en tout point $A \in \Omega$. On en déduit, d'après l'équation (42), que la fonction $u_0^*(A)$ est une solution du problème posé. On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Si les coefficients de l'équation différentielle* (1), *les fonctions F, G, g et la surface S, limitant le domaine Ω, satisfont aux conditions* I, II, III, IV, V, (39), (40), *si en outre les q champs de direction tangentielle $\{s_P^{(\alpha)}\}$ sur la surface S vérifient la relation* (36) *et, enfin, si les constantes du problème satisfont aux conditions* (90), *il existe au moins une fonction $u(A)$ vérifiant l'équation* (1) *en tout point intérieur du domaine Ω et la condition limite* (37) *en tout point de la surface S.*

Travaux cités

[1] H. Poincaré, *Mécanique céleste*, vol. III, Paris 1910.

[2] B. Hvédélidzé, *Über die Poincarésche Randwertaufgabe des logarithmischen Potentials*, C. R. (Doklady) Acad. Sc. URSS (N. S.) 30 (1941), p. 195-198.

[3] I. N. Vécoua, *Problèmes aux limites dans la théorie des équations elliptiques* (en russe), C. R. Acad. Sc. URSS, 1940.

[4] W. Pogorzelski, *Problème aux limites de Poincaré généralisé*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 257-270.

[5] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Annales. Sc. de l'École Normale Supérieure, troisième série, 75 (1958), p. 19-35.

[6] — *Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 247-284.

[7] — *Problème aux limites pour l'équation elliptique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue*, Warszawa, W. A. T. 1957.

[8] — *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation elliptique*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), p. 321-339.

[9] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation elliptique*, Bulletin de l. Acad. Pol. Sc., Série des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 205-212.

[10] — *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Warszawa 1958.

[11] J. Wolska-Bochenek, *Un problème aux limites à dérivée tangentielle pour l'équation du type elliptique*, Ann. Polon. Math. 4 (1958). p. 275-287.

[12] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1959