ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

Sur quelques propriétés des potentiels généralisés et un problème aux limites pour l'équation elliptique

par W. Pogorzelski (Warszawa)

1. Enoncé du problème. Soit l'équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du second ordre de la forme

$$(1)\qquad \hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(X)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \\ + c(X)u = F\left(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \qquad (n > 2)$$

dans l'espace euclidien à n dimensions des points $X(x_1, \ldots, x_n)$. On admet les hypothèses suivantes.

I. Les coefficients $a_{\alpha\beta}(X)$, $b_\alpha(X)$, $c(X)$ sont des fonctions des coordonnées $X(x_1, \ldots, x_n)$, définies dans la région $\Omega+S$ (où Ω est un domaine borné limité par une surface fermée S dans l'espace à n dimensions) et vérifiant les conditions de Hölder

$$(2)\qquad \begin{gathered} |a_{\alpha\beta}(X)-a_{\alpha\beta}(X_1)| < \mathrm{const}\,|XX_1|^h, \\ |b_\alpha(X)-b_\alpha(X_1)| < \mathrm{const}\,|XX_1|^h, \quad |c(X)-c(X_1)| < \mathrm{const}\,|XX_1|^h; \end{gathered}$$

h est une constante positive, non supérieure à l'unité, $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne des points X et X_1.

II. La forme quadratique $\sum a_{\alpha\beta}(X)Z_\alpha Z_\beta$ est définie — positive dans $\Omega+S$, donc l'équation (1) est du type elliptique.

III. La surface S vérifie les conditions de Liapounoff (voir [1]).

IV. La fonction $F(X, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est définie dans la région

$$(3)\qquad X \in \Omega, \qquad -\infty < u_\nu < +\infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où elle vérifie l'inégalité

$$(4)\qquad |F(X, u_0, u_1, \ldots, u_n)| < m_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^r + m'_F|XP_X|^{-p}$$

et une condition de Hölder de la forme

(5) $$|F(X, u_0, u_1, \ldots, u_n)-F(X', u_0', u_1', \ldots, u_n')| \leqslant k(\Omega^*)|XX'|^{h_F}+k_F\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu-u_\nu'|^{h_F}$$

dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω; r, p, m_F, m_F', k_F sont des constantes positives et on admet que $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant p < 1$; P_x est le point de la surface S le plus rapproché du point X; $k(\Omega^*)$ est une constante positive, dépendant du domaine Ω^*, qui peut être non bornée.

Nous posons le problème de la recherche d'une fonction $u(X)$ qui vérifie l'équation (1) en tout point intérieur $X \epsilon \Omega$ et une condition limite

(6) $$\frac{du}{dT_P}+g(P)u(P) = G[P, u(P)]+ \\ +\iiint_\Omega H\left[P, Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right]dY,$$

concernant la dérivée transversale d/dT_P, en tout point $P \epsilon S$.

Nous avons déjà étudié le problème précédent (sans le terme intégral dans (6)) dans le travail [1], sous l'hypothèse que les fonctions données $g(P)$ et $G(P, u)$ vérifient une condition de Hölder et que la fonction F soit bornée. Maintenant nous allons résoudre, par une méthode nouvelle, le problème (6) sous l'hypothèse, plus générale, que les fonctions $g(P)$ et $G(P, u)$, définies dans les régions

$$P \epsilon S, \quad \text{resp.} \quad [P \epsilon S, -\infty < u < \infty],$$

ne soient que continues dans ces régions. En outre on admet que la fonction G vérifie l'inégalité

(6') $$|G(P, u)| < m_G|u|^r+m_G',$$

où m_G et m_G' sont des constantes positives.

Nous supposons encore que le problème pour l'équation $\Psi(u) = 0$, avec la condition aux limites homogène $du/dT_p+g(P)u = 0$, n'admet que la solution nulle $u = 0$. Quant à la fonction $H(P, Y, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ dans la condition limite (6), nous admettons des hypothèses plus générales que pour la fonction F, à savoir: 1) la fonction H est définie dans la région ouverte

(6'') $$P \epsilon S, \quad Y \epsilon \Omega, \quad -\infty < u_\nu < +\infty \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

2) elle est continue par rapport à l'ensemble des variables $P, Y, u_0, \ldots, u_n$, 3) elle vérifie l'inégalité

(6''') $$|H(P, Y, u_0, \ldots, u_n)| < m_H\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu|^r+m_H'|YQ_Y|^{-p}$$

Q_Y étant le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur Y, m_H et m_H' étant des constantes positives.

La résolution du problème sera basée sur certaines propriétés du potentiel généralisé de charge spatiale à la densité non bornée et sur le théorème de J. Schauder [2].

2. Propriétés de certains potentiels généralisés. Nous allons présenter quelques théorèmes, concernant les intégrales de l'équation elliptique (1), sur lesquels nous nous appuierons dans les considérations qui suivent. Les théorèmes 1, 2, 3 ont été établis dans notre travail [1]. Nous démontrerons ici les théorèmes nouveaux 4, 5, 6.

THÉORÈME 1. *Si la fonction réelle $\varphi(Q)$ est définie, bornée et intégrable sur la surface S, l'intégrale de surface*

(7) $$U(X) = \iint_S \Gamma(X, Q)\varphi(Q)dQ,$$

dite potentiel de simple couche relatif à l'équation (1), *satisfait à l'équation $\Psi(U) = 0$ en tout point $X \epsilon \Omega$ et vérifie une condition de Hölder de la forme*

(8) $$|U(X)-U(X_1)| < C\sup_S|\varphi||XX_1|^\theta$$

pour $X, X_1 \epsilon \Omega+S$; θ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité, C une constante positive indépendante de la fonction φ, $\Gamma(X, Y)$ désigne la solution fondamentale de l'équation (1) (*voir* [1]).

THÉORÈME 2. *Si la fonction réelle $\varphi(Q)$ est définie et continue sur la surface S, la dérivée transversale du potentiel* (7) *a la propriété limite suivante*:

(9) $$\frac{dU}{dT_P} = \lim_{X\to P}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(X)\cos(N_P, x_\beta)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \\ = -\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P)+\iint_S\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, Q)]\varphi(Q)dQ$$

en tout point P de la surface S; la fonction sous le signe intégral vérifie la limitation à singularité faible

(9') $$\left|\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, Q)]\right| < \frac{\text{const}}{|PQ|^{n-1-h_1}},$$

où $h_1 = \min(h, \varkappa)$, $\varkappa$ étant un exposant positif, non supérieur à l'unité, dans les conditions de Liapounoff; on a posé

(9'') $$\lambda_n(X) = \frac{2(n-2)(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(X)|}}$$

$a^{\alpha\beta}$ étant les éléments de la matrice inverse de la matrice $\{a_{\alpha\beta}\}$ des coefficients de l'équation (1) (*voir aussi* [3], *p.* 108).

Théorème 3. *Si la fonction $\varphi(Q)$ est définie, bornée et intégrable sur la surface S, l'intégrale*

$$\widetilde{H}(P) = \iint\limits_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,Q)]\varphi(Q)\,dQ\,, \tag{10}$$

figurant dans le théorème 2, vérifie une condition de Hölder de la forme

$$|\widetilde{H}(P)-\widetilde{H}(P_1)| < \mathrm{const}\sup|\varphi|\,|PP_1|^{\theta h_1}\,, \tag{11}$$

où $P, P_1 \in S$ et θ est un nombre positif, arbitrairement inférieur à l'unité.

Théorème 4. *Si la fonction $\varphi(Q)$ est définie, bornée et intégrable sur la surface S, les dérivées*

$$U_{x_\nu}(X) = \iint\limits_S \Gamma_{x_\nu}(X,Q)\varphi(Q)\,dQ \tag{12}$$

du potentiel de simple couche (7) *vérifient en tout point intérieur $X \in \Omega$ l'inégalité*

$$|U_{x_\nu}(X)| < c_1\sup|\varphi|\big[\big|\log|XP_X|\big|+c_2\big]\,, \tag{13}$$

où P_X désigne un point de la surface S, pour lequel la distance $|XP|$ atteint sa borne inférieure, X étant fixé; c_1 et c_2 sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ.

Démonstration. D'après notre travail [1], les dérivées de la solution fondamentale vérifient l'inégalité

$$|\Gamma_{x_\nu}(X,Q)| < \frac{c}{|XQ|^{n-1}} \tag{14}$$

(c est une constante), qui n'assure pas l'existence des valeurs limites des dérivées (12), si $X \to P \in S$. Pour démontrer la limitation (13), il suffit d'étudier l'intégrale

$$I(X) = \iint\limits_s \Gamma_{x_\nu}(X,Q)\varphi(Q)\,dQ \tag{15}$$

étendue à une portion s de la surface S dont la projection orthogonale sur le plan tangent en P_x est une sphère à $n-1$ dimensions, centrée en P_x, et de rayon fixé R, suffisamment petit, pour que la portion s soit une surface de Liapounoff.

En s'appuyant sur l'inégalité

$$0 < \chi \leqslant \frac{|XQ|}{|XQ'|} \leqslant \frac{1}{\chi} \tag{16}$$

démontrée dans le travail [3], où χ est une constante positive déterminée, inférieure à l'unité et Q' désigne la projection du point $Q \in s$ sur le plan tangent en P_X, nous aurons

$$\begin{aligned}|I(X)| &< \frac{c\sup|\varphi|}{\chi^{n-1}}\int_0^R \frac{\omega_{n-2}c'r^{n-2}\,dr}{\big[\sqrt{r^2+|XP_x|^2}\big]^{n-1}} \\ &= \frac{\omega_{n-2}cc'\sup|\varphi|}{\chi^{n-1}}\int_0^{R/|XP_x|}\frac{\varrho^{n-2}\,d\varrho}{\big(\sqrt{1+\varrho^2}\big)^{n-1}}\,,\end{aligned} \tag{17}$$

où ω_{n-2} est l'aire d'une sphère unitaire à $n-2$ dimensions, c' est la borne supérieure de l'inverse du cosinus de l'angle que fait la normale au point $Q \in S$ avec la normale au point P_X. L'intégrale obtenue étant comparable à la fonction $\log|XP_X|$, nous arrivons à la conclusion (13) du théorème 4.

Théorème 5. *Si la fonction $\varrho(Y)$, définie et intégrable dans le domaine Ω, vérifie l'inégalité*

$$|\varrho(Y)| < \frac{M_\varrho}{|YQ_Y|^p} \tag{18}$$

où p est une constante non négative, inférieure à l'unité, M_ϱ est une constante positive, Q_Y désigne le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $Y \in \Omega$, alors: 1) *le potentiel de charge spatiale*

$$V(X) = \iiint\limits_\Omega \Gamma(X,Y)\varrho(Y)\,dY \tag{19}$$

et ses dérivées admettent des valeurs limites

$$\begin{aligned}\lim_{X\to P} V(X) &= \iiint\limits_\Omega \Gamma(P,Y)\varrho(Y)\,dY = V(P)\,, \\ \lim_{X\to P} V_{x_\nu}(X) &= \iiint\limits_\Omega \Gamma_{x_\nu}(P,Y)\varrho(Y)\,dY = V_{x_\nu}(P)\end{aligned} \tag{20}$$

en tout point P de la surface S limitant le domaine Ω; 2) *les fonctions $V(X)$, $V_{x_\nu}(X)$ et leurs limites vérifient des inégalites de la forme*

$$|V(X)| < \mathrm{const}\,M_\varrho\,, \qquad |V_{x_\nu}(X)| < \mathrm{const}\,M_\varrho\,, \tag{21}$$

les coefficients constants, positifs, étant indépendants de la fonction ϱ.

Démonstration. Il suffit de démontrer la seconde des propriétés (20), la plus difficile à établir. Tout d'abord remarquons que l'intégrale

$$V_{x_\nu}(X)=\iiint\limits_{\Omega}\Gamma_{x_\nu}(X,\,Y)\varrho(Y)\,dY \tag{22}$$

(voir [1]), présentant les dérivées du potentiel (19), a un sens déterminé (elle est absolument convergente) en tout point intérieur $Y\in\Omega$, en vertu de la limitation (14) et de résultats connus en Analyse classique. Si le point X coïncide avec un point arbitraire P de la surface S, on définit, comme d'habitude, la valeur $V_{x_\nu}(P)$ par la limite

$$V_{x_\nu}(P)=\lim_{\Delta(\omega)\to 0}\iiint\limits_{\Omega-\omega}\Gamma_{x_\nu}(P,\,Y)\varrho(Y)\,dY \tag{23}$$

de l'intégrale régulière étendue au domaine extérieur $\Omega-\omega$, si le diamètre $\Delta(\omega)$ du voisinage ω du point P tend vers zéro. Pour démontrer la convergence absolue de l'intégrale (23), il suffit d'étudier l'intégrale de la valeur absolue

$$\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\Pi'}(P)=\iiint\limits_{W'-\Pi'}|\Gamma_{x_\nu}(P,\,Y)|\,|\varrho(Y)|\,dY \tag{24}$$

étendue au domaine $W'-\Pi'$, partie commune des domaines $W-\Pi$ et Ω, où: 1) W est un cylindre à n dimensions, centré en P, d'axe normal en P à la surface S, de rayon R et de hauteur $2H$, fixés suffisamment petits pour que la portion S_W de la surface S, située à l'intérieur du cylindre W, vérifie les conditions dites de Liapounoff; 2) Π est un cylindre variable, contenu à l'intérieur du cylindre W, aussi centré en P, d'axe normal en P, de rayon r_Π et de hauteur $2h_\Pi$. Nous supposons de plus que les nombres R et H sont suffisamment petits pour que l'angle aigu γ que fait le vecteur YQ_Y avec la normale en P pour tout point $Y\in W$ soit inférieur à un angle aigu γ_0. Dans ce cas on conclut sans peine, d'après les conditions de Liapounoff, que le rapport $|YY_s|/|YQ_Y|$ (Y_s est le point où la parallèle à la normale en P, passant par le point Y, coupe la surface S_W) est borné supérieurement. On peut donc, dans les limitations qui suivent, remplacer dans les dénominateurs la longueur $|YQ_Y|$ par $|YY_s|$. En divisant le domaine $W'-\Pi'$ en filets parallèles à la normale en P et en utilisant la limitation (14), on aura

$$\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\Pi'}(P)<\operatorname{const}M_\varrho\Bigg\{\int\limits_{r_\Pi}^{R}r^{n-2}dr\cdot\sup_{|PY'|=r}\Bigg[\int\limits_{\zeta_0(Y')}^{H}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p}\Bigg]+ \tag{25}$$
$$+\int\limits_{0}^{r_\Pi}r^{n-2}dr\int\limits_{h_\Pi}^{H}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^{n-1}\zeta^p}\Bigg\},$$

$\zeta_0(Y')$ désignant la cote du point Y_s de la surface S, correspondant à la projection Y' du point Y sur le plan tangent en P; on a posé $r=|PY'|$. Nous aurons ensuite

$$\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\Pi'}(P)<\operatorname{const}M_\varrho\int\limits_{r_\Pi}^{R}r^{n-2}dr\Bigg[\int\limits_{0}^{H}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^{n-1}\zeta^p}+ \tag{26}$$
$$+\sup_{|PY'|=r}\int\limits_{0}^{|\zeta_0(Y')|}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^{n-1}(|\zeta_0|-\zeta)^p}\Bigg]+\operatorname{const}M_\varrho\int\limits_{0}^{r_\Pi}\frac{dr}{r^p}\int\limits_{h_\Pi/r_\Pi}^{H/r_\Pi}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^{n-1}s^p}$$
$$<\operatorname{const}M_\varrho\Bigg\{\int\limits_{r_\Pi}^{R}\frac{dr}{r^p}\Bigg[\int\limits_{0}^{\infty}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^{n-1}s^p}+\int\limits_{0}^{\frac{\zeta_0^m(r)}{r}}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^{n-1}s^p}\Bigg]+$$
$$+r_\Pi^{1-p}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^{n-1}s^p}\Bigg\},$$

où $\zeta_0^m(r)=\max\limits_{|PY'|=r}|\zeta_0(Y')|$.

En remarquant que, en vertu des conditions de Liapounoff, le rapport $\zeta_0^m(r)/r$ est borné, nous concluons que l'intégrale (26) est bornée, si les paramètres r_Π et h_Π tendent indépendamment vers zéro. Soient maintenant deux suites décroissantes $\{r_\Pi^{(m)}\}$, $\{h_\Pi^{(m)}\}$ tendant vers zéro et définissant une suite de cylindres $\{\Pi_m\}$. La suite correspondante des intégrales (24) est croissante et bornée, donc elle a une limite déterminée. Cette limite est unique, c'est-à-dire elle ne dépend pas du choix des suites $\{r_\Pi^{(m)}\}$, $\{h_\Pi^{(m)}\}$ et elle présente aussi la limite vers laquelle tend la suite des intégrales

$$\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\omega'_m}(P)=\iiint\limits_{W'-\omega'_m}|\Gamma_{x_\nu}(P,\,Y)\varrho(Y)|\,dY \tag{27}$$

si la suite décroissante des diamètres $\Delta(\omega_m)$ des voisinages (arbitrairement choisis) ω_m du point P tend vers zéro. Pour établir ce fait, il suffit de remarquer que, si les inégalités suivantes sont satisfaites

$$r_\Pi^{(m)}<\varepsilon/2\,,\qquad h_\Pi^{(m)}<\varepsilon/2\,,\qquad \Delta(\omega_m)<\varepsilon\,,$$

ε étant un nombre positif arbitraire, on aura une inégalité de la forme

$$|\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\omega'_m}(P)-\widetilde{V}_{x_\nu}^{W'-\Pi'_m}(P)|<cM_\varrho\varepsilon^{1-p}$$

(c étant une constante positive, indépendante de m, de la fonction ϱ et de ε) qu'on obtient en substituant dans le dernier membre des inégalités (26) le nombre ε au lieu de R et 0 au lieu de r_Π. On en conclut ensuite, d'après un raisonnement classique, l'existence de l'intégrale absolument convergente (23). Pour démontrer la propriété limite (20) de l'intégrale (22), considérons deux sphères: l'une K_P, de rayon R_k, centrée au point arbitraire $P \in S$ et l'autre K_x, de rayon $2R_k$, centrée au point arbitraire X, situé à l'intérieur du domaine $K'_P = K_P \times \Omega$ commun à la sphère K_P et au domaine Ω.

On suppose, comme toujours, que R_K est suffisamment petit pour que la portion de la surface S, située dans K_X, vérifie les conditions de Liapounoff. Cherchons une limitation de l'intégrale

$$\tilde{V}^{K'_x}_{x_\nu}(X) = \iiint\limits_{K'_X} |\Gamma_{x_\nu}(X, Y)\varrho(Y)| dY \tag{28}$$

étendue au domaine $K'_X = K_X \times \Omega$. En remplaçant le domaine K_X par un cylindre (centré en X) d'axe normal en P_x, de rayon $2R_K$, de hauter $4R_K$ et en divisant ce domaine en filets parallèles à la normale au point P_X, on aura, de même que précédemment, la limitation

$$\tilde{V}^{K'_X}_{x_\nu}(X) < \text{const}\, M_\varrho \iiint\limits_{K'_X} \frac{dY}{|XY|^{n-1}|YQ_Y|^p} \tag{29}$$

$$< \text{const}\, M_\varrho \int\limits_0^{2R_K} r^{n-2} dr \cdot \sup_{|PY'|=r} \left[\int\limits_{\zeta_0(Y')}^{2R_K+|XP_x|} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(\zeta-|XP_X|)^2}\right)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p} \right].$$

Supposons d'abord $|XP_X| \geqslant \zeta_0$; nous aurons alors, en posant $|XP_X| = a_x$,

$$\int\limits_{\zeta_0}^{2R_K-a_x} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(\zeta-|XP_X|)^2}\right)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p} \tag{30}$$

$$= \int\limits_{\zeta_0}^{a_x} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{(r^2+(a_x-\zeta)^2}\right)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p} + \int\limits_{a_x}^{2R_K+a_x} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(\zeta-a_x)^2}\right)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p}$$

$$= \frac{1}{r^{n+p-2}} \left[\int\limits_0^{(a_x-\zeta_0)/r} \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}\left((a_x-\zeta_0)/r-s\right)^p} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{2R_K/r} \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}\left(s+(a_x-\zeta_0)/r\right)^p} \right] < \frac{1}{r^{n+p-2}} \left[\int\limits_0^b \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}(b-s)^p} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}s^p} \right]$$

en posant $b = (a_x-\zeta)/r > 0$. La dernière intégrale dans l'intervalle infini a une valeur finie, puisque $n-1+p > 1$, $p < 1$.

Pour étudier la première intégrale, écrivons l'inégalité

$$\int\limits_0^b \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}(b-s)^p} < \frac{1}{(b/2)^p} \int\limits_0^{b/2} \frac{ds}{\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{n-1}} + \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+(b^2/4)}} \int\limits_{b/2}^b \frac{ds}{(b-s)^p},$$

d'où il résulte que cette intégrale est bornée, puisqu'elle tend vers zéro si $b \to \infty$.

Supposons maintenant que $|XP_X| < \zeta_0$; nous aurons alors, en posant $\zeta - \zeta_0 = ur$,

$$\int\limits_{\zeta_0}^{2R_K+a_x} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(\zeta-a_x)^2}\right)^{n-1}(\zeta-\zeta_0)^p} \tag{32}$$

$$= \frac{1}{r^{n+p-2}} \int\limits_0^{2R_K+a_x-\zeta_0} \frac{du}{\left[\sqrt{1+\left(u+(\zeta_0-a_x)/r\right)^2}\right]^{n-2} u^p}$$

$$< \frac{1}{r^{n+p-2}} \int\limits_0^\infty \frac{du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^{n-2} u^p}.$$

En rapprochant les résultats (29), (30), (31), (32), nous concluons que l'intégrale (28) vérifie une inégalité de la forme

$$\tilde{V}^{K'_x}_{x_\nu}(X, t) < \text{const}\, M_\varrho \int\limits_0^{2R_K} r^{-p} dr < CM_\varrho R_K^{1-p}, \tag{33}$$

où C est une constante positive, indépendante de X de R_K et de $\varrho(Y)$. Une limitation de la même forme reste vraie, si le point X coïncide avec un point P de la surface S (voir (26)).

Décomposons maintenant les intégrales $V_{x_\nu}(X)$ et $V_{x_\nu}(P)$ en sommes d'intégrales

$$V_{x_\nu}(X) = V^{K'_p}_{x_\nu}(X) + V^{\Omega-K'_p}_{x_\nu}(X), \quad V_{x_\nu}(P) = V^{K'_p}_{x_\nu}(P) + V^{\Omega-K'_p}_{x_\nu}(P)$$

étendues au domaine $K'_p = K_p \times \Omega$ et au domaine extérieur $\Omega - K'_p$. Nous aurons, en vertu des inégalités (33),

$$|V^{K'_p}_{x_\nu}(X)| < CM_\varrho R_K^{1-p}, \quad |V^{K'_p}_{x_\nu}(P)| < CM_\varrho R_K^{1-p}$$

donc, au nombre arbitraire positif ε on peut faire correspondre un rayon $R_K(\varepsilon)$ de la sphère K_P tel que

$$|V^{K'_p}_{x_\nu}(X)| < \varepsilon/3, \quad |V^{K'_p}_{x_\nu}(P)| < \varepsilon/3$$

pour tout point X dans le domaine K'_p. La sphère K_p étant fixée, observons que la fonction $V^{\Omega-K'_p}(X)$ est continue au voisinage du point P, extérieur au domaine d'intégration. Donc on peut encore faire correspondre au nombre ε un nombre positif $\eta(\varepsilon)$ tel que

$$|V^{\Omega-K'_p}_{x_\nu}(X)-V^{\Omega-K'_p}_{x_\nu}(P)| < \varepsilon/3 \quad \text{si} \quad |XP| < \eta(\varepsilon)\,.$$

En somme, nous aurons

$$|V_{x_\nu}(X)-V_{x_\nu}(P)| < \varepsilon$$

si $|XP| < \eta(\varepsilon)$, ce qui établit la conclusion (20). La seconde partie (21) de la conclusion résulte immédiatement des considérations précédentes.

THÉORÈME 6. *Si une fonction $\varrho(Y)$, définie et intégrable dans la région Ω, vérifie l'inégalité*

$$(34)\qquad |\varrho(Y)| < M_\varrho\cdot|YQ_Y|^{-p} \qquad (0 \leqslant p < 1)\,,$$

les fonctions limites des dérivées du potentiel de charge spatiale (22) *vérifient une condition de Hölder de la forme*

$$(35)\qquad |V_{x_\nu}(P)-V_{x_\nu}(P_1)| < \begin{cases} \text{const}\ M_\varrho|PP_1|^{1-p}\,, & \text{si}\quad p>0\,,\\ \text{const}\ M_\varrho|PP_1|^{\theta}\,, & \text{si}\quad p=0\end{cases}$$

sur la surface S limitant le domaine Ω, où θ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité.

Démonstration. En s'appuyant sur la formule donnant la solution fondamentale

$$\Gamma(X,Y) = w^Y(X,Y)+\iiint\limits_\Omega w^Z(X,Z)\Phi(Z,Y)\,dZ$$

(voir [1], p. 258), nous concluons que le potentiel (19) est la somme de deux quasi-potentiels

$$(36)\qquad V(X) = \overset{*}{V}(X)+\overset{**}{V}(X)\,,$$

$$(37)\qquad \overset{*}{V}(X) = \iiint\limits_\Omega w^Y(X,Y)\varrho(Y)\,dY\,,\qquad \overset{**}{V}(X) = \iiint\limits_\Omega w^Y(X,Y)\sigma(Y)\,dY\,,$$

$$(38)\qquad \sigma(Y) = \iiint\limits_\Omega \Phi(Y,Z)\varrho(Z)\,dZ\,,$$

Φ étant la solution d'une équation de Fredholm (voir [1]) admettant une limitation à faible singularité

$$(39)\qquad |\Phi(Y,Z)| < \frac{\text{const}}{|YZ|^{n-h}}\,.$$

Pour étudier le premier quasi-potentiel (37), prenons deux points arbitraires P et P_1 de la surface S; il suffit d'étudier le cas $|PP_1| < R/4$, où R est le rayon du cylindre W centré en P, considéré plus haut. Soit ensuite un cylindre Π, centré en P, d'axe normal en P à la surface S, de rayon $r_\Pi = 2|PP_1|$ et de l'hauteur $2r_\Pi$. Les dérivées de la fonction $\overset{*}{V}(X)$ ont les valeurs limites

$$(40)\qquad \overset{*}{V}_{x_\nu}(P) = \iiint\limits_\Omega w^Y_{x_\nu}(P,Y)\varrho(Y)\,dY$$

en tout point $P\in S$. Décomposons la différence

$$(41)\qquad J = \overset{*}{V}_{x_\nu}(P)-\overset{*}{V}_{x_\nu}(P_1) = \iiint\limits_\Omega [w^Y_{x_\nu}(P,Y)-w^Y_{x_\nu}(P_1,Y)]\varrho(Y)\,dY$$

en somme d'intégrales

$$(42)\qquad J = J^{\Pi'}+J^{W'-\Pi'}+J^{\Omega-W'}$$

étendues aux domaines Π', $W'-\Pi'$, $\Omega-W'$, où

$$\Pi' = \Pi\times\Omega\,,\qquad W' = W\times\Omega\,.$$

Pour l'intégrale étendue au domaine Π', on aura, en répétant le calcul qui a fourni l'inégalité (33), la limitation

$$(43)\qquad |J^{\Pi'}| < \text{const}\ M_\varrho|PP_1|^{1-p}\,.$$

Pour étudier l'intégrale étendue au domaine $W'-\Pi'$, nous utiliserons le théorème des accroissements et la limitation des dérivées secondes

$$(44)\qquad |w^Y_{x_\mu x_\nu}(P,Y)| < \frac{\text{const}}{|PY|^n}\,.$$

Nous avons alors

$$(45)\qquad |J^{W'-\Pi'}| < \text{const}\ M_\varrho|PP_1|\iiint\limits_{W'-\Pi'}\frac{dY}{|YP|^n|YQ_Y|^p}\,;$$

pour limiter cette intégrale, nous ferons un calcul analogue au précédent (26), mais un peu modifié. Nous aurons notamment

$$(46)\qquad |J^{W'-\Pi'}| < \text{const}\ M_\varrho|PP_1|\Bigg\{\int\limits_{r_\Pi}^{R} r^{n-2}dr\cdot\sup\Bigg[\int\limits_{\zeta_0(Y')}^{H}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^n(\zeta-\zeta_0)^p}\Bigg]+$$
$$+\int\limits_0^{r_\Pi} r^{n-2}\,dr\int\limits_{r_\Pi}^{H}\frac{d\zeta}{\big(\sqrt{r^2+\zeta^2}\big)^n\zeta^p}\Bigg\}$$
$$< \text{const}\ M_\varrho|PP_1|\Bigg\{\int\limits_{r_\Pi}^{R}\frac{dr}{r^{p+1}}\Bigg[\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^n s^p}+\int\limits_0^{\zeta_0^m(r)/r}\frac{ds}{\big(\sqrt{1+s^2}\big)^n s^p}\Bigg]+$$
$$+r_\Pi^{-p}\int\limits_0^{1}\varrho^{-1}d\varrho\Bigg[\int\limits_{1/\varrho}^{\infty}\frac{du}{\big(\sqrt{1+u^2}\big)^n u^p}\Bigg]\Bigg\}\,,$$

d'où

$$|J^{W'-\Pi'}| < \text{const}\, M_\varrho |PP_1|^{1-p} \tag{47}$$

si $p > 0$, et

$$|J^{W'-\Pi'}| < \text{const}\, M_\varrho |PP_1| \big[|\log|PP_1|| + \text{const}\big] \tag{47'}$$

si $p = 0$. Quant à la dernière intégrale dans la somme (42), on aura évidemment

$$|J^{\Omega-W'}| < \text{const}\, M_\varrho |PP_1|\,, \tag{48}$$

puisque la dérivée de la fonction $w_{x_\nu}^{Y}(P, Y)$ est bornée, si $P \in \Pi$, $Y \in \Omega - W'$. En rapprochant les résultats (43), (47), (47'), (48), on obtient l'inégalité de Hölder

$$|\overset{*}{V}_{x_\nu}(P) - \overset{*}{V}_{x_\nu}(P_1)| < \begin{cases} \text{const}\, M_\varrho |PP_1|^{1-p}\,, & \text{si} \quad p > 0\,, \\ \text{const}\, M_\varrho |PP_1|^{\theta}\,, & \text{si} \quad p = 0\,. \end{cases} \tag{49}$$

Pour établir la propriété analogue du second quasi-potentiel (37), étudions d'abord la densité $\sigma(Y)$, donnée par la formule (38). En vertu des inégalités (34) et (39), nous aurons pour la fonction $\sigma(X)$ la limitation suivante:

$$|\sigma(X)| < \text{const}\, M_\varrho \iiint_{\Omega} \frac{dY}{|XY|^{n-h} |YQ_Y|^p}\,. \tag{50}$$

Si $p < h$, la fonction (50) sera bornée et le second potentiel (37) vérifiera une condition de la forme

$$|\overset{**}{V}_{x_\nu}(P) - \overset{**}{V}_{x_\nu}(P_1)| < \text{const}\, M_\varrho |PP_1|^{\theta} \quad (0 < \theta < 1)\,. \tag{51}$$

Étudions donc le cas $p \geqslant h$, dans lequel la fonction (50) ne sera pas bornée, si $|XP_x| \to 0$. Pour obtenir sa limitation, il faudra utiliser une méthode différente de celle qui consiste à diviser le domaine en filets, puisque celle-ci ne réussit plus dans ce cas. Nous allons diviser notamment le domaine W en couches à l'aide des surfaces obtenues par les déplacements parallèles de la portion S_w de la surface S (située à l'intérieur de W) dans la direction de la normale en P_x. Soit S_W^{ζ} la surface obtenue par un déplacement parallèle de la surface S_W dans la direction de la normale intérieure en P_X d'un segment de longueur $|XP_X^{\zeta}| = \zeta \geqslant 0$; nous avons désigné par P_X^{ζ} le point où la normale en P_X coupe la surface S_W^{ζ}. De même que précédemment, on peut remplacer dans l'expression (50) la longueur $|YQ_Y|$ par la longueur $|YY_S| = \zeta$, Y étant situé sur S_W^{ζ}. Ensuite, en vertu de l'inégalité (16), on peut remplacer la distance $|XY|$ par la distance

$$|XY'_\zeta| = \sqrt{r^2 + (|XP_X| - \zeta)^2}$$

Y'_ζ étant la projection du point Y sur le plan tangent à la surface S_W^{ζ} en P_X^{ζ} et $r = |P_X^{\zeta} Y'_\zeta|$. Nous aurons donc pour l'intégrale

$$I(X) = \iiint_{W'} \frac{dY}{|XY|^{n-h} |YQ_Y|^p}$$

la limitation suivante:

$$I(X) < \text{const} \int_0^{\overline{H}} \frac{d\zeta}{\zeta^p} \int_0^{R} \frac{r^{n-2}\, dr}{\sqrt{r^2 + (|XP_X| - \zeta)^2}}\,, \tag{52}$$

$\overline{H} > H$ étant choisi de telle sorte que les surfaces S_W^{ζ}, pour $0 \leqslant \zeta \leqslant \overline{H}$, remplissent un domaine $\overline{W}'$ contenant le domaine $W' = W \times \Omega$. De l'inégalité (52), en posant

$$r = ||XP_X| - \zeta| \cdot s\,, \qquad \zeta = |XP_X| \cdot u\,,$$

on tire

$$I(X) < \frac{\text{const}}{|XP_X|^{p-h}} \Bigg[\int_0^1 \frac{du}{u^p (1-u)^{1-h}} + \int_1^{\overline{H}/|XP_X|} \frac{du}{u^p (u-1)^{1-h}} \Bigg] \int_0^{\infty} \frac{s^{n-2}\, ds}{(\sqrt{1+s^2})^{n-h}} \tag{53}$$

si $p > h$, et une limitation comparable à $\log|XP_X|$ si $p = h$. Il en résulte pour la fonction (38) la limitation suivante:

$$|\sigma(Y)| < \begin{cases} \text{const}\, M_\varrho\,, & \text{si} \quad p < h\,, \\ \text{const}\, M_\varrho \big[|\log|YQ_Y|| + \text{const}\big]\,, & \text{si} \quad p = h\,, \\ \dfrac{\text{const}\, M_\varrho}{|YQ_Y|^{p-h}}\,, & \text{si} \quad p > h\,. \end{cases} \tag{54}$$

Les limitations obtenues et l'inégalité (49), démontrée pour la fonction $\overset{*}{V}$, nous permettent de conclure immédiatement l'inégalité de Hölder pour la seconde des intégrales (37), d'où résulte la conclusion (35) du théorème 6.

Remarque. Le potentiel de charge spatiale (19) vérifie évidemment pour $X, X_1 \in \Omega + S$ une condition de Lipschitz

$$|V(X) - V(X_1)| < \text{const}\, M_\varrho \cdot |XX_1|\,, \tag{55}$$

puisque nous avons démontré que ses dérivées sont bornées dans le domaine Ω.

Les dérivées du potentiel de charge spatiale vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|V_{x_\nu}(X) - V_{x_\nu}(X_1)| < C^* M_\varrho |XX_1|^{\theta} \tag{56}$$

dans tout domaine fermé Ω^* contenu à l'intérieur du domaine Ω; C^* est une constante positive, dépendant du domaine Ω^* et θ est une constante positive arbitraire, inférieure à l'unité. On démontre la propriété (56) de même qu'on l'a fait dans le travail [1] pour le potentiel de densité bornée.

THÉORÈME 7. *Si la densité intégrable $\varrho(Y)$ de la charge vérifie l'inégalité* (34) *et en outre une condition de Hölder*

$$|\varrho(Y)-\varrho(Y_1)| < k^*|YY_1|^{h_\varrho}$$

dans un domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$, alors le potentiel de charge spatiale (19) *vérifie une équation généralisée de Poisson*

$$\hat{\Psi}[V(X)] = -\lambda_n(X)\varrho(X)$$

en tout point intérieur X du domaine Ω^*; $\lambda_n(X)$ est définie par la formule (9'').

La démonstration du théorème est analogue à celle qui a été donnée dans le travail [1] (page 265).

3. Résolution du problème. De même que dans le travail [1], nous allons chercher la solution $u(X)$ du problème sous forme d'une somme

$$u(X) = -\iiint_{\Omega} \frac{\Gamma(X,Y)}{\lambda_n(Y)} F\left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dY + \iint_S \Gamma(X,Q)\varphi(Q)\,dQ \tag{57}$$

d'un potentiel de charge spatiale et d'un potentiel de simple couche de densité inconnue φ, relatifs à l'équation $\Psi(u) = 0$. En demandant que la condition limite (6) soit vérifiée, on arrive à l'équation intégro-différentielle

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_p} + g(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)\,dQ \\
= -\iiint_{\Omega} \left[\frac{d\Gamma(P,Y)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,Y)\right] \frac{1}{\lambda_n(Y)} F\left[Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dY + \\
+ G(P, u(P)) + \iiint_{\Omega} H\left[P, Y, u(Y), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dY.
\end{aligned} \tag{58}$$

Le problème posé est ainsi ramené à la résolution d'un système de deux équations intégro-différentielles (57) et (58) à deux fonctions inconnues:

$u(X)$ dans le domaine Ω et $\varphi(P)$ sur la surface S. Pour étudier ce système, considérons le système suivant de $n+2$ équations intégrales

$$\begin{aligned}
u_0(X) &= -\iiint_{\Omega} \Gamma(X,Y)\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY + \\
&\quad + \iint_S \Gamma(X,Q)\varphi(Q)\,dQ, \\
u_\nu(X) &= -\iiint_{\Omega} \Gamma_{x_\nu}(X,Y)\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY + \\
&\quad + \iint_S \Gamma_{x_\nu}(X,Q)\varphi(Q)\,dQ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\
-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P) &+ \iint_S \left[\frac{d\Gamma(X,Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(X,Q)\right]\varphi(Q)\,dQ \\
&= -\iiint_{\Omega} \left[\frac{d\Gamma(P,Y)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P,Y)\right]\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \\
&\quad \ldots, u_n(Y)]\,dY + G(P, u_0(P)) + \\
&\quad + \iiint_{\Omega} H[P, Y, u_0(Y), u_1(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY.
\end{aligned} \tag{59}$$

Dans le cas envisagé, où l'on n'admet que la continuité de la fonction $\varphi(P)$ (ayant égard à l'hypothèse plus générale faite sur les fonctions g et G), les fonctions $u_\nu(X)$ peuvent être non bornées, en vertu du théorème 4. Il y a là une différence essentielle entre nos considérations actuelles et notre travail [1], où l'on avait admis que la fonction φ était hölderienne.

Pour démontrer l'existence d'une solution $[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ du système (59), considérons l'espace fonctionnel Λ, composé de tous les systèmes de fonctions continues réelles

$$[u_0(X), u_1(X), \ldots, u_n(X), \varphi(P)]$$

définies pour $X \in \Omega$, resp. pour $P \in S$, qui vérifient les inégalités suivantes:

$$\begin{gathered}
\sup|u_0(X)| < \infty, \\
\sup[|XP_X|^q |u_\nu(X)|] < \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\
|\varphi(P)| < \infty
\end{gathered} \tag{60}$$

q étant un nombre positif, inférieur à l'unité, arbitrairement fixé. On suppose de plus que les fonctions $u_0(X)$ sont continues dans $\Omega + S$. Nous admettons, comme d'habitude, les définitions suivantes des opérations linéaires

$$\begin{gathered}
[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] + [u_0', u_1', \ldots, u_n', \varphi'] = [u_0 + u_0', \ldots, u_n + u_n', \varphi + \varphi'], \\
\lambda[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] = [\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_n, \lambda\varphi].
\end{gathered} \tag{61}$$

Ensuite nous admettons la définition suivante de la norme d'un point $U=[u, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de l'espace Λ:

$$(62)\qquad \|U\| = \sup_{X\in\Omega}|u_0(X)| + \sup_{P\in S}|\varphi(P)| + \max_{\nu=1,\ldots,n}\sup_{X\in\Omega}\{|XP_X|^{q}|u_\nu(X)|\}$$

et celle de la distance des deux points U et U':

$$\delta(U, U') = \|U-U'\|.$$

Il en résulte, en vertu des hypothèses (12), (13) et (14), que l'espace Λ est linéaire, normé, métrique et complet, donc il est un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble $\mathcal{E}$ de tous les points $[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ vérifiant les inégalités suivantes

$$(63)\qquad \begin{gathered} |u_0(X)| \leqslant \varrho\,, \\ |XP_X|^{q}|u_\nu(X)| \leqslant \varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,, \\ |\varphi(P)| \leqslant \varrho'\,. \end{gathered}$$

ϱ et ϱ' sont des constantes positives, fixées arbitrairement. Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé et convexe. Transformons maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ à l'aide des relations

$$(64)\qquad \begin{aligned} v_0(X) &= -\iiint_\Omega \Gamma(X, Y)\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY + \\ &\qquad + \iint_S \Gamma(X, Q)\varphi(Q)\,dQ\,, \\ v_\nu(X) &= -\iint_S \Gamma_{x_\nu}(X, Y)\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY + \\ &\qquad + \iint_S \Gamma_{x_\nu}(X, Q)\varphi(Q)\,dQ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,, \\ -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)\psi(P) &+ \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right]\psi(Q)\,dQ \\ &= -\iiint_\Omega \left[\frac{d\Gamma(P, Y)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Y)\right]\lambda_n^{-1}(Y)F[Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY + \\ &\qquad + G\big(P, v_0(P)\big) + \iiint_\Omega H[P, Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]\,dY \\ &= \Xi(P, v_0, u_0, \ldots, u_n)\,. \end{aligned}$$

En remarquant que, d'après l'hypothèse (4) et des limitations (63), on a l'inégalité

$$(65)\qquad \begin{aligned} &|F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \ldots, u_n(Y)]| \\ &\qquad < m_F n |YP_Y|^{-rq}\varrho^r + (m_F\varrho^r + m'_F)|YQ_Y|^{-p}\,, \end{aligned}$$

nous concluons, en vertu des théorèmes 4 et 5: 1) que la fonction $v_0(X)$ dans les relations (64) est définie et continue dans la région $\Omega+S$ et vérifie une inégalité de la forme

$$(66)\qquad |v_0(X)| \leqslant C(m_F\varrho^r + \varrho' + m'_F)\,,$$

C étant une constante positive, indépendante de la fonction F et de φ; 2) que les fonctions $v_\nu(X)$ sont définies, continues à l'intérieur du domaine Ω et vérifient la limitation

$$(67)\qquad v_\nu(X) \leqslant C'(m_F\varrho^r + m'_F) + c_1\varrho'\big(|\log|XP_X|| + c_2\big) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

C' étant une constante positive, indépendante de la fonction F. Ensuite, en vertu de la limitation (voir [1])

$$(67')\qquad \left|\frac{d\Gamma(P, Q)}{dT_P} + g(P)\Gamma(P, Q)\right| < \frac{\text{const}}{|PQ|^{n-1-h_1}}\,,$$

de l'hypothèse relative au problème aux limites homogène $du/dT_p + g(P)u = 0$, de l'hypothèse (6') et de la limitation (voir l'hypothèse (6'''))

$$(67'')\qquad \begin{aligned} &|H[P, Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]| \\ &\qquad < m_H[1 + n|YQ_Y|^{-qr}]\varrho^r + m'_H|YQ_Y|^{-p}\,, \end{aligned}$$

on conclut, en vertu du théorème 5, qu'il existe une solution continue $\psi(P)$ de la dernière des équations (64), vérifiant l'inégalité

$$(68)\qquad |\psi(P)| \leqslant C''\{(m_F + m_H)\varrho^r + m'_F + m_G[\sup_\Omega|v_0|]^r + m'_G + m'_H\}\,,$$

C'' étant une constante positive, indépendante des fonctions F, G et H.

Il en résulte que les relations (64) feront correspondre à tout point $U=[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ un point déterminé $V=[v_0, v_1, \ldots$ $\ldots, v_n, \psi]$ du même ensemble, si les constantes du problème vérifient les inégalités

$$(69)\qquad \begin{gathered} C_*(m_F\varrho^r + m'_F + \varrho') \leqslant \varrho\,, \\ C''[(m_F + m_G + m_H)\varrho^r + m'_F + m'_G + m'_H] \leqslant \varrho'\,, \end{gathered}$$

où la constante C_* est le plus grand des trois nombres suivants: C et les bornes supérieures des deux fonctions

$$C'|XP_X|^p\,, \qquad c_1|XP_X|^p\big[|\log|XP_X|| + c_2\big]$$

dans le domaine Ω. En écrivant les inégalités (69) sous la forme équivalente

$$(70)\qquad C''[(m_F + m_G + m_H)\varrho^r + m'_F + m'_G + m'_H] \leqslant \varrho' \leqslant \frac{\varrho}{C_*} - m_F\varrho^r - m'_F\,,$$

et en remarquant que les constantes ϱ et ϱ' sont arbitraires et $r<1$, nous concluons que l'on peut toujours fixer ces constantes suffisamment grandes pour que les inégalités (70) soient vérifiées, quelles que soient les autres constantes du problème.

Nous démontrerons encore les deux lemmes suivants.

Lemme 1 *La transformation de l'ensemble $\mathcal{E}$ par les relations* (16) *est continue dans l'espace Λ.*

Démonstration. Soit une suite arbitraire de points $U^{(m)} = [u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}]$ de l'ensemble $\mathcal{E}$, convergente vers un point $U = [u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de cet ensemble au sens de la norme (62); nous avons donc

$$(71)\quad \lim_{m\to\infty}\|U^{(m)}-U\| = \lim_{m\to\infty}\Big\{\sup_{\Omega}|u_0^{(m)}-u_0| + \sup_{\Omega}\Big[|XP_X|^q\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu|\Big] + \sup_{S}|\varphi^{(m)}-\varphi|\Big\} = 0\,.$$

Considérons la suite des points $V^{(m)} = [v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, \ldots, v_n^{(m)}, \psi^{(m)}]$ transformés des points $U^{(m)}$ par les relations (64) et soit le point $V = [v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi]$ transformé du point limite U. Alors

$$(72)\quad \|V^{(m)}-V\| = \sup_{X\in\Omega}|v_0^{(m)}-v_0| + \sup_{P\in S}|\psi^{(m)}-\psi| + \max_{\nu=1,\ldots,n}\ \sup_{X\in\Omega}\{|XP_X|^q|v_\nu^{(m)}(X)-v_\nu(X)|\}\,.$$

Or, d'après l'hypothèse (4), on a

$$(72')\quad |F[Y, u_0(Y), u_1(Y), \ldots, u_n(Y)] - F[Y, u_0^{(m)}(Y), u_1^{(m)}(Y), \ldots, u_n^{(m)}(Y)]| < k_F\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu(Y)-u_\nu^{(m)}(Y)|^{h_F}\,.$$

Il en résulte, en vertu des relations (64),

$$(73)\quad |v_0^{(m)}(X)-v_0(X)| < \mathrm{const}\iiint_{\Omega}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu|^{h_F}}{|XY|^{n-2}}\,dY + \mathrm{const}\iint_{S}\frac{|\varphi^{(m)}-\varphi|}{|XY|^{n-2}}\,dY < \mathrm{const}\Big\{\sup_{\Omega}|u_0^{(m)}-u_0|^{h_F} + \sup_{S}|\varphi^{(m)}-\varphi| + \sup_{Y\in\Omega}\Big[|YQ_Y|^q\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu|\Big]^{h_F}\iiint_{\Omega}\frac{dY}{|XY|^{n-2}|YQ_Y|^{qh_F}}\Big\}\,.$$

Or, la dernière intégrale est bornée, d'après la démonstration du théorème 5, donc, en tenant compte de l'hypothèse (71), nous aurons

$$(74)\quad \lim_{m\to\infty}|v_0^{(m)}(X)-v_0(X)| = 0\,.$$

D'une façon analogue, en raison des relations (64), nous pouvons écrire l'inégalité

$$|v_\nu^{(m)}(X)-v_\nu(X)| < \mathrm{const}\iiint_{\Omega}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu|^{h_F}}{|XY|^{n-1}}\,dY + \mathrm{const}\iint_{S}\frac{|\varphi^{(m)}-\varphi|}{|XY|^{n-1}}\,dY \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

donc, en tenant compte du théorème 4, nous aurons

$$|XP_X|^q|v_\nu^{(m)}(X)-v_\nu(X)| < \mathrm{const}\Big\{|XP_X|^q\sup_{\Omega}|u_0^{(m)}-u_0|^{h_F} + \sup_{Y\in\Omega}\Big[|YQ_Y|^q\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu^{(m)}(Y)-u_\nu(Y)|\Big]^{h_F}|XP_X|^q\iiint_{\Omega}\frac{dY}{|XY|^{n-1}|YQ_Y|^{qh_F}} + \sup_{S}|\varphi^{(m)}-\varphi|\cdot|XP_X|^q\big[|\log|XP_X||+c\big]\Big\}\,,$$

d'où résulte

$$(75)\quad \lim_{m\to\infty}\sup_{\Omega}[|XP_X|^q|v_\nu^{(m)}(X)-v_\nu(X)|] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Il reste à étudier la différence $\psi^{(m)}-\psi$ qui, vérifie, en vertu des relations (64), l'équation intégrale

$$(76)\quad -\tfrac{1}{2}\lambda_n(P)[\psi^{(m)}(P)-\psi(P)] + \iint_{S}\Big[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}+g(P)\Gamma(P,Q)\Big][\psi^{(m)}(Q)-\psi(Q)]\,dQ = \Xi(P, v_0^{(m)}, u_0^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}) - \Xi(P, v_0, u_0, \ldots, u_n)\,.$$

Pour démontrer que le second membre de cette équation tend vers zéro, si $m\to\infty$, étudions d'abord la différence

$$(76')\quad \Delta_m = \iiint_{\Omega}\{H[P, Y, u_0^{(m)}(Y), \ldots, u_n^{(m)}(Y)] - H[P, Y, u_0(Y), \ldots, u_n(Y)]\}\,dY\,.$$

Dans ce but remarquons que, d'après l'inégalité (67''), à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une surface S_ε située à l'intérieur du domaine Ω, mais assez rapprochée de la surface S pour qu'on ait $|\Delta_m'| < \varepsilon$, où Δ_m' désigne la partie de l'intégrale (76') étendue au domaine (SS_ε) situe entre les surfaces S et S_ε.

Or, en vertu de l'hypothèse (71), les fonctions $u_\nu^{(m)}(Y)$ convergent uniformément, au sens habituel, vers les fonctions correspondantes $u_\nu(Y)$ dans le domaine intérieur $\Omega-(SS_\varepsilon)$. Donc, la surface S_ε étant fixée, nous pouvons encore faire correspondre au nombre ε un indice N_ε tel que l'on ait $|\Delta_m''| < \varepsilon$, si $m > N_\varepsilon$, où Δ_m'' désigne la partie de l'intégrale (76') étendue au domaine $\Omega-(SS_\varepsilon)$. Nous aurons, par conséquent,

$$(76'') \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_S |\Delta_m| = 0 .$$

On fera ensuite l'étude des différences des autres termes de la fonction Ξ, donnée par l'expression (64), de même qu'on l'a fait pour les différences $v_\nu^{(m)}-v_\nu$, et on conclut, en somme, que

$$(77) \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_S |\Xi(P, v_0^{(m)}, u_0^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)})-\Xi(P, v_0, u_0, \ldots, u_n)| = 0 .$$

Il en résulte, en vertu du premier théorème de Fredholm, qu'on aura

$$(78) \qquad \lim_{m\to\infty} \sup_S |\psi^{(m)}(P)-\psi(P)| = 0 .$$

En rapprochant les résultats (74), (75), (78), nous concluons la propriété suivante de la norme (72):

$$(79) \qquad \lim_{m\to\infty} \|V^{(m)}-V\| = 0 ,$$

qui établit le lemme 1.

LEMME 2. *L'ensemble $\mathcal{E}'$, transformé de l'ensemble $\mathcal{E}$ par les formules* (16), *est compact.*

Pour démontrer le lemme, il est nécessaire et il suffit de démontrer que d'une suite arbitraire $\{V^{(m)}\}$ de points $V^{(m)} = [v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, \ldots, v_n^{(m)}, \psi^{(m)}]$ de l'ensemble $\mathcal{E}'$ on peut extraire une suite partielle $\{V^{(k_m)}\}$ convergente au sens de la norme (62). Remarquons pour cela que, en vertu des inégalités (67), à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une surface S_ε située à l'intérieur du domaine Ω, mais rapprochée de la surface S, de façon que les fonctions $v_\nu^{(m)}(X)$ vérifient l'inégalité

$$(80) \qquad |XP_X|^q |v_\nu^{(m)}(X)| < \varepsilon/2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

quel que soit m, le point X étant situé dans le domaine (SS_ε) entre les surfaces S et S_ε. Observons ensuite que dans le domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega-(SS_\varepsilon)$, limité par la surface S_ε, les fonctions $v_\nu^{(m)}(X)$ sont bornées dans leur ensemble (voir (67)) et équicontinues, puisque, en vertu des inégalités (35), (55), (56), les intégrales (64) vérifient dans Ω_ε une condition de Hölder dont le coefficient est le même pour toutes les fonctions $v_\nu^{(m)}(X)$. Il en résulte, en vertu du théorème d'Arzelà, qu'il existe des suites partielles $\{v_\nu^{k_m}(X)\}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ uniformément convergentes dans Ω_ε, donc il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que

$$(81) \qquad |XP_X|^q |v_\nu^{k_m}(X)-v_\nu^{k_s}(X)| < \varepsilon$$

si $m, s > N(\varepsilon)$, pour tout point X à l'intérieur de Ω. Or, les fonctions $v_0^{(m)}(X)$ dans $\Omega+S$ et les fonctions $\psi^{(m)}(P)$ sur S sont évidemment bornées dans leur ensemble et équicontinues (voir les théorèmes 3 et 6 et les inégalités (60), (67''); il en résulte qu'il existe une suite partielle $\{V^{k_m}\}$ de la suite $\{V^{(m)}\}$ qui est convergente au sens de la norme (62). L'ensemble $\mathcal{E}'$ est donc compact.

Toutes les conditions du théorème de Schauder [2] étant satisfaites, nous en concluons qu'il existe dans $\mathcal{E}$ un point $U^* = [u_0^*(X), u_1^*(X), \ldots, u_n^*(X), \varphi^*(P)]$, invariant relativement à la transformation (16), donc il existe une solution du système d'équations intégrales (9).

En s'appuyant sur les propriétés des potentiels généralisés (voir [1]) relatifs à l'équation (1), nous concluons que

$$u_\nu^*(X) = \frac{\partial u_0^*(X)}{\partial x_\nu}$$

en tout point X à l'intérieur de Ω et que les fonctions $u_0^*(X)$, $\varphi^*(P)$ représentent une solution du système (7), (8). Or, d'après les inégalités (5), (56), la fonction $F[Y, u_0^*(Y), \ldots, u_n^*(Y)]$ vérifie une condition de Hölder dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω; par conséquent la fonction $u_0^*(X)$ vérifie l'équation différentielle (1) en tout point X à l'intérieur de Ω et la condition limite (6) en tout point $P \in S$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 8. *Si dans l'équation* (1) *les coefficients et la fonction donnée F vérifient les conditions* I, II, III, IV, *si les fonctions données $G(P, u)$ et $H(P, Y, u_0, \ldots, u_n)$ sont continues et vérifient les inégalités* (6'), (6'''), *enfin, si la fonction continue donnée $g(P)$ sur S est telle que le problème homogène $dv/dT_P + g(P)v = 0$ pour l'équation $\Psi(v) = 0$ n'admette qu'une solution nulle $v = 0$, alors il existe toujours dans Ω au moins une fonction $u(X)$ qui vérifie l'équation* (1) *en tout point intérieur $X \in \Omega$ et la condition limite* (6) *en tout point $P \in S$.*

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Ann. Pol. Math. 3 (1957), p. 247-284.

[2] J. Schauder, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

[3] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania II*, Warszawa 1958.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1960