4. Espaces complets de II genre. On a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Quel que soit l'espace compact Z de dimension $n \geqslant 0$, l'espace $\mathcal{N}\times Z$ est complet de II genre.*

Démonstration. On a $\dim \mathcal{N}\times Z = \dim Z = n$, car $\dim \mathcal{N} = 0$. Soit h_c: $\mathcal{N}\times Z \to \overline{\mathcal{N}\times Z}$ une compactification de $\mathcal{N}\times Z$. Considérons la projection $p(\xi, z) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{N}$ et $z \in Z$, d'où p: $\mathcal{N}\times Z \to \mathcal{N}$ et $p(\mathcal{N}\times Z) = \mathcal{N}$, et la fonction continue $f = ph_c^{-1}$, d'où f: $h_c(\mathcal{N}\times Z) \to \mathcal{N}$ et $fh_c(\mathcal{N}\times Z) = \mathcal{N}$.

Il en résulte que pour tout $\xi \in \mathcal{N}$ on a

$$f^{-1}(\xi) = (ph_c^{-1})^{-1}(\xi) = h_c p^{-1}(\xi) = h_c[(\xi)\times Z],$$

d'où $\dim f^{-1}(\xi) = \dim Z = n$ et $f^{-1}(\xi)$ est compact. En posant $X = \overline{\mathcal{N}\times Z}$, $A = h_c(\mathcal{N}\times Z)$ et $Y = \mathcal{N}$, on a donc $n \leqslant \dim[\overline{\mathcal{N}\times Z} - h_c(\mathcal{N}\times Z)]$ en vertu du théorème 2 et, par conséquent, l'espace complet $\mathcal{N}\times Z$ n'est pas de I genre en vertu du théorème 1.

COROLLAIRE. *Tout G_δ de la forme $\mathcal{N}\times \mathcal{P}^n$ où $n > 0$ est de II genre.*

L'existence des espaces métrisables séparables et complets de II genre et de toute dimension finie étant ainsi établie, les questions suivantes s'imposent:

P 312. Existe-t-il un espace métrisable séparable et complet de II genre qui soit de dimension infinie?

P 313. Existe-t-il, pour tout espace X métrisable séparable complet de II genre et de dimension positive finie, un espace compact Z de dimension positive, tel que le produit cartésien $\mathcal{N}\times Z$ ait une image homéomorphe dans X?

TRAVAUX CITÉS

[1] B. Knaster, *Un théorème sur la compactification*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 252-267.

[2] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[3] — *Topologie II*, Warszawa 1952.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KURATOWSKI SUR LA CARACTÉRISATION MÉTRIQUE DE LA RÉTRACTION

PAR

W. NITKA (WROCŁAW)

Soient M un espace métrique, ϱ la distance dans M et $R \subset M$. Pour tout point $x \in M$, soit $\varrho(x, R) = \inf_{y\in R} \varrho(x, y)$ la distance entre x et R.

Appelons *convexité de R relative à ϱ* au sens de de Groot [2] la propriété métrique suivante de R:

(G) $x \in R$, $y \in R$, $z \in M$ et $\varrho(x, z) + \varrho(z, y) = \varrho(x, y)$ entraînent $z \in R$.

R est dit un *rétracte* de M (notion due à Borsuk [1]) lorsqu'il existe une fonction continue r: $M \to R$ (dite *rétraction*) telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in R$.

Considérons encore la propriété métrique suivante d'un $R \subset M$ relative à ϱ:

(K) il existe une fonction r: $M \to R$ faisant correspondre à tout point $x \in M$ un point $r(x) \in R$ tel que $\varrho(x, R) = \varrho(x, r(x))$.

Kuratowski [4] a démontré que

(1) si M est compact, R fermé et R possède la propriété (K) relativement à ϱ, la fonction r dont il y est question est continue (R est donc un rétracte de M);

(2) réciproquement, si R est un rétracte de M, il existe dans M une métrique ϱ^* topologiquement équivalente à ϱ (c'est-à-dire que toute suite de points de M qui est convergente dans ϱ l'est dans ϱ^* et réciproquement) et telle que R possède la propriété (K) relativement à ϱ^*.

Il suffit d'ailleurs dans (1) de ne supposer que la compacité de R.

Convenons de dire qu'une métrique est conforme à la topologie d'un espace dans lequel elle est définie lorsque la convergence d'une suite quelconque de ses points, d'après sa topologie, vers l'un de ses points équivaut à celle vers le même point d'après la métrique en question.

On a la généralisation suivante de (2):

THÉORÈME. *M étant un espace topologique métrisable, soit R un rétracte de M, muni d'une métrique ϱ_R conforme à sa topologie dans M. Il existe alors un prolongement ϱ^* de ϱ_R étant une métrique dans M tout entier, conforme à la topologie de M et telle que R a relativement à ϱ^* les deux propriétés* (G) *et* (K).

Démonstration. On peut se borner au cas de R composé de plus d'un point, le théorème étant trivialement vrai dans le cas contraire. Soit r la rétraction de M à R. Cet ensemble est donc fermé en tant qu'image continue de l'espace tout entier. On peut par conséquent (voir [3], I) prolonger la métrique partielle ϱ_R à une métrique ϱ_1 de l'espace M tout entier. En posant pour tous les x et y de M

$$\varphi(x, y) = \min[\varrho_1(x, y), \varrho_1(x, R) + \varrho_1(y, R)],$$
$$\varrho_2(x, y) = \{[\varrho_1(x, y)]^2 + \varphi(x, y)\}^{1/2},$$

ϱ_2 est aussi un prolongement de ϱ_R à M tout entier (voir [5], Remark 2), mais qui a en outre la propriété suivante:

(i) on n'a l'égalité $\varrho_2(x, z) + \varrho_2(z, y) = \varrho_2(x, y)$ pour x, y et z de M, deux à deux distincts, que s'ils sont tous les trois des points de R.

Définissons maintenant ϱ^* par la formule

$$\text{(ii)} \qquad \varrho^*(x, y) = \tfrac{1}{2}\{\varrho_2(x, y) + \varrho_2[r(x), r(y)]\}.$$

Le premier sommande entre accolades étant une métrique et le second une pseudométrique, ϱ^* est une métrique. Elle est conforme à la topologie de M grâce à la continuité de r.

Pour montrer que l'image $r(x)$ de la rétraction d'un point arbitraire x de M est le seul point le plus proche de x dans R, on peut se borner évidemment aux points $x \in M - R$, car on a $r(x) = x$ pour tout $x \in R$ d'après la définition de la rétraction. Or $r[r(x)] = r(x)$ entraîne

$$\text{(iii)} \qquad \varrho^*(x, r(x)) = \tfrac{1}{2}\varrho_2(x, r(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in M.$$

On a donc pour $x \in M - R$ et $r(x) \neq r(z) = z \in R$

$$\begin{aligned} \varrho^*(x, y) &= \tfrac{1}{2}\{\varrho_2(x, z) + \varrho_2[r(x), r(z)]\} \\ &= \tfrac{1}{2}[\varrho_2(x, z) + \varrho_2(r(x), z)] \\ &> \tfrac{1}{2}\varrho_2(x, r(x)) = \varrho^*(x, r(x)), \end{aligned}$$

où le premier signe d'égalité résulte de (ii), le second de $r(z) = z$ et le dernier de (iii), tandis que le signe d'inégalité est une conséquence de la propriété (i) de ϱ_2, les points x, $r(x)$ et z étant deux à deux différents par définition. Il est ainsi établi que R a la propriété (K) relative à ϱ^*.

Reste à montrer qu'il en est de même de la propriété (G). On a en effet pour $x \in R$, $y \in R$ et $z \in M - R$

$$\varrho^*(x, y) < \tfrac{1}{2}\{\varrho_2(x, z) + \varrho_2(z, y) + \varrho_2[r(x), r(y)]\}$$

trivialement pour $x = y$ et en vertu de (ii) et (i) pour $x \neq y$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varrho^*(x, y) &< \tfrac{1}{2}\{\varrho_2(x, z) + \varrho_2(z, y) + \varrho_2[r(x), r(z)] + \varrho_2[r(z), r(y)]\} \\ &= \varrho^*(x, z) + \varrho^*(z, y). \end{aligned}$$

La convexité de R relative à ϱ^* au sens de de Groot est ainsi établie, ce qui achève la démonstration.

TRAVAUX CITÉS

[1] K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 152-170.

[2] J. de Groot, *Some special metrics in general topology*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 283-286.

[3] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 353-360.

[4] C. Kuratowski, *Une condition métrique pour la rétraction des ensembles*, Comptes rendus de la Société des Sciences de Varsovie 28 (1935), p. 156-158.

[5] W. Nitka, *Remarks on sets convex in the sense of J. de Groot*, Indagationes Mathematicae 21 (1959), p. 36-38.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1959