COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

DISTRIBUTIONEN DER RÄUME D'_{L^p} ALS RANDVERTEILUNGEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN

VON

Z. ŁUSZCZKI UND Z. ZIELEŹNY (WROCŁAW)

Die vorliegenden Bemerkungen wurden angeregt durch eine Arbeit von H.-G. Tillmann [3] über die von G. Köthe in [1] definierten Randverteilungen analytischer Funktionen. Tillmann untersuchte u. a. Randverteilungen auf Kurven, die durch den unendlichfernen Punkt gehen. Es zeigte sich dabei, daß alle Distributionen mit kompakten Trägern Randverteilungen spezieller lokalanalytischer Funktionen sind.

Auf ähnliche Weise kann man Distributionen mit nicht unbedingt kompakten Trägern behandeln und die ihnen entsprechenden lokalanalytischen Funktionen charakterisieren. Im folgenden werden wir Distributionen der von L. Schwartz in [2] eingeführten Räume D'_{L^p} mit $1 < p < \infty$ in Betracht ziehen.

DIE RANDVERTEILUNGEN

Sei R die reelle Gerade in der geschlossenen Zahlenebene Ω und $\{R_k\}$ eine Folge abgeschlossener Mengen derart, daß $R_{k+1} \subset \operatorname{Int} R_k$ und $R = \bigcap_k R_k$. Der Raum aller im Inneren von R_k analytischen und auf dem Rande stetigen Funktionen, die im Punkt ∞ verschwinden, wird mit $\mathfrak{B}(R_k)$ bezeichnet. $\mathfrak{B}(R_k)$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|f\|_k = \sup_{z \in R_k} |f(z)|.$$

Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{A}(R)$ aller $\mathfrak{B}(R_k)$ ist ein linearer Raum, wenn Funktionen aus verschiedenen $\mathfrak{B}(R_k)$, die auf R übereinstimmen, identifiziert werden. Die lokalkonvexe Topologie τ_1 von $\mathfrak{A}(R)$ wird durch die Nullumgebungen

$$\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} = \Big\{f : f = \sum a_j f_j;\ \sum |a_j| < 1;\ \|f_j\|_j \leqslant \varepsilon_j\Big\} \tag{1}$$

definiert.

$\mathfrak{A}'(R)$ ist der zu $\mathfrak{A}(R)$ stark duale Raum. Die Elemente von $\mathfrak{A}'(R)$ werden als *Randverteilungen auf* R der in $\Omega-R$ lokalanalytischen Funktionen bezeichnet. Nach [3] entspricht nämlich jedem u aus $\mathfrak{A}'(R)$ eine in $\Omega-R$ lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\zeta)$ — die Indikatrix von u — und die Zuordnung ist ein topologischer Isomorphismus, falls im Raum der lokalanalytischen Funktionen die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\Omega-R$ eingeführt ist (siehe [3], S. 70). Es gilt

$$\tilde{u}(\zeta) = u\left[\frac{1}{\zeta - z}\right];$$

u ist die *Randverteilung auf* R *der Funktion* $\tilde{u}(\zeta)$.

DIE RÄUME D'_{L^p}

Mit D_{L^p} $(1<p<\infty)$ wird der lineare Raum derjenigen auf R erklärten unendlichoft differenzierbaren Funktionen bezeichnet, deren alle Ableitungen zu $L^p(R)$ gehören. Die Topologie τ_2 von D_{L^p} is definiert durch das System der Nullumgebungen

$$V(n,\varepsilon) = \{f\colon \|f^{(m)}\|_{L^p} \leqslant \varepsilon \text{ für } m \leqslant n\}. \tag{2}$$

Der Raum der Distributionen D'_{L^p} ist zu D_{L^q} mit $q=p/(p-1)$ stark duale. Nach L. Schwartz (vgl. [2], S. 57, théorème XXV) lassen sich die Distributionen aus D'_{L^p} folgendermaßen charakterisieren:

Eine Distribution gehört dann und nur dann zu D'_{L^p}, *wenn sie eine Summe endlichvieler Ableitungen von Funktionen aus* L^p *ist.*

Jede Funktion aus $\mathfrak{A}(R)$ ist in einer Umgebung von R analytisch und verschwindet im unendlichfernen Punkt. Folglich gehören alle Funktionen aus $\mathfrak{A}(R)$ zu D_{L^p}. Wir beweisen

SATZ 1. *Die Topologie* τ_1 *ist feiner als die durch* τ_2 *in* $\mathfrak{A}(R)$ *induzierte Topologie.*

Beweis. Sei $V(\varepsilon, n)$ eine beliebige τ_2-Umgebung in $\mathfrak{A}(R)$. Wir haben zu beweisen, daß es eine τ_1-Umgebung gibt, die in $V(\varepsilon, n)$ enthalten ist.

Ist $\{R_k\}$ eine Folge abgeschlossener Umgebungen von R mit den oben erwähnten Eigenschaften, so bezeichnen wir mit $2\delta_k$ den Abstand zwischen R und CR_k und mit S_k die Menge aller Punkte, deren Abstand von CR_k nicht kleiner als δ_k ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\delta_k \leqslant 1$ vorausgesetzt werden. Dann folgt aus $|f(z)| < \varepsilon_k$ für $z \in R_k$, wegen der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung,

$$|f^{(m)}(z)| \leqslant \varepsilon_k \delta_k^{-n} n! \quad \text{für} \quad m \leqslant n \text{ und } z \in S_k. \tag{3}$$

CS_k ist beschränkt. Es gibt also einen Kreis K_k um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ_k, der CS_k enthält. Wir werden zeigen, daß

$$|f(z)| < \eta_k \quad \text{für} \quad z \in S_k \tag{4}$$

die L^p-Normabschätzung auf R

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \eta_k \left(\frac{4p\varrho_k}{p-1}\right)^{1/p} \tag{5}$$

nach sich zieht.

In der Tat ist $f(z)$ für $|z| > \varrho_k$ analytisch und verschwindet im unendlichfernen Punkt. Die Laurententwicklung

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \quad \text{mit} \quad |a_n| < \eta_k \varrho_k^n$$

liefert für $z > 2\varrho_k$

$$|f(z)| \leqslant \frac{2\eta_k \varrho_k}{|z|}. \tag{6}$$

Gemäß (4) und (6) gilt nun

$$|f(x)| \leqslant \begin{cases} \eta_k & \text{für} \quad |x| \leqslant 2\varrho_k, \\ \dfrac{2\eta_k\varrho_k}{|x|} & \text{für} \quad |x| > 2\varrho_k. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx = \int_{-\infty}^{-2\varrho_k} + \int_{-2\varrho_k}^{+2\varrho_k} + \int_{2\varrho_k}^{\infty} \leqslant \eta_k^p \frac{4p\varrho_k}{p-1}$$

und folglich (5).

Wegen (3) ist also

$$\|f^{(m)}\|_{L^p} \leqslant \varepsilon_k \delta_k^{-n} n! \left(\frac{4p\varrho_k}{p-1}\right)^{1/p} \quad \text{für} \quad m \leqslant n. \tag{7}$$

Wählt man jetzt

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon\delta_k^n}{n!}\left(\frac{p-1}{4p\varrho_k}\right)^{1/p},$$

so erhält man

$$\|f^{(m)}\|_{L^p} \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad m \leqslant n$$

und dies bedeutet, daß $\mathfrak{A}_{\{\varepsilon_k\}} \subset V(\varepsilon, n)$.

SATZ 2. *$\mathfrak{A}(R)$ ist in D_{L^p} dicht bezüglich der Topologie τ_2.*

Beweis. Sei eine Funktion $f \in D_{L^p}$ und eine τ_2-Umgebung $V(\varepsilon, m)$ vorgegeben. Wir dürfen annehmen, daß $f(x)$ außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet.

Zunächst soll f durch Funktionen der Gestalt

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{1+x^2} s_n\left(\frac{a}{\pi}x\right) \tag{8}$$

mit

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{9}$$

im Sinn von τ_2 angenähert werden.

Es sei

$$M_k = \sup_{-\infty<x<\infty} |[(1+x^2)f(x)]^{(k)}|$$

und

$$M = \max_{0\leqslant k\leqslant m} M_k.$$

Wir wählen a so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{Träger } f \subset [-a, a], \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(k)} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für} \quad |x| > a \text{ und } k = 0, 1, \ldots, m, \tag{11}$$

$$a > \frac{2^{(m+4)}M}{\varepsilon}. \tag{12}$$

In $[-a, a]$ ist $(1+x^2)f(x)$ in eine Fourierreihe entwickelbar, die mit allen Ableitungen gleichmäßig konvergiert. Zu jedem $\mu > 0$ existiert also ein $s_p(x)$ derart, daß

$$\left| s_p^{(k)}\left(\frac{a}{\pi}x\right) - [(1+x^2)f(x)]^{(k)} \right| \leqslant \mu$$

für $k = 0, 1, \ldots, m$. Hieraus folgt

$$|\sigma_p^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \leqslant C\mu,$$

worin C eine von μ unabhängige Konstante ist.

Für genügend kleines μ gilt also

$$\left(\int_{-a}^{a} |\sigma_p^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

und wegen (10)-(12)

$$\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty} |\sigma_p^{(k)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

so daß

$$\sigma_p - f \in V\left(\frac{\varepsilon}{2}, m\right). \tag{13}$$

Nun sei $0 < \lambda < 1$. Wir setzen

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\sigma_p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{14}$$

wobei der Integrationsweg l_n aus zwei zur reellen Axe parallelen Strecken besteht und zwar von $-n-i\lambda$ bis $n-i\lambda$ und von $n+i\lambda$ bis $-n+i\lambda$.

Die Funktionen $a_n(z)$ gehören offenbar zu $\mathfrak{A}(R)$ und konvergieren mit $n \to \infty$ im Sinn von τ_2 gegen $\sigma_p(z)$. Es gibt also ein solches n_1, daß $a_n - \sigma_p \in V(\varepsilon/2, m)$ für alle $n > n_1$. Wegen (13) erhält man alsdann $a_n - f \in V(\varepsilon, m)$ für $n > n_1$.

Aus Satz 1 folgt, daß jede Distribution $T \in D'_{L^p}$ eine Randverteilung u definiert und auf Grund von Satz 2 ist T durch u vollstandig bestimmt. Wir haben also die

FOLGERUNG. *Jede Distribution aus D'_{L^p} ist eine Randverteilung auf R.*

Wir wollen jetzt diejenigen lokalanalytischen Funktionen charakterisieren, die Distributionen aus D'_{L^p} als Randverteilungen haben.

SATZ 3. *Eine in $\Omega - R$ lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\zeta)$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ hat als Randverteilung eine Distribution $u \in D'_{L^p}$ dann und nur dann, wenn für jedes festgesetzte $\eta \neq 0$ die Funktion $\tilde{u}(\xi + i\eta)$ der Veränderlichen ξ zu $L^p(R)$ gehört und die Norm $\|\tilde{u}(\xi+i\eta)\|_{L^p}$ mit $\eta \to 0$ langsam wachsend ist, d. h. es gibt ein M und eine natürliche Zahl m, so daß*

$$\|\tilde{u}(\xi + i\eta)\|_{L^p} \leqslant \frac{M}{|\eta|^k} \quad \text{mit} \quad k = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad |\eta| > 1, \\ m & \text{falls} \quad |\eta| \leqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Beweis. a) Die Indikatrix $f(\zeta + i\eta)$ einer Funktion $f \in L^p$ gehört bei beliebigem festen $\eta \neq 0$ zu L^p und die Norm $\|\tilde{f}(\xi + i\eta)\|_{L^p}$ ist beschränkt (vgl. [4], S. 133-138).

Ist $u = f^{(n)}$, $n \geqslant 1$ und $f \in L^p$, so gilt

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(\zeta - t)^{n+1}} dt.$$

Bei festem $\eta \neq 0$ gehört also $\tilde{u}(\xi+i\eta)$ als Funktion von ξ auch zu L^p und die Anwendung der Hölderschen Ungleichung liefert

$$\|\tilde{u}(\xi+i\eta)\|_{L^p} \leqslant \frac{n!}{|\eta|^n}\|f\|_{L^p}. \tag{17}$$

Nun läßt sich aber jede Distribution aus D'_{L^p} als Summe endlichvieler Ableitungen von Funktionen aus L^p darstellen. Aus dieser Tatsache erhält man, wegen (17) und der Bemerkung am Anfang des Beweises, die Ungleichung (16).

b) Es sei jetzt $\tilde{u}(\zeta)$ eine Indikatrix, die den Bedingungen des Satzes genügt und $\varphi(x)$ eine auf R definierte unendlichoft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Die Faltung

$$\psi(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\zeta-t)\varphi(t)\,dt$$

ist in $\Omega-R$ lokalanalytisch und genügt auch den Forderungen des Satzes. Außerdem gilt

$$\frac{\partial^n\psi(\zeta)}{\partial\eta^n} = (i)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(\zeta-t)\varphi^{(n)}(t)\,dt. \tag{18}$$

Unter Anwendung von (16) und der Hölderschen Ungleichung erhält man hieraus

$$\left\|\frac{\partial^n\psi(\xi+i\eta)}{\partial\eta^n}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{M_n}{|\eta|^k} \quad \text{mit} \quad k = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad |\eta| > 1, \\ m & \text{falls} \quad |\eta| \leqslant 1 \end{cases} \tag{19}$$

$(n = 0, 1, \ldots)$, wo M_n Konstante sind.

Für $0 < \eta < 1$ ist aber

$$\left\|\int_\eta^1 \frac{\partial^n\psi(\xi+i\nu)}{\partial\nu^n}\,d\nu\right\|_{L^p} \leqslant \int_\eta^1 \left\|\frac{\partial^n\psi(\xi+i\nu)}{\partial\nu^n}\right\|_{L^p} d\nu. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt also

$$\left\|\int_\eta^1 \frac{\partial^n\psi(\xi+i\nu)}{\partial\nu^n}\,d\nu\right\|_{L^p} \leqslant \int_\eta^1 \frac{M_n}{\nu^m}\,d\nu.$$

Dies liefert

$$\left\|\frac{\partial^n\psi(\xi+i\eta)}{\partial\eta^n}\right\|_{L^p} \leqslant \begin{cases} M_n/\eta^{m-1}+N_n, & \text{wenn} \quad m > 1, \\ -M_n\ln\eta+N_n, & \text{wenn} \quad m = 1 \end{cases}$$

mit

$$N_n = \left\|\frac{d^n\psi(\xi+i)}{d\xi^n}\right\|_{L^p}.$$

Nach m-maliger Wiederholung obiger Schlußweise erhalten wir schließlich für $0 < \eta < 1$

$$\left\|\frac{\partial^n\psi(\xi+i\eta)}{\partial\xi^n}\right\|_{L^p} = \left\|\frac{\partial^n\psi(\xi+i\eta)}{\partial\eta^n}\right\|_{L^p} \leqslant K_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{21}$$

wo die K_n Konstanten bezeichnen. Wegen (19) gilt (21) für alle $\eta > 0$.

Einem Satz von Titchmarsh zufolge (siehe [4], S. 139, Theorem 103) zieht die Beschränktheit der Normen (21) für $\eta > 0$ die Konvergenz

$$\psi(\xi+i\eta) \to \psi^+(\xi) \quad \text{mit} \quad \eta \to 0+$$

im Sinn von τ_2 nach sich.

Da nun $\varphi(x)$ eine beliebige unendlichoft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger war, folgt hieraus (siehe [2], S. 57-58), daß

$$\tilde{u}(\xi+i\eta) \to u^+(\xi) \quad \text{mit} \quad \eta \to 0+$$

in D'_{L^p}.

Analog zeigt man, daß

$$\tilde{u}(\xi+i\eta) \to u^-(\xi) \quad \text{mit} \quad \eta \to 0-$$

in D'_{L^p}.

Für jedes $h > 0$ hat nun die Indikatrix

$$\tilde{u}_h(\zeta) = \begin{cases} \tilde{u}(\zeta+ih), & \text{wenn} \quad \eta > 0, \\ \tilde{u}(\zeta-ih), & \text{wenn} \quad \eta < 0 \end{cases}$$

bei Annäherung an den Rand R Grenzwerte $u_h^-(\xi)$ und $u_h^+(\xi)$, die zu D_{L^p} gehören. Die entsprechende Randverteilung $u_h = u_h^- + u_h^+$ gehört also auch zu D_{L^p} und konvergiert mit $h \to 0$ in D'_{L^p} gegen u. Damit ist gezeigt, daß $u \in D'_{L^p}$.

ZITATENNACHWEIS

[1] G. Köthe, *Randverteilungen analytischer Funktionen*, Mathematische Zeitschrift 57 (1952-53), S. 13-33.

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions II*, Paris 1951.

[3] H.-G. Tillmann, *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen*, Mathematische Zeitschrift 59 (1953-54), S. 61-83.

[4] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford 1948.

Reçu par la Rédaction le 24. 12. 1959