It is easy to see that F is continuous on R. Further, on account of Lemma 1, it is VBG on $(0,1)-\sum_{w\epsilon W}(c_w, d_w]$ and therefore also VBG on R. In the case of S being VBG_*, it is necessary to use an additional argument to show that F is VBG_* on $(0,1)-\sum_{w\epsilon W}[c_w, d_w]$, since F is evidently VBG_* on $(-\infty, 0]+\sum_{w\epsilon W}[c_w, d_w]+[1, +\infty)$. But this follows at once from the definition of function VBG_*, in view of $O(F;[a,b]) = O\big(S;[\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)]\big)$, where a and b belong to $(0,1)-\sum_{w\epsilon W}[c_w, d_w]$ and $a<b$. Further, F fulfils the condition (N) on R. This follows from the second part of the condition (3). Now, on account of Theorem (6.8) of [3], p. 228 ([3], Theorem (8.8), p. 233), we easily deduce that F is ACG (ACG_*) on R. In view of the definition of F, we have $F'(x) = f_{W,H}(x)$ almost everywhere on R. In this way, since $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ and $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ exist and are finite, we have shown that $f_{W,H}$ is D-integrable (D_*-integrable) on R. Further, let us observe that the condition (4) is also satisfied. If S_1 and S_2 satisfy conditions (1), (2), (3), then the respective functions F_1 and F_2 are ACG on R and have the derivatives equal almost everywhere on R. Therefore, on account of Theorem (6.2) of [3], p. 225, it easily follows that F_1 and F_2 differ by a constant. The same clearly holds for S_1 and S_2. This completes the proof.

Remark. Let us observe that in Theorem 2 and in Theorem 3 the condition (3) may be replaced by the conditions:

(3′) *S is VBG (VBG_*) on R and fulfils the condition* (N),

(3″) $S'_{ap}(t) = 0$ ($S'(x) = 0$) *almost everywhere on* R.

This easily follows from Lemma 2.

REFERENCES

[1] A. Denjoy, *Totalisation des séries*, Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris, 209 (1939), p. 825-828.

[2] — *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Quatrième partie, Fasc. I, Paris 1949.

[3] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwów 1937.

[4] E. J. McShane, *Integration*, Princeton 1947.

Reçu par la Rédaction le 6. 6. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

PROBLÈMES ET REMARQUES SUR LES CARRÉS DE CONVOLUTION

PAR

J.-P. KAHANE (MONTPELLIER)

Toutes les fonctions dont il s'agit dans la suite sont 2π-périodiques et sommables sur $[0, 2\pi]$. Le carré de convolution de f est

$$f*f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)f(s)\,ds.$$

Ainsi, si $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, on a $f*f\sim\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^2 e^{int}$.

S. Hartman a posé le problème suivant (un énoncé restreint a paru dans [1], voir aussi remarque [2] de C. Ryll-Nardzewski):

Problème 1. *Etant donné une classe de fonctions (par exemple L^p, C, $\mathrm{Lip}\,\alpha$, ...) déterminer s'il est vrai ou non que toute fonction de la classe soit le carré de convolution d'au moins une fonction sommable.*

Comme éléments de réponse, on a

1a) *C'est vrai pour* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 1/2$.

1b) *C'est faux pour* L^2.

En effet, 1a) est une conséquence immédiate d'un théorème de S. Bernstein selon lequel toute fonction de la classe $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 1/2$, admet une série de Fourier absolument convergente ([4], p. 240). Et 1b) résulte d'un théorème de Banach sur les séries lacunaires ([4], p. 203): si $f\sim\sum_1^\infty a_k e^{in_kt}$ avec $n_{k+1}/n_k \geqslant 2$, on a $\sum_1^\infty |a_k|^2 < \infty$, c'est-à-dire que $f*f$ admet une série de Fourier absolument convergente; donc il est faux que toute $g\sim\sum_1^\infty b_k e^{in_kt}$ avec $\sum_1^\infty |b_k|^2<\infty$ puisse s'écrire $f*f$.

On peut poser un problème un peu plus général.

Problème 2. *Etant donné deux classes de fonctions X et Y, déterminer s'il est vrai ou non que toute fonction de la classe X soit le carré de convolution d'au moins une fonction de la classe Y.*

Un cas classique est $Y = L^2$; en effet, dire qu'une fonction est le carré de convolution d'une $f \epsilon L^2$, c'est dire que sa série de Fourier est absolument convergente. Le théorème de S. Bernstein susmentionné s'exprime sous forme d'une réponse au problème 2:

2a) *Vrai si* $X = \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 1/2$, *et* $Y = L^2$;

2b) *faux si* $X = \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha \leqslant 1/2$, *et* $Y = L^2$.

Nous allons améliorer 2a), en montrant que toute fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $> 1/2$ est le carré de convolution d'une fonction continue. Plus précisément, on a les réponses suivantes au problème 2:

2c) *Vrai si* $X = \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 1/2$, *et* $Y = \mathrm{Lip}\,\gamma$, $\gamma < \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2})$;

2d) *faux si* $X = \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 1/2$, *et* $Y = \mathrm{Lip}\,\gamma$, $\gamma > \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2})$.

Les démonstrations reposent sur les deux lemmes suivants:

LEMME 1 ([4], p. 241). *Si* $\varphi \epsilon \mathrm{Lip}\,\xi$ $(0 < \xi < 1)$ *et* $\varphi \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, *alors*

$$\sum_{2^j \leqslant |n| < 2^{j+1}} |a_n|^2 = O(2^{-2\xi j}) \text{ quand } j \to \infty.$$

LEMME 2 ([3], p. 14). *Si* $\sum_{2^j \leqslant n < 2^{j+1}} |b_n|^2 = O\left(\frac{1}{j} 2^{-2\eta j}\right)$ *quand* $j \to \infty$ $(0 < \eta < 1)$, *alors la série* $\sum_{-\infty}^{\infty} \pm b_n e^{int}$, *où les* $\pm$ *sont choisis au hasard indépendamment les uns des autres, représente presque sûrement une fonction* $\psi \epsilon \mathrm{Lip}\,\eta$.

Démonstration de 2c). Soit $g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}$, $g \epsilon \mathrm{Lip}\,\alpha$. D'après le lemme 1 et l'inégalité de Schwarz,

$$\sum_{2^j \leqslant n < 2^{j+1}} |\gamma_n| = O(2^{j(\frac{1}{2} - \alpha)}) \qquad (j \to \infty).$$

Choisissons pour c_n une détermination arbitraire de $\sqrt{\gamma_n}$. D'après le lemme 2, il existe des fonctions $f \sim \sum \pm c_n e^{int}$ appartenant à $\mathrm{Lip}\,\gamma$ quand $\gamma < \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2})$. Donc on peut écrire $g = f * f$ avec $f \epsilon \mathrm{Lip}\,\gamma$.

Démonstration de 2d). Choisissons β tel que $\alpha < \beta$ et $\gamma > \frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{2})$. D'après le lemme 2, il existe des fonctions

$$g \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{\pm e^{int}}{n^{\beta + 1/2}}$$

qui appartiennent à $\mathrm{Lip}\,\alpha$. D'après le lemme 1, aucune fonction $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ telle que $|c_n|^2 = 1/n^{\beta + 1/2}$ n'appartient à $\mathrm{Lip}\,\gamma$. Donc on ne peut pas écrire $g = f * f$ avec $f \epsilon \mathrm{Lip}\,\gamma$.

On vérifie aisément que 2c) et 2d) sont valables pour des classes $\mathrm{Lip}\,\alpha$ avec $\alpha > 1$, moyennant la convention ordinaire:

$$f \epsilon \mathrm{Lip}\,\alpha \leftrightarrow f' \epsilon \mathrm{Lip}\,(\alpha - 1).$$

Il est facile de raffiner les énoncés 2c) et 2d). Mais nous ne savons pas conclure si l'on prend $X = \mathrm{Lip}\,\alpha$ et $Y = \mathrm{Lip}\,\gamma$, avec $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2})$.

Une autre variante du problème de S. Hartman est la suivante:

PROBLÈME 3 (**P 338**). *Indiquer des conditions nécessaires, et des conditions suffisantes, portant sur la suite* $\{c_n\}$ $(-\infty < n < \infty)$, *pour qu'il existe au moins un choix des* $\pm$ *tel que* $\sum_{-\infty}^{\infty} \pm c_n e^{int}$ *soit une série de Fourier-Lebesgue.*

Si, au lieu de s'intéresser aux changements de signes des coefficients, on s'intéresse aux changements de phases, il correspond au problème 3 une question très naturelle:

PROBLÈME 4 (**P 339**). *Indiquer des conditions nécessaires, et des conditions suffisantes, portant sur la suite* $\{r_n\}$ $(r_n \geqslant 0,\ 0 \leqslant n < \infty)$ *pour qu'il existe au moins un choix des phases* φ_n *tel que* $\sum_{0}^{\infty} r_n \cos(nt + \varphi_n)$ *soit une série de Fourier-Lebesgue.*

Nous ne connaissons que des réponses triviales aux problèmes 3 et 4.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Hartman, **P 282**, Colloquium Mathematicum 7 (1959), p. 108.

[2] **P 282**, **R 1**, ibidem 7 (1960), p. 308.

[3] J. -P. Kahane, *Sur les propriétés locales de certaines séries de Fourier aléatoires*, Studia Mathematica 19 (1960), p. 1-25.

[4] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge 1958 (tome I).

Reçu par la Rédaction le 31. 7. 1960