References

[1] D. Borwein, *On methods of summability based on integral functions*, Proc. Camb. Phil. Soc. (1959), p. 22-30.

[2] G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Dover Publ., New York 1943.

[3] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949.

[4] E. Jahnke und F. Emde, *Tafeln Höherer Funktionen*, Leipzig, 1952.

[5] S. Mazur and W. Orlicz, *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), p. 129-160.

[6] J. G. Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Math. 12 (1951), p. 208-224.

[7] — *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[8] S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938.

[9] L. Włodarski, *Sur une formule d'Efros*, Studia Math. 13 (1953), p. 183-187.

[10] — *Une remarque sur une classe de fonctions exponentielles du calcul opérationnel*, Studia Math. 13 (1953), p. 188-189.

[11] — *Sur les méthodes continues de limitation I et II*, Studia Math. 14 (1954), p. 161-199.

[12] — *Propriété des méthodes continues de limitation du type de Borel*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 173-175.

[13] — *Sur les méthodes continues de limitation du type de Borel*, Ann. Pol. Math. 4 (1958), p. 137-164.

[14] — *General method of limitation of the Borel type*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série math., astr. et phys. 7 (1959), p. 199-200.

Reçu par la Rédaction le 26. 1. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur une fonction extrémale liée à l'écart arithmétique d'un ensemble

par B. Szafirski (Kraków)

Introduction. Dans le présent travail je me propose de résoudre un problème de M. F. Leja, relatif à l'existence et aux applications de certaines fonctions extrémales liées aux ensembles fermés et bornés de l'espace euclidien R^m à m dimensions.

Si $E\subset R^m$ est un ensemble fermé et borné et si $q^{(n)}=\{q_1,\dots,q_n\}$ est le $n^{\text{ème}}$ système extrémal de points de E, c'est-à-dire un système de points tels que

$$\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}|q_i-q_k|=\sup_{x^{(n)}\subset E}\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}|x_i-x_k|\,,$$

où $x^{(n)}=\{x_1,\dots,x_n\}$ désignent un système quelconque de n points de l'ensemble E, alors la suite de fonctions

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x-q_i|\,,\qquad n=1,2,\dots,$$

converge en tout point de l'espace R^m. Dans la première partie je donne la démonstration de ce théorème, ainsi que certaines propriétés de la fonction extrémale ainsi obtenues.

La seconde partie est consacrée à une généralisation naturelle des notions et des théorèmes de la première partie.

Première partie

1. Soit E un ensemble borné et fermé de points de l'espace euclidien R^m à m dimensions, et $|p-q|$ la distance des points p et q. Désignons par $p^{(n)}$ un système de n points quelconques $p_1,\dots,p_n$ de E, par $A(p^{(n)})$ les sommes

$$A(p^{(n)})=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}|p_i-p_k| \tag{1}$$

et soit $A_n(E)$ la borne supérieure de $A(p^{(n)})$, lorsque les points du système $p^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. D'autre part, soit

$$q^{(n)} = \{q_1, \dots, q_n\} \tag{2}$$

un système de points de E pour lequel

$$A(q^{(n)}) = A_n(E) = \sup_{p^{(n)}\subset E} A(p^{(n)}) . \tag{3}$$

Les points du système (2) remplissant les conditions (3) sont dits *points extrémaux de rang n de E*.

La somme $A(q^{(n)})$ a $n(n-1)/2$ termes. On démontre [1] que la moyenne arithmétique

$$\frac{2}{n(n-1)} A(q^{(n)}), \qquad n = 1, 2, \dots$$

converge vers une limite non négative

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n-1)} A(q^{(n)}) = a(E)$$

dite *écart arithmétique de l'ensemble E*.

Formons maintenant les fonctions

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x-q_i|, \qquad n = 1, 2, \dots$$

correspondant au système extrémal (2), où x désigne un point quelconque de R^m. Le but de la I$^{\text{re}}$ partie de cette note est de démontrer l'existence de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$$

et d'étudier certaines propriétés de la fonction $\Phi(x)$.

2. Désignons par $M = M(E)$ la classe de toutes les répartitions non négatives $\sigma = \sigma(\Delta)$ de la masse unité sur l'ensemble E, c'est-à-dire la classe de toutes les fonctions d'ensemble additives $\sigma(\Delta)$ non négatives sur tout ensemble borelien $\Delta \subset R^m$ et telles que $\sigma(E) = 1$, $\sigma(R^m - E) = 0$. Dans la suite nous allons nous occuper de certaines répartitions particulières de la masse unité sur E.

Désignons, pour chaque ensemble borélien Δ, par $\mu_n(\Delta)$ la fonction d'ensemble égale à 0 lorsque Δ ne contient aucun des points (2) et à k/n lorsqu'il en contient k. Il est clair que, quel que soit $\Delta \subset E$, on a $0 \leqslant \mu_n(\Delta) \leqslant 1$, donc les fonctions $\mu_n(\Delta)$, $n = 1, 2, \dots$, sont complètement additives, non négatives et uniformément bornées. Elles appartiennent à la classe M. D'après un théorème de De la Vallée Poussin [2], de chaque suite illimitée

de fonctions additives uniformément bornées on peut extraire une suite partielle convergente. Soit $\{\mu_{n_\nu}\}$ une suite partielle de la suite $\{\mu_n\}$ tendant vers une limite et posons

$$\lim_{\nu\to\infty} \mu_{n_\nu}(\Delta) = \mu(\Delta) = \mu .$$

Nous allons démontrer le lemme suivant.

LEMME 1.

$$a(E) = \iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\mu = \sup_{\sigma\in M} \iint_{EE} |x-y|\, d\sigma d\sigma .$$

Démonstration. Remarquons que

$$\frac{2}{n(n-1)} A(q^{(n)}) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} |q_i - q_k| = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} |q_i - q_k|$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |q_i - q_k| = \iint_{EE} |x-y|\, d\mu_n d\mu_n .$$

En faisant tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1, n_2, \dots$ nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n-1)} A(q^{(n)}) = \iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\mu .$$

Je vais prouver que

$$\iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\mu = \sup_{\sigma\in M} \iint_{EE} |x-y|\, d\sigma d\sigma . \tag{4}$$

Soit $p^{(n)}$ un système de n points quelconques de E. D'après (3) on a

$$A(q^{(n)}) \geqslant \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} |p_i - p_k| . \tag{5}$$

Fixons arbitrairement les points $p_2, p_3, \dots, p_n$ sur E et partageons E en s ensembles boréliens $\Delta_1, \dots, \Delta_s$. Supposons tout d'abord que $p_1 \in \Delta_1$ et multiplions l'inégalité (5) par $\sigma(\Delta_1)$. Supposons ensuite que $p_1 \in \Delta_2$ et multiplions l'inégalité (5) par $\sigma(\Delta_2)$. Supposons enfin que p_1 appartienne à l'ensemble Δ_s, multiplions l'inégalité (5) par $\sigma(\Delta_s)$ et formons la somme des s inégalités ainsi obtenues. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n} \sigma(\Delta_i) = 1$. Lorsque s tend vers l'infini et le diamètre de tous les ensembles $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ tend vers zéro, on obtient l'inégalité

$$A(q^{(n)}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_E |p_i - x|\, d\sigma + \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} |p_i - p_k| . \tag{6}$$

Fixons maintenant les points $p_3, p_4, \ldots, p_n$ et supposons que le point p_2 appartienne successivement à $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$. Multiplions l'inégalité (6) par $\sigma(\Delta_1)$ lorsque $p_2 \in \Delta_1$, par $\sigma(\Delta_2)$ lorsque $p_2 \in \Delta_2, \ldots$, et enfin par $\sigma(\Delta_s)$ lorsque $p_2 \in \Delta_s$ et formons la somme des s inégalités ainsi obtenues. En passant à la limite lorsque $s \to \infty$ et en faisant tendre le diamètre de tous ensembles $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ vers zéro, on obtient l'inégalité

$$(7) \qquad A(q^{(n)}) \geqslant \iint_{EE} |x-y|\, d\sigma d\sigma + 2\sum_{i=1}^{n} \int_E |p_i - x|\, d\sigma + \sum_{3 \leqslant i < k \leqslant n} |p_i - p_k| .$$

Précedant ainsi de proche en proche on obtient enfin

$$A(q^{(n)}) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} \iint_{EE} |x-y|\, d\sigma d\sigma .$$

Il suffit de diviser les deux membres de cette inégalité par $\binom{n}{2}$ et de faire tendre n vers l'infini pour en obtenir l'égalité (4).

3. LEMME 2. *Si $\nu(\Delta)$ est une répartition d'une masse quelconque sur E, telle que $\nu(E) = 0$, $\mu + \varepsilon\nu \geqslant 0$ pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, alors*

$$\iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\nu \leqslant 0 .$$

Démonstration. La fonction $\mu + \varepsilon\nu$ appartient à M. Donc

$$\begin{aligned} a(E) &\geqslant \iint_{EE} |x-y|\, d(\mu+\varepsilon\nu)\, d(\mu+\varepsilon\nu) \\ &= \iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\mu + \varepsilon^2 \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu + 2\varepsilon \iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\nu \\ &= a(E) + \varepsilon^2 \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu + 2\varepsilon \iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\nu . \end{aligned}$$

Il en résulte pour ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$ quelconque

$$\varepsilon\Big(2\iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\nu + \varepsilon \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu\Big) \leqslant 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\iint_{EE} |x-y|\, d\mu d\nu \leqslant 0 .$$

LEMME 3. *La répartition $\mu(\Delta)$ est unique.*

Démonstration. Sinon, il existerait deux répartitions $\mu_1 \neq \mu_2$ telles que

$$\sup_{\sigma \in M} \iint_{EE} |x-y|\, d\sigma d\sigma = \iint_{EE} |x-y|\, d\mu_1 d\mu_1 = \iint_{EE} |x-y|\, d\mu_2 d\mu_2 .$$

Formons la différence $\nu = \mu_1 - \mu_2$. D'après le lemme 2, on a

$$\iint_{EE} |x-y|\, d\mu_1 d\nu \leqslant 0 .$$

Mais

$$\begin{aligned} a(E) &= \iint_{EE} |x-y|\, d\mu_1 d\mu_1 \\ &= \iint_{EE} |x-y|\, d\mu_2 d\mu_2 + \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu + 2\iint_{EE} |x-y|\, d\mu_2 d\nu \\ &= a(E) + \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu + 2\iint_{EE} |x-y|\, d\mu_2 d\nu , \end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu = -2\iint_{EE} |x-y|\, d\mu_2 d\nu \leqslant 0 .$$

La conclusion du lemme 3 résulte du lemme suivant [3]: Soit ν une répartition d'une masse quelconque sur E, remplissant les conditions:

$$\int_E d\nu = 0 , \qquad \iint_{EE} |x-y|\, d\nu d\nu \leqslant 0 ;$$

alors $\nu \equiv 0$.

4. La fonction $\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x - q_i|$ peut être représentée par l'intégrale

$$\Phi_n(x) = \int_E |x-y|\, d\mu_n .$$

Soit $n = n_1, n_2, \ldots$; alors

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_{n_k}(x) = \int_E |x-y|\, d\mu = \Phi(x) .$$

D'après le lemme 3, il en résulte l'existence de la limite

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x) ,$$

dite *fonction extrémale de l'ensemble E.*

Désignons par E_0 le noyau de la masse relatif à la répartition μ, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de E dont chaque entourage contient une masse non nulle. L'ensemble E_0 est évidemment fermé.

THÉORÈME 1. *En tout point de E_0 la fonction $\Phi(x)$ est constante et égale à $a(E)$, et en tout point de E on a $\Phi(x) \leqslant a(E)$.*

Démonstration. Nous allons prouver que, quels que soient $x_0 \in E_0$ et $x \in E$, on a l'inégalité $\Phi(x) \leqslant \Phi(x_0)$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait deux points $x_1 \in E_0$ et $x_2 \in E$ tels que $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$. Désignons par $K(x_1, \varrho)$ la boule centrée en x_1 et de rayon ϱ suffisamment petit pour que l'on ait $x_2 \,\overline{\in}\, K(x_1, \varrho)$ et que l'oscillation de la fonction $\Phi(x)$ dans

$K(x_1, \varrho)$ soit inférieure ou égale à $\frac{1}{2}\big(\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\big)$. Comme $x_1 \in E_0$, $m = \mu\big(K(x_1, \varrho)\big) > 0$. Définissons maintenant, pour tout ensemble borélien $\Delta \subset E$, une nouvelle répartition de la masse dans E par la formule suivante:

$$\nu(\Delta) = m\delta_{x_2}(\Delta) - \mu\big(\Delta \cap K(x_1, \varrho)\big), \tag{8}$$

où

$$\delta_{x_2}(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad x_2 \in \Delta, \\ 0 & \text{lorsque} \quad x_2 \,\bar{\in}\, \Delta. \end{cases}$$

La fonction (8) satisfait aux conditions du lemme 2, donc

$$\iint_{EE} |x-y|\,d\mu d\nu \leqslant 0.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \iint_{EE} |x-y|\,d\mu d\nu &= \int_E \Big[\int_E |x-y|\,d\mu\Big]\,d\nu = \int_E \Phi(x)\,d\nu = \Phi(x_2)m - \int_{K(x_1,\varrho)} \Phi(x)\,d\mu \\ &\geqslant \Phi(x_2)m - \big[\Phi(x_1) + \tfrac{1}{2}\big(\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\big)\big]m \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\big)\,m > 0, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec le lemme 2. En tout point de E_0 la fonction $\Phi(x)$ est égale à une constante C, et en tout point de E on a $\Phi(x) \leqslant C$. Nous trouvons ons enfin la valeur de la constante C:

$$a(E) = \iint_{EE} |x-y|\,d\mu d\mu = \int_E \Phi(x)\,d\mu = C\int_E d\mu = C$$

et le théorème 1 est ainsi démontré.

Le laplacien de la fonction $|x-y|$, envisagée comme fonction de la variable x, s'exprime dans l'espace R^m par la formule

$$\Delta|x-y| = \frac{m-1}{|x-y|}.$$

Il s'ensuit que la fonction $|x-y|$ de la variable x ainsi que la fonction $\Phi(x)$ sont strictement sousharmoniques dans R^m. Il en résulte que le noyau E_0 est situé sur la frontière de l'ensemble E. En effet, si un point x_0 situé à l'intérieur de E, appartenait à E_0, on aurait

$$\Phi(x_0) < \frac{1}{4\pi\varrho^2}\iint_{S(x_0,\varrho)} \Phi(x)\,d\sigma \leqslant a(E),$$

où $S(x_0, \varrho)$ désigne la sphère $\subset E$, $d\sigma$ l'élément de surface. Donc

$$\Phi(x_0) < a(E),$$

en contradiction avec le théorème 1.

5. Maintenant nous allons calculer les fonctions extrémales pour quelques ensembles particuliers.

a) Segment. Les points extrémaux du segment (p, q) sont situés sur ses extrémités. Pour n pair, $n/2$ de ces points sont identiques à p et les autres sont identiques à q. Pour n impair, l'un de ces points peut être choisi arbitrairement sur le segment (p, q). Il en résulte que la fonction extrémale du segment (p, q) s'exprime par la formule

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}(|x-p|+|y-q|).$$

b) Cercle. Désignons par K le cercle unité et par C la circonférence. Comme les points du système extrémal $q^{(n)}$ sont, pour chaque $n \geqslant 2$, les sommets d'un polygone régulier inscrit, nous obtenons pour $|z| \leqslant 1$ la formule

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_C |z-e^{i\varphi}|\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |z-e^{i\varphi}|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1-\bar{z}e^{i\varphi}|\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-\bar{z}e^{i\varphi})^n\Big|^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-\bar{z}e^{i\varphi})^n\Big]\overline{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-\bar{z}e^{i\varphi})^n\Big]}\,d\varphi, \end{aligned}$$

d'où, puisque $\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}d\varphi = 0$, on obtient

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}^2 |z|^{2n}.$$

En considérant la formule $|z-e^{i\varphi}| = |z||1-e^{i\varphi}/z|$ on obtient d'une façon analogue, pour $|z| \geqslant 1$,

$$\Phi(z) = |z|\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}^2\Big|\frac{1}{z}\Big|^{2n}.$$

Remarquons en passant que l'écart arithmétique du cercle unité étant égal à $4/\pi$ ([1], p. 52), le théorème 1 permet d'obtenir la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}^2 = \frac{4}{\pi}$.

c) Boule. Soit V la boule unité et S la sphère unité dans R^3. Comme la répartition de la masse unité définie par la répartition des points extrémaux sur V est homogène sur S, il s'ensuit que $\Phi(x)$ s'exprime par la formule

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_S |x-y|\,d\sigma,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de surface. Par un changement de variables on obtient

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{1+[\varrho(x)]^2-2\varrho(x)\cos\vartheta\}^{1/2}\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{1+[\varrho(x)]^2-2\varrho(x)t\}^{1/2}dt = \varrho(x)+\frac{1}{3\varrho(x)},$$

où $\varrho(x)$ désigne la distance du point x au centre S. En tout point $x \epsilon S$ on a

$$\Phi(x) = \tfrac{4}{3}.$$

Deuxième partie

Nous nous occuperons maintenant de certaines généralisations naturelles des notions introduites dans la partie précédente et de leurs applications aux équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre.

1. Soit E un ensemble borné et fermé de points de l'espace euclidien R^m à m dimensions, $f(x)$ une fonction réelle, non négative, définie et continue dans E, $\omega(x,y) = |x-y|^{\alpha}+f(x)+f(y)$ $(\alpha > 0)$. Désignons par $x^{(n)}$ un système de n points quelconques $x_1, \ldots, x_n$ de E, par $A(x^{(n)}, \omega)$ les sommes

$$A(x^{(n)}, \omega) = \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\omega(x_i, x_k) \tag{9}$$

et soit $A_n(E, \omega)$ la borne supérieure de $A(x^{(n)}, \omega)$, lorsque les points du système $x^{(n)}$ varient arbitrairement dans E. D'autre part, soit

$$y^{(n)} = \{y_1, \ldots, y_n\} \tag{10}$$

un système de points de E pour lequel

$$A(y^{(n)}, \omega) = \sup_{x^{(n)}\epsilon E} A(x^{(n)}, \omega). \tag{11}$$

Les points du système (10) remplissant les conditions (11) sont dits *points extrémaux de rang n de E par rapport à la fonction ω*. On démontre [1] que la moyenne arithmétique

$$\frac{2}{n(n-1)}A(y^{(n)}, \omega), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

converge vers une limite non négative

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n-1)}A(y^{(n)}, \omega) = a(E, \omega),$$

dité *écart arithmétique de l'ensemble E par rapport à la fonction ω*.

2. La position des points extrémaux (10) sur E dépend de n et de ω. Désignons par Δ un ensemble borélien quelconque de points de R^m; soit $\mu_n = \mu_n(\Delta)$ la fonction d'ensemble égale à 0 lorsque Δ ne contient aucun des points (10) et à k/n lorsqu'il en contient k. Soit $\{\mu_{n_k}\}$ une suite partielle de la suite $\{\mu_n\}$ tendant vers une limite et posons

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{n_k} = \mu(\Delta) = \mu.$$

En appliquant la méthode de la démonstration du lemme 1, on peut prouver le lemme suivant.

LEMME 1'. *Quelle que soit la répartition $\sigma(\Delta) = \sigma$ de la masse unité sur E, on a l'égalité*

$$a(E, \omega) = \iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\mu d\mu+2\int_E f(x)\,d\mu = \sup_{\sigma}\Big[\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\sigma d\sigma+2\int_E f(x)\,d\sigma\Big].$$

Soit E_f le noyau de la masse relatif à la répartition μ. Nous allons prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *En tout point de E_f la fonction*

$$\Phi(x) = \int_E |x-y|^{\alpha}d\mu+f(x)$$

est égale à une constante γ, et en tout point de $E-E_f$ on a

$$\Phi(x) \leqslant \gamma,$$

où

$$\gamma = \iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\mu d\mu+\int_E f(x)\,d\mu.$$

Démonstration. Désignons par $\nu(\Delta)$ la répartition de la masse sur E telle que $\nu(E) = 0$, $\mu+\varepsilon\nu \geqslant 0$ pour tout $\varepsilon \epsilon [0, 1]$. Il en résulte, d'après le lemme 1', que

$$a(E, \omega) \geqslant \iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d(\mu+\varepsilon\nu)\,d(\mu+\varepsilon\nu)+2\int_E f(x)\,d(\mu+\varepsilon\nu)$$
$$= a(E, \omega)+\varepsilon^2\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\nu d\nu+2\varepsilon\int_E f(x)\,d\nu+2\varepsilon\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\mu d\nu$$
$$= a(E, \omega)+\varepsilon^2\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\nu d\nu+2\varepsilon\Big[\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\mu d\nu+\int_E f(x)\,d\nu\Big].$$

On a donc

$$\int_E \Phi(x)\,d\nu \leqslant 0. \tag{12}$$

Supposons qu'il existe deux points $x_1 \epsilon E_f$ et $x_2 \epsilon E$ tels que $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$. Alors, de même que dans la démonstration du théorème 1, on obtient l'inégalité

$$\iint_{EE}|x-y|^{\alpha}d\mu d\nu+\int_E f(x)\,d\nu > 0,$$

qui est en contradiction avec (12). Pour terminer la démonstration il suffit de prendre l'intégrale de la fonction $\Phi(x)$

$$\int_{E_f} \Phi(x)\,d\mu = \gamma = \iint_{EE} |x-y|^a d\mu d\mu + \int_E f(x)\,d\mu .$$

Travaux cités

[1] F. Leja, *O rozwartości arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej zbioru*, Zeszyty Naukowe UJ, Nr 3 (1957), p. 49-60.

[2] C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 2 (1932), Note I, p. 223.

[3] G. Björck, *Distributions of positive mass, which maximize a certain generalized energy integral*, Arkiv för Matematik, b. 3, 3 (1956), p. 255-269.

Reçu par la Rédaction le 26. 6. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Series containing the Hurwitz function

by O. M. Fomenko (Krasnodar, USSR)

Notations. We shall denote by $\vartheta(s, a)$ the Hurwitz function which for $\sigma > 1$, where $\sigma = \operatorname{Re} s$, is defined by the series

$$(1)\qquad \vartheta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \qquad (0 < a \leqslant 1) .$$

The Lerch function is defined by the series

$$(2)\qquad \varphi(x, b, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x n}}{(n+b)^s},$$

where $\sigma > 1$, and b is a real constant different from 0 or a negative integer. Further, let ω denote a fixed value equal to 1 or -1, and let

$$\vartheta(s, a, i) = \sum_{n=0}^{i} \frac{1}{(n+a)^s} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\vartheta(s, a, -1) \equiv 0 .$$

In the present note we shall deal with two series which contain the Hurwitz function: the formula

$$(3)\qquad \vartheta(s, a) - \vartheta(s, a, i) - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{2}(\omega-1) + i\right)^{s-1}(s-1)}$$
$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{j+1} \frac{s(s+1)\ldots(s+j)}{(j+2)!} \{\vartheta(s+j+1, a) - \vartheta(s+j+1, a, i)\}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

holds for all values of s. The proof of this formula consists of considering two particular cases $\omega = 1$ and $\omega = -1$. Let for instance $\omega = 1$. We shall rewrite the right-hand side of (3) in the following way: