COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 1

SUR CERTAINES ÉVALUATIONS GÉNÉRALES D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DE DEUX VARIABLES DANS LE VOISINAGE D'UN ZÉRO ISOLÉ

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ)

Dans le domaine des fonctions analytiques réelles d'une variable, il est un fait bien évident que, dans le voisinage d'un zéro, l'ordre de grandeur d'une fonction donnée est borné non seulement supérieurement, mais aussi inférieurement. Plus précisément: si la fonction $f(x)$ est réelle, analytique dans le voisinage d'un certain point, par exemple 0, et si elle est positive à l'exception de ce point, auquel elle s'annule, il existe des constantes C et ϱ (dépendant de cette fonction) telles que, dans un certain voisinage suffisamment petit du point 0, on a l'inégalité

$$f(x) > Cr^{\varrho}, \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2}.$$

Il est naturel de se demander, si ce fait peut être généralisé au cas des fonctions réelles analytiques de deux variables.

Łojasiewicz [2] et Hörmander [1] se sont occupés, entre autres, de ce problème.

J'en donne ici une simple solution basée sur certaines propriétés générales des fonctions analytiques dans le domaine complexe.

Le théorème suivant la contient:

THÉORÈME. *Si $f(x, y)$ est une fonction réelle de deux variables réelles, analytique dans un certain voisinage du point $(0, 0)$ et si elle est positive à l'exception de ce point, auquel elle s'annule, alors on a pour r positifs suffisamment petits l'inégalité*

$$\min f(x, y) \geqslant Cr^{\varrho}, \tag{0}$$

où C et ϱ désignent des constantes positives qui dépendent de la fonction f, mais sont indépendantes de r.

Démonstration. Si la fonction donnée f est de la forme

$$f(x, y) = \varphi(r), \quad \text{oú} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

$\varphi(r)$ étant une fonction quelconque de la forme

$$c_p r^p + \ldots, \quad c_p \neq 0, \quad \text{où} \quad p > 0,$$

on trouve de suite que dans un certain voisinage du point $(0, 0)$ on a une inégalité du type (0).

Supposons donc que la fonction $f(x, y)$ ne soit pas du type (1). Prenons un r arbitraire, suffisamment petit, positif, et considérons cette fonction sur la circonférence $x^2+y^2 = r^2$. Elle y admet un minimum absolu dans un certain ensemble de points. On voit facilement que dans le cas où cet ensemble est infini, la fonction f doit être constante sur la circonférence en question. En outre, on constate que si la fonction f était constante sur des circonférences de rayons arbitrairement petits, elle devrait admettre une représentation du type (1). Il suffit pour cela de poser $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ et d'étudier la fonction f comme fonction des variables ϑ et r. En conséquence, on peut admettre dans la suite que, pour des rayons r suffisamment petits, la fonction f atteint son minimum sur la circonférence correspondante seulement en un nombre fini de points. En tout point (x, y) doivent être remplies les conditions

$$(2') \qquad f'_x(x, y)y - f'_y(x, y)x = 0, \qquad (2'') \qquad x^2+y^2 = r^2.$$

Étudions l'expression $\varphi(x, y) = f'_x(x, y)y - f'_y(x, y)x$, considérant x et y comme des variables complexes indépendantes qui prennent les valeurs d'un certain voisinage de double cercle du point $(0, 0)$. Nous remarquons de suite que la fonction $\varphi(x, y)$ ne peut pas s'annuler identiquement, car dans ce cas $\varphi(x, y)$ serait constante sur toutes les circonférences (2''), ce qui n'a pas lieu dans le cas considéré.

Conformément aux théorèmes connus ([3], p. 89, 97, 101, 104, 108 et [4], p. 262-263, 266, 275), en changeant au besoin les coordonnées pour que $\varphi(0, y) \not\equiv 0$, nous pouvons, dans la suite, mettre la fonction considérée dans un certain voisinage de double cercle du point $(0, 0)$ sous la forme

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = [f_1(x, y)]^{\lambda_1} \ldots [f_l(x, y)]^{\lambda_l} \Omega(x, y),$$

où le dernier facteur $\Omega(x, y)$ est une fonction analytique ne s'annulant dans le voisinage cité, et les facteurs précédents sont des polynômes en y de la forme

$$(4) \qquad f_k(x, y) = y^{m_k} + A_{1k}(x)y^{m_k-1} + \ldots + A_{1m_k-1}(x)y + A_{1m_k}(x),$$
$$\text{où} \quad m_k > 0, \; k = 1, \ldots, l;$$

en outre les coefficients

$$(4') \qquad A_{sk}(x), \quad s = 1, \ldots, m_k \quad \text{et} \quad k = 1, \ldots, l,$$

sont des fonctions holomorphes de la variable x dans un certain voisinage du point 0 et qui s'annulent en ce point. De plus, les polynômes (4) sont irréductibles. Par suite, le discriminant de tout polynôme (4) en y est différent de zéro pour les x situés, dans un ceratin voisinage suffisamment petit du point 0 (ce point étant exclu), et le polynôme correspondant n'a, dans ce cas, que des racines simples arbitrairement proches de zéro. On sait que toutes ces racines peuvent être mises sous la forme

$$(5) \qquad y = \Psi_k(\sqrt[m_k]{x}), \quad \text{où} \quad m_k \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, l,$$

et où $\Psi_k(t)$ sont des fonctions holomorphes dans le voisinage du point 0 s'annulant en ce point. Dans (5), il faut prendre toutes les valeurs du radical $\sqrt[m_k]{x}$.

Nous en concluons de suite que pour r complexes, suffisamment petits, différents de zéro, tous les couples de nombres complexes x, y suffisamment proches de $(0, 0)$ qui réalisent les conditions (2') et (2'') vérifient l'une des égalités

$$(6) \qquad y = \Psi_k(\sqrt[m_k]{x}), \qquad \chi_k(\sqrt[m_k]{x}) = r^2,$$

où

$$(7) \qquad \chi_k(t) = t^{2m_k} + (\Psi_k(t))^2,$$

et où il faut prendre la valeur correspondante de $\sqrt[m_k]{x}$. De plus, à cause de l'hypothèse concernant r et de la relation (2''), nous n'aurons à considérer que les indices k pour lesquels les fonctions correspondantes (7) ne sont pas identiquement égales à 0. On peut représenter ces fonctions sous la forme

$$(8) \qquad \chi_k(t) = t^{p_k}\hat{\chi}_k(t), \quad \text{où} \quad \hat{\chi}_k(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad p_k > 0.$$

En admettant donc

$$(9) \qquad \Omega(t) = t\sqrt[p_k]{\hat{\chi}_k(t)}$$

et en choisissant arbitrairement la branche du radical, nous déduisons de (9) et (8) que les formules (6) sont équivalentes aux formules

$$(10) \qquad y = \Psi_k[\Omega_k^{-1}(\sqrt[p_k]{r^2})], \qquad x = [\Omega_k^{-1}(\sqrt[p_k]{r^2})]^{m_k},$$

si l'on choisit convenablement les valeurs des radicaux $\sqrt[p_k]{r^2}$.

En posant (10) dans la représentation (4) de la fonction f, nous voyons en définitive que pour tout couple de valeurs x, y remplissant les conditions (2') et (2''), la valeur correspondante de cette fonction est

$$(11) \qquad f(x, y) = \chi_k(\sqrt[p_k]{r^2}),$$

où k est un des indices dans (4'); en outre, il faut choisir convenablement la valeur de $\sqrt[p_k]{r^2}$; en même temps, le second membre de (11) est défini par la formule

$$\chi_k(\zeta) = f\Big(\big(\Omega_k^{-1}(\zeta)\big)^{m_k}, \Psi_k\big(\Omega(\zeta)\big)\Big). \tag{12}$$

En particulier, si nous nous limitons aux r positifs et aux x, y réels remplissant les conditions (2') et (2''), nous voyons que dans les formules (11) n'interviennent que les indices k pour lesquels les fonctions (12) ne s'annulent pas identiquement, car le premier membre de (11) est positif à l'exception du point $(0,0)$. Chacune de ces fonctions, comme série entière définie dans le voisinage du point zéro et s'annulant en ce point, est bornée en valeur absolue inférieurement par le produit d'une puissance naturelle quelconque de $|\zeta|$ et d'une constante. Étant donné que le nombre de ces fonctions est fini, il existe donc une évaluation analogue par un produit $C|\zeta|^s$, le même pour toutes ces fonctions. En conséquence, pour tout couple de valeurs x, y remplissant les conditions (2') et (2''), en particulier pour celui pour lequel le minimum de (0) est atteint, nous avons en vertu de (11)

$$f(x, y) \geqslant Cr^{2s/p}, \quad \text{où} \quad p = \min_k p_k.$$

Il en résulte immédiatement l'inégalité annoncée (0).

Remarque 1. L'hypothèse d'analyticité de la fonction $f(x, y)$ est essentielle en ce sens que, même pour une fonction de classe C^∞, le théorème n'est plus vrai, comme l'indique l'exemple $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$ pour $x^2+y^2 > 0$ et $f(0,0) = 0$.

Remarque 2. La généralisation au cas des fonctions de plusieurs variables est possible.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Hörmander, *Differentiability properties of solutions of differential equations*, Arkiv för Matematik 3 (1956), p. 527-535.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Mathematica 18 (1959), p. 87-136.

[3] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie, II*, Leipzig et Berlin 1929.

[4] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic Functions*, Warszawa—Wrocław 1952.

Reçu par la Rédaction le 6. 12. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 1

ON DETERMINING BOUNDED SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER n

BY

C. GRAJEK (GDAŃSK)

In technical problems we very often deal with differential equations of the form

$$y^{(n)} + \psi_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + \psi_0(t)y = g(t), \tag{1}$$

where the functions $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, and $g(t)$ are given and bounded for $t \in (-\infty, \infty)$.

It is very important to prove the existence of a bounded solution of this equation and to give a method of determining the solutions with an arbitrarily prescribed accuracy. In the case of differential equations of 2nd order the problem has been solved by A. E. Gelman (1) with the help of the method of small parameter.

Here we will give similar results for certain cases of equation (1).

For this purpose the solution of equation (1) will be expressed in the form of a series the terms of which are integrals of a certain sequence of differential equations with constant coefficients.

The estimations of the remainder of this series will also be given, which will enable us to estimate the accuracy of the approximate solution of equation (1).

LEMMA 1. *For an arbitrary sequence of numbers $r_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, such that $r_i \neq r_k$ for $i \neq k$ the following relation holds:*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \frac{r_i^p}{d_i} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leqslant p \leqslant n-2, \\ 1 & \text{for} \quad p = n-1, \end{cases}$$

(1) А. Е. Гельман, *О периодических, квазипериодических и ограниченных решениях одного класса линейных дифференциальных уравнений*, Известия Ленинградского Электротехнического Института, 1958, выпуск 35, p. 231-238.