in the simplex $0 \leqslant t_1, \ldots, 0 \leqslant t_n$, $c_1t_1+\ldots+c_nt_n \leqslant T$ $(c_i > 0,\ T > 0)$, *then there exist positive numbers* θ' *and* θ'' *such that* $\theta'+\theta'' \geqslant 1$ *and* $F = 0$ *in* $0 \leqslant t_1, \ldots, 0 \leqslant t_n$, $c_1t_1+\ldots+c_nt_n \leqslant T$, *and* $G = 0$ *in* $0 \leqslant t_1, \ldots, 0 \leqslant t_n$, $c_1t_1+\ldots+c_nt_n \leqslant \theta''T$.

We can suppose that $F = 0$ and $G = 0$ outside the region of integration and take then (20) instead of (21). By Theorem VIIIb there exists a real number u such that $F = 0$ in $c_1t_1+\ldots+c_nt_n \leqslant T-u = \theta'$ and $G = 0$ $c_1t_1+\ldots+c_nt_n \leqslant T+u = \theta''T$. Evidently $\theta'+\theta'' = 1$. If one of numbers θ' or θ'' is > 1, we can replace the second one by 0. Otherwise both numbers θ' and θ'' are non-negative.

As a particular case of Theorem VIIIc we obtain the well known Titchmarsh theorem on convolution [5], on admitting that F and G are complex valued functions and that $n = 1$.

11. Denote generally by C_F the smallest convex set outside of which F vanishes, and such that $(t_1, \ldots, t_n) \in C_F$ implies $(u_1, \ldots, u_n) \in C_F$ as $u_i \geqslant t_i$. Thus, if t is a real number sufficiently large, C_F contains the region $t_1 \geqslant t, \ldots, t_n \geqslant t$. If $F \in \mathfrak{B}$, then C_F is also contained in such a region with properly chosen t.

The set C_F can be equivalently defined as follows. Let H_F^c, where $c = (c_1, \ldots, c_n)$ $(c_i > 0)$, denote the greatest half-space in which $F = 0$. Then C_F is the complement of $\bigcup\limits_c H_F^c$.

By vector sum C_F+C_G of two sets C_F and C_G we understand the set of points $(u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$ such that the points $(u_1, \ldots, u_n)$ and $(v_1, \ldots, v_n)$ belong to C_F and C_G respectively.

THEOREM VIIId. $C_{F*G} = C_F+C_G$.

In fact, $H_{F*G}^c = H_F^c+H_G^c$ (vector sum), by Theorem VIIIb. This implies $\bigcup\limits_c H_{F*G}^c = \bigcup\limits_c H_F^c+\bigcup\limits_c H_G^c$, and on taking corresponding complements $C_{F*G} = C_F+C_G$.

References

[1] J. L. Lions, *Supports de produit de composition*, C. R. 232, (1951), p. 1622-1624.

[2] J. Mikusiński, *Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution*, Bull. Ac. Pol. Sci. 7.12 (1959), p. 715-717.

[3] — *Le calcul opérationnel de l'intervalle fini*, Studia Math. 15 (1956), p. 225-251.

[4] J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables*, *ibidem* 13 (1953), p. 62-68.

[5] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proceedings Lond. Math. Soc. 25 (1926), p. 283-302.

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1960

STUDIA MATHEMATICA, T. XX. (1961)

Über Niveaulinien fastperiodischer Funktionen

von

S. HARTMAN (Wrocław)

1. Die hier vorkommenden Begriffe und Hauptsätze aus der Theorie der fastperiodischen (fp.) Funktionen können z. B. in [1] gefunden werden.

Es sei $f(t)$ eine reelle B-fp. Funktion, d. h. eine fp. Funktion im Sinne von Besicovitch. Wird $c_a(y) = 1$ oder 0 gesetzt, je nachdem $y < a$ oder $y \geqslant a$ ist, so ist bekanntlich [7] die (monotone) Funktion

$$F_f(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} c_a\big(f(t)\big)\,dt$$

für jedes reelle a mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge A wohlbestimmt und stetig. Der Integrand $c_a\big(f(t)\big)$ für $a \notin A$ heiße *a-Niveaulinie* von f. Man weiß, daß die Niveaulinien der B-fp. Funktionen wieder B-fp. Funktionen sind ([7], S. 399). Setzt man über f mehr voraus, so kann man auch über c_a mehr behaupten; ist z. B. f ein trigonometrisches Polynom, so ist c_a eine S-fp. Funktion (d. h. fastperiodisch im Sinne von Stepanoff), und zwar für jedes a ([6], S. 210-211). Will man systematisch untersuchen, wie die Eigenschaften von f diejenigen von c_a beeinflussen, so führe man zweckmäßig den folgenden, von C. Ryll-Nardzewski stammenden Begriff ein:

Definition. Eine für alle t erklärte nach Lebesgue meßbare Funktion $f(t)$ heißt *R-fastperiodisch* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Bohrsche fp. Funktionen φ und ψ gibt, so daß

$$\varphi(t) \leqslant f(t) \leqslant \psi(t) \text{ überall,} \tag{1}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\psi(t)-\varphi(t)]\,dt < \varepsilon.$$

2. Bevor wir das Problem der Niveaulinien wieder aufnehmen, wollen wir die Eigenschaften der R-fp. Funktionen näher betrachten.

Ersichtlich bilden sie einen Ring. Jede R-fp. Funktion ist offenbar eine B-fp. Funktion. Überdies gilt aber der

Satz 1. *Eine R-fp. Funktion $f(t)$ ist W^p-fp. für jedes $p \geqslant 1$.*

Beweis. Unter einer zu $\varepsilon > 0$ gehörenden S_l^p-Verschiebungszahl der Funktion f verstehen wir ein reelles τ, für welches

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t+\tau)-f(t)|^p dt < \varepsilon$$

gilt. Demnach beruht die Definitionseigenschaft der W^p-fp. Funktionen darauf, daß sie für jedes $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes $l > 0$ eine relativ dichte Menge von S_l^p-Verschiebungszahlen haben. Man beachte, daß eine zu ε gehörende $S_{l_0}^p$-Verschiebungszahl zu gleicher Zeit eine S_l^p-Verschiebungszahl für alle hinreichend großen l ist.

Zuerst zeigen wir jetzt, daß f eine W-fp. Funktion ist (d. h. fastperiodisch im Sinne von Weyl, m. a. W. W^p-fp. für $p = 1$). Es seien φ und ψ Bohrsche fp. Funktionen, die für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen (1) erfüllen. Ist τ eine ε-Verschiebungszahl von φ, so hat man für jedes l und x

$$\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(t+\tau)-f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{l}\int_x^{x+l} |\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|\,dt +$$

$$+\frac{1}{l}\int_x^{x+l} [f(t+\tau)-\varphi(t+\tau)]\,dt + \frac{1}{l}\int_x^{x+l} [f(t)-\varphi(t)]\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\int_x^{x+l} |\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|\,dt + 2\sup_x \frac{1}{l}\int_x^{x+l} [\psi(t)-\varphi(t)]\,dt.$$

Da der Mittelwert der (Bohrschen) Funktion $\psi-\varphi$ *gleichmäßig* in x durch

$$\frac{1}{l}\int_x^{x+l} [\psi(t)-\varphi(t)]\,dt$$

bei $l \to \infty$ approximiert wird, so ist wegen (1) für ein hinreichend großes l das letzte Glied kleiner als 2ε. Da das vorletzte die Zahl ε nicht übersteigt, so ist τ eine zu 3ε gehörende S_l^1-Verschiebungszahl von f. Die Wahl von l hängt nur von ε ab, es stellt sich also heraus, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes l die Funktion f eine relativ dichte Menge von S_l^1-Verschiebungszahlen hat. Die restliche Behauptung von Satz 1 folgt aus dem Satz von Bohr und Følner, wonach jede beschränkte

$W-(S-, B-)$ fp. Funktion auch $W^p-(S^p-, B^p-)$ fp. bei jedem $p \geqslant 1$ ist ([2], S. 62).

Gelegentlich wollen wir bemerken, daß der letztgenannte Satz eine Verallgemeinerung zuläßt, die in bezug auf B-fp. Funktionen bereits von Kovanko in [5] bewiesen wurde und für $W-(S-)$ fp. Funktionen wie folgt lautet, wenn χ die charakteristische Funktion der mit E bezeichneten Menge bedeutet:

Satz 2. *Ist f eine $W-(S-)$ fp. Funktion und ist für ein $p > 1$, jedes $\varepsilon > 0$ und jede meßbare Menge E ein $\delta > 0$ derart zu finden, daß*

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l}\int_x^{x+l} \chi(t)\,dt < \delta \quad \textit{bzw.} \quad \sup_x \int_x^{x+1} \chi(t)\,dt < \delta$$

die Ungleichung

$$\lim_{l\to\infty} \sup_x \frac{1}{l}\int_x^{x+l} \chi(t)\,|f(t)|^p dt < \varepsilon$$

bzw.

$$\sup_x \int_x^{x+1} \chi(t)\,|f(t)|^p dt < \varepsilon$$

nach sich zieht, so ist f $W^p-(S^p-)$ fastperiodisch.

Wie man weiß, ist die Umkehrung dieses Satzes ebenfalls richtig.

Den Beweis erbringen wir nur für W-fp. Funktionen. Für die S-fp. Funktionen ist die Überlegung analog.

Es sei f eine W-fp. Funktion und $\varepsilon > 1$ positiv, beliebig. Erfüllt nun $\delta < 1$ die Voraussetzung, so wähle man $l_0 > 1$ so, daß die für alle $l > l_0$ zu $\varepsilon\delta$ gehörenden S_l^1-Verschiebungszahlen von f auf der reellen Achse relativ dicht liegen. Ist τ eine dieser Zahlen, so setze man

$$E = \{t\colon |f(t+\tau)-f(t)| > 1\}.$$

Für $l > l_0$ ist dann offenbar

$$\sup_x \frac{1}{l}\int_x^{x+l} \chi(t)\,dt < \varepsilon\delta < \delta.$$

Außerhalb E gilt $|f(t+\tau)-f(t)|^p \leqslant |f(t+\tau)-f(t)|$, man hat daher für jedes x

$$\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(t+\tau)-f(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{l}\int_x^{x+l} \big(1-\chi(t)\big)\,|f(t+\tau)-f(t)|^p dt +$$

$$+\frac{1}{l}\left\{\left[\int_x^{x+l} |f(t+\tau)|^p \chi(t)\,dt\right]^{1/p} + \left[\int_x^{x+l} |f(t)|^p \chi(t)\,dt\right]^{1/p}\right\}^p.$$

Da das erste Glied rechts kleiner als ε und beide Glieder in den geschweiften Klammern für ein hinreichend großes $l = l_1 > l_0$ kleiner als $(\varepsilon l_1)^{1/p}$ sind, so gilt

$$\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} |f(t+\tau)-f(t)|^p\,dt < 2^p\varepsilon+\varepsilon$$

und τ ist somit eine zu $\varepsilon(2^p+1)$ gehörende Verschiebungszahl der Funktion f, die sich folglich als W^p-fp. erweist.

Zwei Funktionen φ und ψ sollen *B-äquivalent* heißen, wenn

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)-\psi(t)|\,dt = 0$$

gilt. Es sei jetzt $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ eine abzählbare additive Gruppe reeller Zahlen und K das entsprechende Bohrsche Kompaktum, d. h. die kompakte Gruppe, in welche die reelle Achse D vermöge eines stetigen Isomorphismus γ derart eingebettet werden kann, daß jede stetige Funktion auf K die Erweiterung einer Bohrschen fp. Funktion auf D ist, deren Fourierexponenten zu Λ gehören, und alle solchen Bohrschen Funktionen sich zu stetigen Funktionen auf K erweitern lassen. K ist eine Untergruppe des $\aleph_0$-dimensionalen Torusses und indem wir jeden Punkt $x\in K$ durch eine Koordinatenfolge $x_1, x_2, \ldots$ $(|x_n| = 1)$ ausdrücken, können wir $\gamma(t) = \{e^{i\lambda_j t}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ setzen. K ist dann die abgeschlossene Hülle von $\gamma(D)$. Bekanntlich kann man den auf K nach dem invarianten Maße μ integrierbaren Funktionen B-fp. Funktionen auf D mit Exponenten aus Λ so zuordnen, daß die entsprechenden Fourierreihen durch die Korrespondenz $x_j \sim e^{i\lambda_j t}(\lambda_j\in\Lambda)$ ineinander übergehen. Um diese Korrespondenz eineindeutig zu machen, muß man einzelnen Klassen von μ-äquivalenten Funktionen auf K (d. h. bis auf eine μ-Nullmenge einander gleichen; abg. μ-Klassen) ganze Klassen B-äquivalenter Funktionen auf D (abg. B-Klassen) gegenüberstellen. Die so erklärte Korrespondenz zwischen den μ-Klassen und B-Klassen, die wir auch manchmal weniger präzis als Korrespondenz zwischen Funktionen auffassen werden, bildet den Raum der B-fp. Funktionen mit Exponenten aus Λ und mit der B-Norm

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f|\,dt$$

auf den Raum $L(K)$ der nach μ integrierbaren Funktionen linear und isometrisch ab. Sie sei *γ-Korrespondenz* genannt und demgemäß sollen

Funktionen oder Funktionenklassen, die zueinander in dieser Relation stehen, *γ-korrespondierend* heißen. Man hat nun den

Satz 3. *Damit eine B-Klasse eine R-fp. Funktion enthält, ist notwendig und hinreichend, daß die γ-korrespondierende μ-Klasse eine nach Riemann integrierbare (d. h. eine beschränkte und μ-fast überall stetige) Funktion enthalte.*

Dieser Satz stammt von C. Ryll-Nardzewski. Des Verfassers ursprüngliche Aussage war weniger scharf.

Beweis. Es sei $f(t)$ eine R-fp. Funktion und φ_n und ψ_n seien Bohrsche Funktionen derart, daß

$$\varphi_n(t) \leqslant f(t) \leqslant \psi_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [\psi_n(t)-\varphi_n(t)]\,dt = 0.$$

Indem die Funktion $f(t)$ auf D erklärt ist, ist sie vermöge der Abbildung γ auf $\gamma(D)$ erklärt: $f(x) = f(\gamma^{-1}(x))$. Mit den Funktionen $\varphi_n(t)$ und $\psi_n(t)$ sind stetige Funktionen $\varphi_n(x)$ bzw. $\psi_n(x)$ auf K (die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen) γ-korrespondierend. Man hat daher

$$\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x) \qquad (x\in\gamma(D)), \tag{2}$$

$$\lim_n \int_K [\psi_n(x)-\varphi_n(x)]\,\mu(dx) = 0. \tag{3}$$

Indem wir nötigenfalls $\varphi_n(x)$ durch $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi_i(x)$ und $\psi_n(x)$ analog ersetzen, dürfen wir annehmen, daß φ_n und ψ_n monotone Folgen bilden. Da $f(x)$ auf der in K dichten Menge $\gamma(D)$ beschränkt ist, φ_n und ψ_n aber stetig sind, so ist die Folge $\{\varphi_n\}$ nach oben und $\{\psi_n\}$ nach unten beschränkt. Ihre Grenzfunktionen φ und ψ sind bis auf eine μ-Nullmenge einander gleich und jede stellt den gemeinsamen Limes der beiden Folgen im Raum $L(K)$ dar. Mithin sind sie beide mit der Funktion $f(t)$ γ-korrespondierend. Wir haben nach (2) etwa $\varphi_n(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi_n(x)$ $(x\in K)$, dann zeigt aber (3), daß φ auf K R-integrierbar ist, und so folgt die erste Hälfte des Satzes.

Ist nun $f(x)$ auf K R-integrierbar, so setze man $\psi(x) = \sup f(x)$ (d. h. $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{x-\delta<\xi<x<\delta} f(\xi)$). Dann gilt

$$\psi(x) = f(x) \quad \mu\text{-fast überall.} \tag{4}$$

Überdies ist ψ und folglich die von ψ auf $\gamma(D)$ induzierte Teilfunktion halbstetig nach oben. Deshalb ist $\psi(t) = \psi(\gamma^{-1}(x))$ halbstetig und umsomehr meßbar (auf D). Es gibt eine abnehmende Folge stetiger Funktionen $\psi_n(x)$ $(x \in K)$ derart, daß $\lim_n \psi_n(x) = \psi(x)$ gilt. Setzt man noch $\varphi(x) = \inf f(x)$, so gibt es eine wachsende Folge stetiger Funktionen $\varphi_n(x)$ derart, daß $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi(x)$ gilt und man hat

$$\varphi_n(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \psi_n(x) \qquad (x \in K),$$

$$\int_K [\psi_n(x) - \varphi_n(x)]\,\mu(dx) \underset{n}{\to} 0.$$

Für die vermöge γ^{-1} induzierten Bohrschen Funktionen $\varphi_n(t)$, $\psi_n(t)$ und $\psi(t)$ ergibt sich daraus

$$\varphi_n(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \psi_n(t),$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\psi_n(t) - \varphi_n(t)]\,dt \underset{n}{\to} 0.$$

Daher ist $\psi(t)$ eine R-fp. Funktion, die der Funktion $\psi(x)$, und wegen (4) auch der Funktion $f(x)$ im Sinne der γ-Korrespondenz entspricht. Dies schließt den Beweis.

Bemerkung. Weiß man zusätzlich von der Funktion $f(x)$, daß sie eine *L-meßbare* Funktion $f(t)$ auf der reellen Achse induziert, so ist $f(t)$ selbst R-fp. und dabei stehen $f(t)$ und $f(x)$ in γ-Korrespondenz zueinander.

Offenbar ist der Limes einer auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig konvergenten Folge von R-fp. Funktionen wieder eine R-fp. Funktion. Weniger einleuchtend ist aber der folgende

Satz 4. *Sind die Funktionen φ_n mit gewissen R-fp. Funktionen B-äquivalent und konvergiert die Folge $\{\varphi_n\}$ gleichmäßig auf der reellen Achse, so ist die Grenzfunktion φ ebenfalls mit einer R-fp. Funktion B-äquivalent.*

Dem Beweis schicken wir ein Lemma voraus:

Lemma 1. *Steht eine reelle B-fp. Funktion f in γ-Korrespondenz zu $f^* \in L(K)$, so besteht die γ-Korrespondenz auch zwischen den Niveaulinien $c_a(f^*(x))$ und $c_a(f(t))$, und die relative Verteilungsfunktion $F_f(a)$ ist für $a \notin A$ gleich der μ-Verteilungsfunktion von f, d. h. gleich $\mu\{x \in K : f^*(x) < a\}$.*

Das folgt für die Bohrschen Funktionen daraus, daß $f^*(x)$ stetig und mithin $c_a(f^*(x))$ nach Riemann integrierbar ist, sobald $\mu\{x : f^*(x) = a\} = 0$ gilt, also bis auf abzählbar viele a-Werte. Die Niveaulinie $c_a(f^*(x))$ induziert auf der Achse D die Funktion $c_a(f(t))$ (d. h. die a-Niveaulinie von f). Daher stehen nach der Bemerkung zu Satz 3 die Funktionen $c_a(f^*(x))$ und $c_a(f(t))$ in γ-Korrespondenz zueinander. Daraus folgt schon die Gleichheit ihrer Mittelwerte, d. h. der in Frage stehenden Verteilungsfunktionen, in den (gemeinsamen) Stetigkeitspunkten.

Um die γ-Korrespondenz von Niveaulinien und daher die Gleichheit von Verteilungsfunktionen auf alle B-Funktionen auszudehnen, muß man ins Auge fassen, daß 1° für B-fp. Funktionen aus $f_n \to f$ (im Sinne der B-Norm) $c_a(f_n) \to c_a(f)$ (nach derselben Norm) folgt und 2° für μ-integrierbare Funktionen die gleiche Implikation in $L(K)$ stattfindet, sobald a Stetigkeitspunkt der jeweiligen Grenzverteilungsfunktion ist. Den einfachen Beweis hierfür übergehen wir. Nun genügt es für eine gegebene B-fp. Funktion $f(t)$ eine nach f im Sinne der B-Norm strebende Folge trigonometrischer Polynome f_n zu finden und sich auf die Erhaltung der γ-Korrespondenz bei B-bzw. L-Grenzübergang zu berufen. Der in 1 zitierte Satz von Lewitan gewährleistet, daß alle Funktionen $c_a(f_n)$ tatsächlich B-fp. Funktionen sind.

Jetzt beweisen wir Satz 4 sehr rasch. Nach Satz 3 gibt es auf K erklärte R-integrierbare Funktionen $\varphi_n^*(x)$, die mit $\varphi_n(t)$ γ-korrespondierend sind. Die Folge $\{\varphi_n^*\}$ ist nach Weglassung einer μ-Nullmenge gleichmäßig konvergent. In der Tat: es sei $A_{n,m}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$ die höchstens abzählbare A-Menge für die B-Funktion $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|$. Dann folgt wegen Lemma 1 für jedes positive $\varepsilon \notin \bigcup_{n,m} A_{n,m}$ aus der Ungleichung $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon$ $(t \notin D)$ die Gleichheit

$$\mu\{x \in K : |\varphi_n^*(x) - \varphi_m^*(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

die demgemäß für alle $n, m > N(\varepsilon)$ besteht. Ist B_ε die über alle Zahlenpaare $n, m > N(\varepsilon)$ genommene Vereinigung der hier vorkommenden Mengen, so ist $\mu B_\varepsilon = 0$. Verläuft nun ε eine Nullfolge ε_j ohne die Menge $\bigcup_{n,m} A_{n,m}$ zu treffen, so hat man $\mu \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{\varepsilon_j} = 0$, außerhalb $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{\varepsilon_j}$ ist aber die Folge $\varphi_n^*(x)$ gleichmäßig konvergent.

Nun hat man sich zu vergegenwärtigen, daß der Limes f einer bis auf eine Nullmenge gleichmäßig konvergenten Folge von R-integrierbaren Funktionen $f_n(x)$ $(x \in K)$ fast überall einer R-integrierbaren Funktion gleich ist. Demnach ist $\varphi^* = \lim_n \varphi_n^*$ mit einer R-integrierbaren Funktion μ-äquivalent. Andererseits ist $\varphi^*(x)$ mit der Funktion $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$ γ-korrespondierend und so muß φ (wieder nach Satz 3) mit einer R-fp. Funktion B-äquivalent sein.

Wir bemerken noch, daß Satz 4 in Kraft bleibt, wenn man in der Voraussetzung und in der Behauptung von Bohrschen Funktionen anstatt von R-fp. Funktionen redet. Der Beweis ist analog.

3. Nun können wir den (teilwese bekannten) Satz über Niveaulinien formulieren und beweisen:

Satz 5. *Ist f eine B-fp. Funktion mit Exponenten aus Λ und hat man $p \geqslant 1$, so ist für jedes $a \notin A$ die Niveaulinie c_a eine B^p-fp. Funktion mit*

Exponenten aus Λ. Ist f eine W-fp. Funktion, so ist c_a eine W^p-fp. Funktion. Ist f eine R-fp. Funktion, so ist c_a ebenfalls eine R-fp. Funktion. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so ist c_a eine R-und S^p-fp. Funktion.

In Anbetracht der Resultate von Wecken (s. 1.), sowie von Bohr und Følner (s. den Beweis von Satz 1), muß man zum ersten Teil der Behauptung nur noch zeigen, daß die Exponenten von c_a zu Λ gehören. Dazu machen wir von Lemma 1 noch einmal Gebrauch.

Die Funktionen $c_a(f^*(x))$ gehören zu $L(K)$, sie lassen sich also in eine Fourierreihe nach den Charakteren von K, d. h. nach den Potenzprodukten $x_1^{a_1}\ldots x_j^{a_j}$ der Koordinaten entwickeln. Deshalb treten in der Fourierreihe der γ-korrespondierenden Funktionen $c_a(f(t))$ nur Glieder von der Form $a_\nu \exp\big(i(a_1\lambda_1+\ldots+a_j\lambda_j)t\big)$ auf. Der gewünschte Schluß folgt jetzt aus der Gruppeneigenschaft von Λ.

Den dritten Teil der Behauptung haben wir für die fp. Funktionen von Bohr bereits implizit erhalten, da im Beweise von Lemma 1 die γ-Korrespondenz von Niveaulinien $c_a(f(t))$ und $c_a(f^*(t))$ für eine Bohrsche Funktion f aus der Bemerkung zu Satz 3 gefolgert wurde, die zugleich den Schluß gestattet, daß $c_a(f(t))$ eine R-fp. Funktion ist, sobald $c_a(f^*(x))$ nach Riemann integrierbar ist. Das letztere trifft für $a \notin A$ eben zu. Daß die Niveaulinien einer beliebigen (nicht notwendig Bohrschen) R-fp. Funktion wieder R-fp. Funktionen sind, schließt man jetzt mühelos an Hand der Definitionseigenschaft der R-Fastperiodizität.

Berücksichtigt man das und die Beschränktheit von c_a, so reduziert sich der vierte Teil der Behauptung auf den in 1. zitierten und bereits benutzten Satz von Lewitan.

Es bleibt noch den zweiten Teil herzuleiten. Die Hauptsache dabei ist das folgende Lemma für eine W-Funktion $f(t)$ zu beweisen:

Lemma 2. *Bedeutet $|\ |$ das Lebesguesche Maß und ist a ein Stetigkeitspunkt der Verteilungsfunktion F_f, so strebt nicht nur der Ausdruck*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\,|\{t\colon a-\varepsilon\leqslant f(t)<a+\varepsilon\}\frown(0,T)|$$

mit ε nach Null, sondern überdies gilt es

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{T}\,|\{t\colon a-\varepsilon\leqslant f(t)<a+\varepsilon\}\frown(x,x+T)|=0.$$

Unter Vorwegnahme dieses Lemmas überlegen wir weiter folgendermaßen: Ist $a\notin A$ und $\delta>0$ beliebig, so seien ε und l_0 so gewählt, daß für $l>l_0$

$$\sup_x\frac{1}{l}\,|\{t\colon a-\varepsilon\leqslant f(t)<a+\varepsilon\}\frown(x,x+l)|<\frac{\delta}{4}\tag{5}$$

gelte. Das ist nach Lemma 2 möglich. Nun sei $l>l_0$ so fixiert, daß die zu $\varepsilon\delta/4$ gehörenden S_l^1-Verschiebungszahlen von f relativ dicht auf der Achse liegen. Ist τ eine dieser Zahlen, so hat man

$$\frac{1}{l}\sup_x\int_x^{x+l}|f(t+\tau)-f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon\delta}{4}.\tag{6}$$

Wir sollen den Ausdruck

$$\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\big|c_a(f(t+\tau))-c_a(f(t))\big|\,dt$$

abschätzen. Er ist gleich

$$\frac{1}{l}\,|\{t\colon a\leqslant f(t+\tau),f(t)<a\}\frown(x,x+l)|+$$
$$+\frac{1}{l}\,|\{t\colon f(t+\tau)<a,\ a\leqslant f(t)\}\frown(x,x+l)|.$$

Hier sind beide Glieder kleiner als $\frac{1}{2}\delta$. Wir zeigen es z. B. für das erste Glied. Dazu benutzen wir die Inklusion

$$\{t\colon a\leqslant f(t+\tau),f(t)<a\}\subset\{t\colon a\leqslant f(t+\tau),f(t)<a-\varepsilon\}\cup\cup\{t\colon a-\varepsilon\leqslant f(t)<a\}.\tag{7}$$

Aus (6) folgt nun die Ungleichung

$$\sup_x\frac{1}{l}\,|\{t\colon f(t+\tau)\geqslant a,\ f(t)<a-\varepsilon\}\frown(x,x+l)|<\frac{\delta}{4},$$

die zusammen mit (5) die gewünschte Abschätzung ergibt. Mithin hat sich τ als eine zu δ gehörende S_l^1-Verschiebungszahl der Funktion $c_a(f(t))$ erwiesen. Da $\delta>0$ beliebig, l immer verfügbar und die Zahlen τ relativ dicht verteilt waren, so ist $c_a(f(t))$ tatsächlich eine W-fp. Funktion. Wegen der Beschränktheit ist sie auch W^p-fp. für jedes $p\geqslant 1$.

Beweis von Lemma 2. Für ein fixiertes $\varepsilon>0$ setze man

$$E=\{t\colon a-2\varepsilon<f(t)<a+2\varepsilon\},$$
$$Z=\{t\colon a-\varepsilon<f(t)<a+\varepsilon\}.$$

Ist nun ein $\delta>0$ vorgegeben, so seien $\varepsilon>0$ und $T_0>0$ derart gewählt, daß aus $T>T_0$

$$\frac{1}{T}\,|E\frown(0,T)|<\frac{\delta}{8}\tag{8}$$

folgt. Die Möglichkeit solcher Wahl ergibt sich aus der Stetigkeit der Funktion F_f im Punkte a. Es ist auch ein $l > 1$ derart zu finden, daß die zu $\varepsilon\delta/4$ gehörenden S_l^1-Verschiebungszahlen von f eine relativ dichte Menge bilden. Demnach gibt es eine solche Zahl $L > 0$, daß in jedem Intervall der Länge L eine von diesen Verschiebungszahlen vorkommt. Nun mag T_1 folgende Bedingungen erfüllen:

$$T_1 > T_0, \qquad \frac{l}{T_1} < \frac{\delta}{4}, \qquad \frac{L}{T_1} < \frac{\delta}{8}.$$

Es sei $T > T_1$. Sobald wir zeigen, daß

$$\sup_x \frac{1}{T} |Z \frown (x, x+T)| < \delta \tag{9}$$

gilt, wird das Lemma bewiesen sein. Wir setzen entgegen (9) voraus, daß man für ein x

$$\frac{1}{T} |Z \frown (x, x+T)| \geqslant \delta \tag{10}$$

hat. Man kann eine zu $\varepsilon\delta/4$ gehörende S_l^1-Verschiebungszahl τ von f derart bestimmen, daß $0 \leqslant x-\tau = \xi \leqslant L$ ist. In einem Intervall der Länge l kann die Ungleichung

$$|f(t)-f(t-\tau)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

höchstens auf einer Menge gelten, deren Maß die Zahl $l\delta/2$ nicht übersteigt. Wegen der Ungleichung $l/T < \delta/4$ kann also (11) für $t \epsilon (x, x+T)$ nur auf einer Menge vom Maße

$$l\frac{\delta}{2}\left[\frac{T}{l}\right] + \frac{\delta}{4}T < \frac{3}{4}\delta T$$

stattfinden. Liegt nun t außerhalb dieser Menge und hat man $t \epsilon (x, x+T) \frown \frown Z$, so muß $t-\tau \epsilon (\xi, \xi+T) \frown E$ gelten und es folgt nach (10), daß

$$|E \frown (\xi, \xi+T)| > \frac{1}{4}\delta T$$

ist. Das Intervall $(0, \xi)$ ist höchstens gleich L, also wegen der Ungleichung $L/T < \delta/8$ kleiner als $\frac{1}{8}\delta T$. Darum hat man

$$|E \frown (0, T)| > \frac{1}{4}\delta T - \frac{1}{8}\delta T = \frac{1}{8}\delta T,$$

das steht aber wegen $T > T_0$ im Widerspruch zu (8). Also ist Lemma 2 und mit ihm Satz 5 bewiesen.

4. In diesem Abschnitt erörtern wir eine abseits stehende Frage, die sich aber dem bisherigen Gedankengang insofern anschließt, daß sie, wenigstens zum Teil, unter Benutzung des Bohrschen Kompaktums gelöst werden kann. Es handelt sich um Fourierreihen $\sum a_n e^{i\lambda_n t}$ mit arithmetisch unabhängigen Exponenten λ_n. Man weiß wohl, daß eine solche Reihe dann und *nur dann* die Entwicklung einer Bohrschen Funktion ist, wenn $\sum_n |a_n| < \infty$ gilt ([1], S. 51-52). Andererseits ist $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ eine hinreichende (und notwendige) Bedingung, damit die Reihe einer B^2-fp. Funktion entspricht. Wir wollen näher untersuchen, was aus $\sum_n |a_n|^2 = \infty$ oder aus $\sum_n |a_n| = \infty$ und $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ folgt. Die erste Frage läßt sich eben mit Hilfe des Kompaktums K leicht beantworten:

Satz 6. *Wenn λ_n unabhängig sind und $\sum_n |a_n|^2 = \infty$ gilt, so ist die Reihe $\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ keine Fourierreihe einer fp. Funktion von Besicovitch.*

Beweis. Die Unabhängigkeit der Zahlen λ_n hat zur Folge, daß K mit dem ganzen $\aleph_0$-dimensionalen Torus identisch ist ([3], S. 298). Gäbe es eine B-Funktion $f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$, so würde die γ-korrespondierende Funktion $f^*(x)$ die Fourierreihe $\sum_n a_n x_n$ mit *unabhängigen* Veränderlichen x_n haben. Das kann aber keine Entwicklung einer integrierbaren Funktion sein, ohne daß $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ gälte.

Etwas schwieriger ist es sich von dem Charakter der Funktion $f \sim \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ Rechenschaft zu geben, wenn $\sum_n |a_n|^2 < \infty$, aber $\sum_n |a_n| = \infty$ gilt. Es hat Kahane bewiesen ([4], S. 301), daß im Falle $\lambda_{n+1} - \lambda_n > C > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_n |a_n|^2 < \infty$, die Unabhängigkeit von λ_n nicht einmal vorausgesetzt, immer eine S^2-fp. Funktion existiert, deren Fourierreihe $\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ ist. Für eine beschränkte Exponentenfolge ist das aber nicht der Fall, es gilt nämlich der

Satz 7. *Sind λ_n unabhängig, $|\lambda_n| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und hat man $\sum_n |a_n| = \infty$, so gibt es keine W-fp. Funktion mit der Fourierreihe $\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$.*

Beweis. Eine solche Funktion müßte durch die partiellen Summen $s_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}$ derart approximierbar sein, daß für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $l > 0$ und N zu finden wären, für welche aus $n > N$

$$\sup_x \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t) - s_n(t)|\, dt < \varepsilon$$

folgen würde. Das ergibt sich aus zwei Prämissen: 1° die Bochner-Fejérschen Polynome $\sigma_{\binom{\nu_1,\ldots,\nu_n}{\beta_1,\ldots,\beta_n}}$ für eine fp. Funktion mit unabhängigen Exponenten λ_j sind einfach von der Form

$$\sigma_{\nu,n}(t) = \sigma_{\binom{\nu_1,\ldots,\nu}{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}(t) = \left(1-\frac{1}{\nu}\right) s_n(t)$$

([1], S. 51) und 2° ist $f(t)$ eine W-fp. Funktion, so gibt es eine solche Folge $\sigma_j(t)$ von Bochner-Fejérschen Polynomen mit $n = 1, 2, \ldots$ und beliebig rasch wachsenden Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_n$, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und geeignete $l = l(\varepsilon) > 0$ und $N = N(\varepsilon)$ aus $j > N$

$$\sup_x \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t) - \sigma_j(t)|\, dt < \varepsilon$$

folgt ([1], S. 106).

Alsdann aber müßte ein l existieren, für welches die Folge

$$\left\{\sup_x \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |s_n(t)|\, dt\right\} \tag{12}$$

beschränkt wäre. Nun gibt es nach dem Kroneckerschen Satz für jedes $\eta > 0$ und jedes ganze $n > 0$ einen derartigen Punkt t_n, daß

$$\left|\sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t_n}\right| > \sum_{j=1}^n |a_j| - \eta \tag{13}$$

gilt. Wegen $|\lambda_j| < M$ ist ein $\delta > 0$ zu finden, für welches

$$|e^{i\lambda_j t} - 1| < \tfrac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \ldots) \text{ für } 0 < t < \delta$$

st. Dann gilt aber für diese Werte von t und jedes τ

$$\left|\sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j(t+\tau)} - \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j \tau}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |e^{i\lambda_j t} - 1| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |a_j|,$$

und daher nach (13)

$$\left|\sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j(t_n+t)}\right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |a_j| - \eta.$$

Demnach hat man für jedes $l > \delta$

$$\frac{1}{l} \int_{t_n}^{t_n+l} |s_n(t)|\, dt \geqslant \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |a_j| - \eta\right) \frac{\delta}{l}.$$

Wegen $\sum_n |a_n| = \infty$ wird aber der letzte Ausdruck für jedes feste l beliebig groß, wenn $n \to \infty$, und mithin gibt es kein l, für welches die Folge (12) beschränkt wäre. So ist der Beweis von Satz 7 zu Ende.

Daß eine Fourierreihe mit absolut divergenter Koeffizientensumme und unabhängigen Exponenten keine R-fp. Funktion darstellen kann, folgt aus dem

SATZ 8. *Sind λ_n unabhängig und $\sum_n |a_n| = \infty$, so gibt es keine beschränkte B-fp. Funktion mit der Fourierreihe $\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$.*

Beweis. Nach Satz 6 darf man $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ annehmen. Dann gibt es eine B-fp. Funktion $f(t)$ mit der verlangten Fourierreihe und diese Reihe ist in der B-Norm nach f konvergent (s. den Beweis von Satz 7). Die Fourierreihe $\sum_i a_i x_i$ einer γ-korrespondierenden Funktion $f^*(x)$ besteht aus stochastisch unabhängigen Gliedern (s. den Beweis von Satz 6) und ist in $L(K)$, mithin auch μ-fast überall auf K, nach f^* konvergent. Wäre nun $f(t)$ beschränkt, so müßte nach Lemma 1 $f^*(x)$ im wesentlichen beschränkt sein, woraus $\sum_i$ es $\sup |a_i x_i| = \sum_i |a_i| < \infty$ folgen würde.

Zitierte Literatur

[1] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, 2-e Ausgabe, Dover Publications, 1954.

[2] H. Bohr and E. Følner, *On some types of functional spaces*, Acta Mathematica 76 (1945), S. 31-155.

[3] S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques*, Studia Mathematica 13 (1953), S. 296-310.

[4] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées*, Annales de l'Institut Fourier 7 (1957), S. 293-314.

[5] A. S. Kovanko, *Sur la structure des fonctions presque périodiques généralisées*, Matematičeskiĭ Sbornik 42 (1935), S. 3-10.

[6] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Москва 1953.

[7] F. Wecken, *Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*, Mathematische Zeitschrift 45 (1939), S. 377-404.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 6. 10. 1960