par conséquent d_2 converge aussi vers zéro si $T_1 \to c_\nu$. Par conséquent

$$\lim D' = D \quad \text{si} \quad T_1 \to c_\nu \quad \text{et} \quad T_2 \to c_{\nu'} . \tag{41}$$

En rapprochant les résultats (20), (32) et (45), nous concluons que

$$I = -\pi^2 f(t, t, t)\varphi(t) + D . \tag{42}$$

On étudiera d'une façon analogue les intégrales itérées étendues aux couples d'arcs, où l'une des variables d'intégration τ, s au plus appartient au même arc que le point fixé t. Dans ces cas on constate qu'on peut changer l'ordre d'intégration dans les intégrales itérées.

En définitive on obtient l'égalité (10), c'est-à-dire la transformation de Poincaré-Bertrand généralisée.

Travaux cités

[1] H. Poincaré, *Théorie des marées*, Paris 1910.

[2] G. Bertrand, *La théorie des marées et les équations intégrales*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 40 (1923), p. 151-258.

[3] G. Giraud, *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 51 (1934), p. 251-372.

[4] N. I. Mouskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen-Holland 1953, p. 49.

[5] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 6 (1959), p. 311-317.

[6] — *Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés*, Journ. of Math. and Mech. (Indiana University) 7 (1958), p. 515-532.

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Problème de Cauchy pour un système parabolique

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Soit un système de $N \geqslant 1$ équations aux dérivées partielles

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{1 \leqslant k_1+\ldots+k_n \leqslant M} B_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} C_{\alpha j}(X, t) u_j - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ d'ordre $M \geqslant 2$ à N fonctions inconnues $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$. Le système (1) est parabolique, d'après la définition donnée par Petrovsky (voir [1], [2]) donc le degré M des équations (1) est pair. Les coefficients $A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}$, $B_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}$, $C_{\alpha j}$ sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace euclidien E des variables réelles $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et dans l'intervalle fini $0 \leqslant t \leqslant T$. Ces coefficients vérifient les conditions de Hölder suivantes:

$$|A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X_1, t_1)| < \text{const}[|XX_1|^h + |t-t_1|^{h'}], \tag{2}$$

$$|B_{\alpha j}^{k_1\ldots j_n}(X, t) - B_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X_1, t)| < \text{const}|XX_1|^h, \tag{3}$$

$$|C_{\alpha j}(X, t) - C_{\alpha j}(X_1, t)| < \text{const}|XX_1|^h \tag{4}$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, où h et h' sont des constantes positives, non supérieures à l'unité; $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne de deux points arbitraires X et X_1 de l'espace E, t et t_1 sont deux valeurs arbitraires de l'intervalle $(0, T)$.

Dans le travail [2] W. Pogorzelski a construit, sous les hypothèses (2), (3), (4), une matrice, dite matrice des solutions fondamentales, dont les éléments sont donnés par les formules:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta) \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau) \, d\Pi \, d\zeta , \tag{5}$$

où $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux points arbitraires différents de l'espace E et $\tau < t$ — deux valeurs arbitraires dans l'intervalle $(0, T)$. Les fonctions $W_{\alpha\beta}$ sont les éléments d'une matrice, dite matrice des quasi-solutions, données par les intégrales

$$(6)\qquad W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int_E\int v_\alpha^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S)\exp\Big[i\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(x_\nu - y_\nu)\Big]dS$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N)$, étendues à tout l'espace euclidien E des variables réelles $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Z désigne un point arbitraire de l'espace E, ζ une valeur arbitraire dans l'intervalle $(0, T)$.

Les fonctions $v_1^\beta, v_2^\beta, \ldots, v_N^\beta$ $(\beta = 1, 2, \ldots, N)$ constituent, pour β fixé, une solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$(7)\qquad \frac{dv_\alpha^\beta}{dt} = \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(Z, \zeta)(is_1)^{k_1}\ldots(is_n)^{k_n} v_j^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S)$$

(où Z, ζ, s_ν jouent le rôle de paramètres fixés), avec la condition initiale $v_\alpha \to \delta_\alpha^\beta$ si $t \to \tau$.

Les fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$ des formules (5) sont, pour β fixé, une solution du système d'équations intégrales de Volterra

$$(8)\qquad \Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] + \int_\tau^t\int\int_E\int \sum_{\gamma=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[W_{j\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)]\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\,d\Pi\,d\zeta$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N)$, où $\Psi_{X,t}^{(\alpha)}(u_j)$ désigne une opération différentielle, effectuée sur le système de fonctions $u_j(u_1, \ldots, u_N)$ par rapport aux variables (X, t) et définie par les formules (1).

Dans le travail [3] W. Pogorzelski a établi quelques théorèmes généraux sur les intégrales analogues aux intégrales de Poisson-Weierstrass et au potentiel de charge spatiale. Nous rappellerons ici ces théorèmes de W. Pogorzelski, dont nous aurons besoin dans la seconde partie de notre travail.

THÉORÈME 1. *Si les fonctions $f_\alpha(X)$, définies et continues dans tout l'espace E, vérifient les inégalités*

$$(9)\qquad |f_\alpha(X)| \leqslant a\exp[b|XX_0|],$$

où a, b sont des constantes positives données, X_0 — un point fixé de l'espace E, alors les intégrales singulières

$$(10)\qquad J_\alpha(X, t) = \int\int_E\int \sum_{\beta=1}^{N}\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0)f_\beta(Y)\,dY$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ sont absolument convergentes pour $X \in E$, $0 < t \leqslant T$, elles ont la propriété limite

$$(11)\qquad \lim_{t\to 0} J_\alpha(X, t) = f_\alpha(X)$$

et admettent des dérivées spatiales d'ordre $m \leqslant M-1$, déterminées par les intégrales absolument convergentes

$$(12)\qquad D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t)] = \int\int_E\int \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0)]f_\beta(Y)\,dY$$

en tout point X de l'espace E, pour $0 < t < T$.

En outre W. Pogorzelski a démontré [loc. cit.] que

$$(13)\qquad \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X, t), \ldots, J_N(X, t)] = 0$$

en tout point X de l'espace E pour $0 < t < T$.

THÉORÈME 2. *Si les fonctions $f_\alpha(X)$ satisfont aux hypothèses du théorème 1, les dérivées spatiales d'ordre $m \leqslant M-1$ des intégrales (10) vérifient une condition de Lipschitz-Hölder de la forme $(0 < t < t_1 \leqslant T)$*

$$(13')\qquad |D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t)] - D_X^{(m)}[J_\alpha(X_1, t_1)]| < \frac{\text{const}\cdot\exp[b|XX_0|]}{t^{\mu_m}}\,[|XX_1|^{\theta_m'} + |t-t_1|^{\theta_m(1-m/M)}],$$

où les constantes μ_m et θ_m sont comprises à l'intérieur des intervalles

$$(13'')\qquad \begin{aligned} &\frac{m}{n} < \mu_m < 1, \quad 0 < \theta_m < 1, \quad \text{si} \quad m+n \geqslant M,\\ &\frac{m}{n} < \mu_m < \frac{m+n}{M}, \quad 0 < \theta_m < \frac{n}{M-m}, \quad \text{si} \quad m+n < M;\end{aligned}$$

l'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement et l'autre est alors déterminée par l'une des formules

$$(13''')\qquad \theta_m = \frac{\mu_m - m\cdot M^{-1}}{1 - m\cdot M^{-1}}, \qquad \mu_m = \frac{m}{M} + \theta_m\Big(1 - \frac{m}{M}\Big),$$

enfin on a $\theta_m' = 1$ si $m = 0, 1, \ldots, M-2$ et $\theta_m' = \theta_m$ si $m = M-1$.

THÉORÈME 3. *Si les fonctions $\varrho_\alpha(X, t)$, définies dans la région $[X \in E; 0 < t \leqslant T]$ et intégrables dans tout domaine borné et mesurable dans l'espace E, vérifient les inégalités*

$$(14)\qquad |\varrho_\alpha(X, t)| < at^{-\mu_1}\exp[b|XX_0|]$$

et une condition de Hölder

$$(15)\qquad |\varrho_\alpha(X, t) - \varrho_\alpha(X_1, t)| < \text{const}\cdot t^{-\mu_1}|XX_1|^{h_\varrho}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset E$, où a, b, μ_1, h_ϱ sont des constantes positives données ($0<\mu_1<1$, $0<h_\varrho<1$), *alors le système d'intégrales*

$$(16)\qquad V_\alpha(X,t)=\int_0^t\iiint_E\sum_{\beta=1}^{N}\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\,\varrho_\beta(Y,\tau)\,dY\,d\tau,$$

dit potentiel de charge spatiale de densité $\{\varrho_\beta\}$, *vérifie le système suivant d'équations généralisées de Poisson*

$$(17)\qquad \hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}[V_1(X,t),\ldots,V_N(X,t)]=-\varrho_\alpha(X,t)$$

($\alpha=1,2,\ldots,N$), *en tout point intérieur* $X\in\Omega$ *pour* $0<t<T$.

THÉORÈME 4. *Si les fonctions* $\varrho_\alpha(X,t)$, *définies dans la région* $[X\in E,\ 0<t\leqslant T]$, *sont bornées dans tout domaine borné et mesurable et vérifient les inégalités* (14), *le potentiel de charge spatiale, déterminé par les formules* (16), *et ses dérivées d'ordre* $m\leqslant M-1$ *vérifient une condition de Hölder de la forme*

$$(17')\qquad |D_X^{(m)}[V_\alpha(X,t)]-D_X^{(m)}[V_\alpha(X_1,t_1)]| < \mathrm{const}\cdot t^{-\mu_m}\exp[b|XX_0|][|XX_1|^{\theta'_m}+|t-t_1|^{(1-m/M)\theta_m}]$$

($0<t<t_1\leqslant T$), *où* $\theta'_m=1$, *si* $m=0,1,\ldots,M-2$, $\theta'_{M-1}=\theta_{M-1}$, θ_m *et* μ_m *sont des constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité, comprises dans les intervalles* (13″) *et liées par les relations* (13‴).

2. Énoncé du problème de Cauchy. Soit un système quasi-linéaire de $N\geqslant 1$ équations aux dérivées partielles d'ordre $M\geqslant 2$ de la forme:

$$(18)\qquad \hat{\Psi}^{(\alpha)}(u)=F_\alpha[X,t,(u),(D^1u),(D^2u),\ldots,(D^{M-1}u)]$$

($\alpha=1,2,\ldots,N$), où l'on a désigné par (u) le système de fonctions $u_1(X,t),\ldots,u_N(X,t)$ et par $(D^\beta u)$ la matrice de toutes les dérivées spatiales d'ordre fixé β

$$(19)\qquad \frac{\partial^\beta u_j}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}=D^\beta_{(\gamma)}u_j\qquad(\beta=1,2,\ldots,M-1)$$

que l'on obtient en substituant pour les entiers non négatifs $k_1,k_2,\ldots,k_n$ toutes les valeurs telles que $k_1+k_2+\ldots+k_n=\beta$ et pour j les valeurs $1,2,\ldots,N$. On a désigné par γ le numéro consécutif de la suite $1,2,\ldots,n_\beta$ suivant laquelle on a ordonné toutes les combinaisons $k_1,k_2,\ldots,k_n$ des nombres entiers non négatifs dont la somme est égale à β ($n_0=N$).

Nous posons le problème suivant: déterminer une suite de fonctions

$$u=[u_1(X,t),\ldots,u_N(X,t)]$$

vérifiant le système (18) en tout point $X\in E$ pour $0<t<T$ et satisfaisant à la condition initiale

$$(20)\qquad \lim_{t\to 0}u_\alpha(X,t)=f_\alpha(X)\qquad(\alpha=1,2,\ldots,N),$$

où $f_\alpha(X)$ sont des fonctions données, définies dans tout l'espace E. Dans le travail [3] W. Pogorzelski a posé et résolu ce problème en appliquant la méthode topologique de J. Schauder.

Dans ce travail nous nous proposons de résoudre ce problème de Cauchy en appliquant la méthode des approximations successives, sous les hypothèses suivantes:

I. Désignons par (v^β) la matrice des éléments réels $v^\beta_{j\gamma}$ à deux indices $j=1,2,\ldots,N$, $\gamma=1,2,\ldots,n_\beta$, β étant un nombre fixé dans la suite $0,1,2,\ldots,M-1$. Désignons ensuite par R_β l'ensemble de toutes les matrices (v^β) à éléments réels $v^\beta_{j\gamma}$, où β est fixé. R_0 désigne l'ensemble de toutes les suites (v^0) de nombres réels $v_1,v_2,\ldots,v_N$.

Nous supposons que les fonctions réelles

$$(21)\qquad F_\alpha[X,t,(v^0),(v^1),\ldots,(v^{M-1})]$$

sont définies et continues dans la région

$$(22)\qquad \begin{gathered} X\in E,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ (v^\beta)\in R_\beta\quad(\beta=0,1,\ldots,M-1)\end{gathered}$$

et qu'elles vérifient l'inégalité

$$(23)\qquad |F_\alpha[X,t,(v^0),\ldots,(v^{M-1})]|<m_F\sum_{\substack{j=1,\ldots,N\\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}}^{\beta=0,1,\ldots,M-1}|v^\beta_{j\gamma}|+m'_F\exp(b|XX_0|)$$

et une condition de Lipschitz-Hölder:

$$(24)\qquad |F_\alpha[X,t,(v^0),\ldots,(v^{M-1})]-F_\alpha[X',t,(v^0)',\ldots,(v^{M-1})']| < k_F\Big[\sum_{\substack{j=1,\ldots,N\\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}}^{\beta=0,1,\ldots,M-1}|v^\beta_{j\gamma}-v'^\beta_{j\gamma}|+\exp(b|XX_0|)|XX'|^{h_F}\Big]\quad(|XX_0|>|X'X_0|);$$

$(v^\beta)'$ désigne la matrice des éléments $v'^\beta_{j\gamma}$; m_F,m'_F,k_F,h_F sont des constantes positives données. On admet l'identité des symboles:

$$v^0_{j1}=v^0_j\qquad(n_0=1).$$

II. Les fonctions données $f_\alpha(X)$ sont continues, définies dans tout l'espace E et vérifient l'inégalité:

$$(25)\qquad |f_\alpha(X)|<a\exp(b|XX_0|),$$

a et b étant deux constantes positives, X_0 — un point fixé.

3. Résolution du problème. Nous allons chercher la solution du problème proposé sous forme d'un système de sommes ($a = 1, 2, \ldots, N$)

$$(26)\quad u_a(X,t) = \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{aj}(X,t;Y,0) f_j(Y)\,dY - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{aj}(X,t;Y,\tau) F_j[Y,\tau,(u),(D_Y^1 u),\ldots,(D_Y^{M-1}u)]\,dY\,d\tau$$

d'intégrales de Poisson-Weierstrass généralisées et de composantes d'un potentiel de charge spatiale, relativement au système (1). Pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles (26), considérons le système suivant d'équations intégrales:

$$(27)\quad v_{a\gamma}^{\beta}(X,t) = \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,0)] f_j(Y)\,dY - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,\tau)] F_j[Y,\tau,(v^0),(v^1),\ldots,(v^{M-1})]\,dY\,d\tau$$

($a = 1, \ldots, N$; $\beta = 0, 1, \ldots, M-1$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$), où $\underset{(\gamma)}{D^0}[\Gamma_{aj}] = \Gamma_{aj}$. Les intégrales qui figurent dans ces équations ne sont pas bornées si $t \to 0$ et $|XX_0| \to \infty$.

Formons une suite infinie de systèmes de fonctions réelles continues

$$(28)\quad \overset{(0)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t),\ \overset{(1)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t),\ \ldots,\ \overset{(p)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t),\ \ldots$$

($a = 1, 2, \ldots, N$; $\beta = 0, 1, \ldots, M-1$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$) définies dans la région $[X \in E,\ 0 < t \leqslant T]$ par les relations de récurrence

$$(29)\quad \overset{(p+1)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t) = \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,0)] f_j(Y)\,dY - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,\tau)] F_j[Y,\tau,(\overset{(p)}{v^0}),\ldots,(\overset{(p)}{v^{M-1}})]\,dY\,d\tau,$$

où les fonctions continues arbitraires $\overset{(0)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t)$ satisfont aux inégalités

$$(30)\quad |\overset{(0)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t)| < \frac{\text{const}\cdot\exp[b|XX_0|]}{t^{\mu}}.$$

Nous allons d'abord montrer qu'il est possible de former les suites (29). Supposons, en effet, que les fonctions $\overset{(p)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t)$ vérifient la condition

$$(31)\quad \sup_{\substack{X\in E\\ t\in(0,T)}} |t^{\mu}\exp(-b|XX_0|)\,v_{a\gamma}^{\beta}(X,t)| \leqslant \varrho$$

(ϱ étant une constante positive arbitraire), et cherchons une condition pour que les fonctions $\overset{(p+1)}{v}{}_{a\gamma}^{\beta}(X,t)$ satisfassent à l'inégalité (31).

La première des intégrales (29) a un sens, d'après le théorème cité 1, et elle admet la limitation suivante:

$$(32)\quad \Big|\iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,0)] f_j(Y)\,dY\Big| < P\cdot t^{-\mu}\cdot\exp(b|XX_0|),$$

où P est une constante positive. Pour évaluer la seconde des intégrales (29)

$$I(X,t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D_X^{\beta}}[\Gamma_{aj}(X,t;Y,\tau)] F_j[Y,\tau,(\overset{(p)}{v^0}),\ldots,(\overset{(p)}{v^{M-1}})]\,dY\,d\tau,$$

remarquons d'abord que, d'après l'hypothèse (23) et l'inégalité (31), les fonctions F_j satisfont aux inégalités:

$$(33)\quad |F_j[Y,\tau,(\overset{(p)}{v^0}),\ldots,(\overset{(p)}{v^{M-1}})]| < m_F Q N \varrho \tau^{-\mu}\cdot\exp(b|YX_0|) + m_F'\exp(b|YX_0|)$$

($j = 1, 2, \ldots, N$), où l'on a posé

$$(34)\quad Q = \sum_{\beta=0}^{M-1} n_\beta.$$

Il en résulte que l'intégrale $I(X,t)$ a un sens et qu'elle est absolument convergente. Pour en trouver une limitation, nous nous appuyerons sur les inégalités relatives à la matrice des solutions fondamentales et leurs dérivées spatiales d'ordre $m \leqslant M-1$, démontrées par W. Pogorzelski dans le travail [3], c'est-à-dire les inégalités: si $|XY| < \varrho_0$, on a

$$(35)\quad |D_X^{(m)}[\Gamma_{a\beta}(X,t;Y,\tau)]| < \frac{C}{(t-\tau)^{\mu'}}\cdot\frac{1}{|XY|^{m+n-M\mu'}}$$

(où $X \neq Y$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, et μ' est une constante arbitrairement fixée à l'intérieur de l'intervalle $(0, (m+n)/M)$ si $m+n < M$, et à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$ si $m+n \geqslant M$); et, si $|XY| > \varrho_0$, on a

$$(36)\quad |D_X^{(m)}[\Gamma_{a\beta}(X,t;Y,\tau)]| < C'|t-\tau|^{\mu_1}\exp[-k|XY|],$$

où C, C', k, μ_1, ϱ_0 sont des constantes positives; en outre, on suppose que les constantes positives k, ϱ_0, μ peuvent être arbitrairement fixées et que l'on a posé

$$D_X^{(0)}[\Gamma_{a\beta}] = \Gamma_{a\beta}.$$

Alors, d'après (35), (36) et (33), nous aurons (K_{ϱ_0} désignant la sphère de rayon ϱ_0):

$$(37)\quad |I(X,t)|$$
$$< NC\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(t-\tau)^{\mu'}}\iiint_{K_{\varrho_0}} \frac{m_F NQ\varrho\exp(b|YX_0|)+m_F' T^{\mu}\exp(b|YX_0|)}{|XY|^{\beta+n-M\mu'}}\,dY+$$
$$+NC'\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\mu_1}}{\tau^{\mu}}\,d\tau\iiint_{E-K_{\varrho_0}}[m_F NQ\varrho\exp(b|YX_0|)+$$
$$+m_F' T^{\mu}\exp(b|YX_0|)]\exp(-k|XY|)\,dY\,.$$

Nous concluons enfin, d'après les inégalités (32), (37) et les inégalités admises (31), que les fonctions (29) vérifient une inégalité de la forme:

$$(38)\qquad |\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)| < t^{-\mu}\exp[b|XX_0|]\cdot[P_1 m_F\varrho+P_2 m_F'+P_3]\,;$$

P_1 et P_2 étant des constantes positives déterminées, indépendantes des fonctions F_j. Il en résulte que les fonctions $\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)$ satisfont à une inégalité analogue à celle que vérifient les fonctions arbitrairement choisies $\overset{(0)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)$.

Il en résulte de même que les fonctions $\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)$ satisferont à l'inégalité (31), si les constantes du problème vérifient la condition

$$(39)\qquad P_1 m_F\varrho+P_2 m_F'+P_3\leqslant\varrho\,.$$

En supposant que la valeur de la constante m_F est suffisamment petite, notamment

$$(40)\qquad P_1 m_F<1\,,$$

nous pouvons toujours choisir la constante arbitraire ϱ assez grande pour que l'inégalité (39) soit vérifiée, quelles que soient les constantes du problème P_1, P_2, P_3, m_F, m_F'.

Les suites des fonctions successives (28) sont donc définies. Nous allons maintenant montrer que les suites (28) sont convergentes et que les fonctions limites donnent la solution du problème de Cauchy proposé. Nous avons, en effet, d'après (29)

$$(41)\quad \overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)-\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)$$
$$=-\int_0^t\iiint_E\sum_{j=1}^{N}\underset{(\gamma)}{D^{\beta}_X}[\Gamma_{\alpha j}(X,t;Y,\tau)]\{F_j[Y,\tau,\overset{(p)}{(v^0)},\ldots,\overset{(p)}{(v^{M-1})}]-$$
$$-F_j[Y,\tau,\overset{(p-1)}{(v^0)},\ldots,\overset{(p-1)}{(v^{M-1})}]\}\,dY\,d\tau\,.$$

D'après l'hypothèse (24) et les inégalités (35) et (36), nous aurons

$$(42)\quad |\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)-\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)|<C\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\mu'}}\iiint_{K_{\varrho_0}}\frac{k_F\sum\limits_{j,\gamma}^{\beta}|\overset{(p)}{v^{\beta}_{j\gamma}}-\overset{(p-1)}{v^{\beta}_{j\gamma}}|}{|XY|^{\beta+n-M\mu'}}\,dY\,d\tau+$$
$$+C'\int_0^t(t-\tau)^{\mu_1}\iiint_{E-K_{\varrho_0}}k_F\exp(-k|XY|)\sum_{j,\gamma}^{\beta}|\overset{(p)}{v^{\beta}_{j\gamma}}-\overset{(p-1)}{v^{\beta}_{j\gamma}}|\,dY\,d\tau$$
$$(j=1,2,\ldots,N;\ \gamma=1,2,\ldots,N;\ \beta=0,1,\ldots,M-1).$$

En posant

$$(43)\qquad \delta_p=\max_{\alpha,\beta,\gamma}\sup_{\substack{Y\in E\\ \tau\in(0,T)}}[\tau^{\mu}e^{-b|YX_0|}|\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(Y,\tau)-\overset{(p-1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(Y,\tau)|]$$

nous obtenons l'inégalité:

$$(44)\quad |\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)-\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)|$$
$$<N^2CQ\exp(b|XX_0|)k_F\delta_p\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{\mu}(t-\tau)^{\mu'}}\iiint_{K_{\varrho_0}}\frac{dY}{|XY|^{\beta+n-M\mu'}}+$$
$$+N^2C'Q\exp(b|XX_0|)k_F\delta_p\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\mu_1}}{\tau^{\mu}}\,d\tau\iiint_{E-K_{\varrho_0}}\exp(-k|XY|)\,dY\,.$$

Les intégrales dans l'inégalité (44) étant bornées, nous obtenons enfin:

$$(45)\quad |\overset{(p+1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)-\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)|<QN^2t^{-\mu}\exp(b|XX_0|)k_F\delta_p(\widetilde{P}_1C+\widetilde{P}_2C')\,,$$

où $\widetilde{P}_1$ et $\widetilde{P}_2$ sont des constantes positives, indépendantes des fonctions F_j. Il en résulte l'inégalité suivante:

$$(46)\qquad \delta_{p+1}<QN^2k_F(\widetilde{P}_1C+\widetilde{P}_2C')\delta_p\,.$$

Par conséquent la série $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\delta_p$ sera convergente si les constantes du problème satisfont à l'inégalité:

$$(47)\qquad QN^2k_F(\widetilde{P}_1C+\widetilde{P}_2C')<1\,,$$

donc si le coefficient de Hölder k_F est suffisamment petit. Nous en déduisons, d'après l'inégalité (43), que les séries

$$(48)\qquad t^{\mu}\exp(-b|XX_0|)\sum_{p=1}^{\infty}|\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}-\overset{(p-1)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}|$$
$$(\alpha=1,2,\ldots,N;\ \beta=0,1,\ldots,M-1;\ \gamma=1,2,\ldots,n_\beta)$$

seront convergentes sous la condition (47). Il en résulte que les suites des approximations successives

$$t^{\mu}\exp(-b|XX_0|)\{\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)\} \tag{49}$$

sont uniformément convergentes. Nous en concluons que les suites fonctionnelles $\{\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t)\}$ tendent vers les fonctions limites

$$v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X,t)=\lim_{p\to\infty}\overset{(p)}{v^{\beta}_{\alpha\gamma}}(X,t) \qquad (X\in E,\ 0<t<T). \tag{50}$$

Cette convergence est uniforme dans tout domaine borné $\Omega\subset E$ et pour l'intervalle de temps (t_0, T), où t_0 est un nombre positif arbitrairement fixé.

Les fonctions limites (50) donnent la solution du système (27) en tout point X de l'espace E, pour $0<t<T$.

D'après les propriétés des intégrales figurant dans les équations (27), étudiées par W. Pogorzelski dans le travail [2], nous pouvons constater que les fonctions limites (50) ont la propriété suivante:

$$v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X,t)=\underset{(\gamma)}{D^{\beta}_{X}}[v^0_{\alpha}(X,t)] \qquad (\beta=1,2,\ldots,M-1) \tag{51}$$

en tout point $X\in E$ pour $0<t<T$. Donc les fonctions trouvées:

$$v^0_1(X,t),\ v^0_2(X,t),\ \ldots,\ v^0_N(X,t) \tag{52}$$

forment une solution du système d'équations intégro-différentielles (26). Nous allons montrer que le système de fonctions (52) fournit en même temps la solution du problème proposé.

D'après les théorèmes 2 et 4, cités plus haut, sur les intégrales analogues aux intégrales de Poisson-Weierstrass et au potentiel de charge spatiale, nous pouvons constater, en utilisant les relations (27), que les fonstions $v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X,t)$ satisfont à la condition de Hölder suivante:

$$|v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X,t)-v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X_1,t)<\mathrm{const}\cdot t^{-\mu}\exp(b|XX_0|)|XX_1|^{\theta}.$$

Il en résulte, en tenant compte de l'hypothèse (24), que les fonctions $F_{\alpha}[Y,\tau,(v^0),\ldots,(v^{M-1})]$ vérifient une condition de Hölder de la forme:

$$\begin{aligned}|F_{\alpha}[Y,\tau,(v^0),\ldots,(v^{M-1})]-F_{\alpha}[Y_1,\tau,(v^0)',\ldots,(v^{M-1})']|&\\ <\mathrm{const}\cdot k_F\exp(b|YX_0|)[\tau^{-\mu}|YY_1|^{\theta}+|YY_1|^{h_F}]&\\ <\mathrm{const}\cdot\tau^{-\mu}\exp(b|YX_0|)|YY_1|^{\tilde\theta},&\end{aligned}$$

où $\tilde\theta=\min(\theta,h_F)$. Par conséquent, en s'appuayant sur le théorème 3 cité plus haut, nous pouvons conclure que les fonctions (52), qui satisfont au système d'équations intégro-différentielles (26), vérifient le système parabolique donné (18) en tout point X de l'espace E pour $0<t<T$.

Enfin, nous allons démontrer que les fonctions (52) vérifient la condition initiale

$$\lim_{t\to 0}v^0_{\alpha}(X,t)=f_{\alpha}(X) \qquad (\alpha=1,2,\ldots,N). \tag{53}$$

En effet, la première des intégrales (26) a pour limite la fonction $f_{\alpha}(X)$ si $t\to 0$ (théorème 1 cité plus haut). La seconde, désignée par $I(x,t)$, vérifie, d'après les limitations (33), (35) et (36), une inégalité de la forme:

$$|I|<\mathrm{const}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu'}\tau^{\mu}}+\mathrm{const}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\mu_1}d\tau}{\tau^{\mu}}.$$

Or, μ étant fixé, on peut toujours choisir les constantes μ' et μ_1 de façon que l'on ait:

$$\mu'+\mu-1<0, \qquad -\mu+\mu_1+1>0.$$

La première des inégalités précédentes sera vérifiée si la constante μ' est suffisamment petite, la seconde le sera pour chaque $\mu_1>0$. Donc, l'intégrale I tend vers zéro si $t\to 0$ et la propriété (53) est ainsi établie.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions $F_{\alpha}[X,t,(v^0),(v^1),\ldots,(v^{M-1})]$, définies et continues dans la région* (22), *vérifient les conditions* (23) *et* (24), *si les fonctions $f^{\mathfrak{s}}_{\alpha}(X)$, définies et continues dans l'espace E, vérifient la condition* (25) *et si les constantes du problème m_F et k_F sont suffisamment petites pour que les inégalités* (40) *et* (47) *soient satisfaites, il existe un système de fonctions*

$$u^*_1(X,t),\ \ldots,\ u^*_N(X,t)$$

qui vérifie le système parabolique donné (18) *en tout point X de l'espace E pour $0<t<T$, et la condition initiale*

$$\lim_{t\to 0}u_{\alpha}(X,t)=f_{\alpha}(X).$$

Travaux cités

[1] I. G. Petrovsky, *Über das Cauchysche Problem für lineare partielle Differentialgleichungen im Gebiete der nicht analytischen Funktionen*, Bull. de l'Université de Moscou, fasc. 7 (1938).

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche di Math., Napoli, 7 (1958), p. 153-185.

[3] — *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et le problème de Cauchy pour un système parabolique*, Annales de l'Ecole Norm. Sup. Paris 76 (1959), p. 125-149.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 9. 1959