COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

SUR CERTAINES MAJORANTES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ

PAR

A. BIELECKI ET Z. LEWANDOWSKI (LUBLIN)

1. Soit $\omega(x)$ une fonction réelle, non nécessairement finie, non décroissante et semi-continue inférieurement dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. Admettons que $\omega(0) = 0$ et posons

(1) $$r[\omega] = \sup\{x: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \omega(x) + 2\operatorname{arctg} x < \pi/2\},$$

ce qui détermine le nombre $r[\omega] \in \langle 0, 1\rangle$ sans ambiguïté. Désignons par $\mathscr{F}_{[\omega]}$ l'ensemble de toutes les fonctions complexes de la forme

(2) $$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$

holomorphes dans le cercle $C_1 = \{z: |z| < 1\}$ et telles que

(3) $$|\arg[zf'(z)/f(z)]| \leqslant \omega(x) \quad \text{pour} \quad 0 < |z| \leqslant x,$$

où $0 < x \leqslant 1$ et où l'on doit prendre $\arg\zeta = \infty$ si $\zeta = 0$ ou $\zeta = \infty$.

2. Supposons que deux fonctions $f(z)$ et $F(z)$, holomorphes dans le cercle C_1 appartiennent à la classe $\mathscr{F}_{[\omega]}$ et qu'il existe une fonction

(4) $$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

holomorphe dans le cercle $C_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$ où $\varrho \in (0, 1\rangle$ et qui satisfait aux conditions suivantes: le coefficient b_0 est un nombre réel positif,

(5) $$0 < |g(z)| < 1 \quad \text{et} \quad f(z) = g(z)F(z) \text{ dans } C_\varrho.$$

Ceci étant, nous dirons que la fonction $f(z)$ est *majorée en module* par la fonction $F(z)$ dans C_ϱ et nous écrirons $|f(z)| \prec_\varrho |F(z)|$, puisque les relations (4) et (5) entraînent l'inégalité $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| < \varrho$. En outre, on a évidemment $\arg f'(0) = \arg F'(0)$.

Nous dirons que la fonction $F(z)$ est une *majorante de la fonction* $f(z)$ dans le cercle C_ϱ, $\varrho \in (0, 1\rangle$, et nous écrirons $f(z) \prec_\varrho F(z)$, si $\arg f'(0) = \arg F'(0)$ et $f(C_\varrho) = \{\zeta: \zeta = f(z), |z| < \varrho\} \subset F(C_\varrho)$.

3. M. Biernacki a démontré en 1935 (voir [3], p. 256 et [4], p. 49) qu'il existe, pour certaines classes de fonctions univalentes dans le cercle C_1, des rayons r tels que l'on a

$$f(z) \prec_1 F(z) \to |f(z)| \prec_r |F(z)| \tag{6}$$

dans ces classes de fonctions. Il a trouvé les nombres r maxima pour les classes S, S^* et S^c de fonctions univalentes, resp. univalentes étoilées et convexes. Nous nous occuperons ici du problème inverse que voici: trouver, pour une classe donnée de fonctions holomorphes dans C_1, une constante R telle que l'on ait

$$|f(z)| \prec_1 |F(z)| \to f(z) \prec_R F(z). \tag{7}$$

Le problème analogue a déjà été posé par Z. Lewandowski pour le cas où la fonction $F(z)$ est supposée univalente, mais l'autre fonction $f(z)$ est seulement holomorphe ([7] et [8]). Le résultat que nous allons présenter est une généralisation d'un théorème démontré par nous pour les fonctions α-étoilées ([2], p. 53) en ce qui concerne l'existence d'un nombre R satisfaisant à la condition (7). La question si les valeurs de R données dans la suite et se rapportant à de diverses classes de fonctions sont les plus grandes possibles, restera encore ouverte, abstraction faite des cas particuliers étudiés dans [2] et ici p. 301.

4. THÉORÈME 1. *Si* $r[\omega] > 0$, $f(z) \in \mathscr{F}_{[\omega]}$ *et* $F(z) \in \mathscr{F}_{[\omega]}$ *et si* $|f(z)| \prec_1 |F(z)|$, *on a* $f(z) \prec_{r[\omega]} F(z)$.

En effet, en vertu de l'hypothèse et des relations (4) et (5), on a $\mathscr{R}\{-\ln g(z)\} > 0$, où l'on doit prendre la branche du logarithme qui devient réelle pour $z = 0$. Comme $\mathscr{R}h(z) = \mathscr{R}(-\ln g(z)) > 0$ et $h(0) = -\ln b_0 > 0$, on voit que la fonction $h(z)$ est majorée par l'homographie $h(0)(1+z)/(1-z)$ qui transforme le cercle C_r, $r \in (0, 1)$, en cercle de centre $h(0)(1+r^2)/(1-r^2)$ et de rayon $h(0)2r/(1-r^2)$ contenant le domaine $h(C)$ (cf. [5], p. 372). On en tire par un calcul simple la limitation

$$|\arg(-\ln g(z))| \leqslant 2\operatorname{arctg}|z| \quad \text{pour} \quad z \in C_1. \tag{8}$$

Posons pour $z \in C_1$ et $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$\Phi(z, t) = F(z)\exp[(1-t)\ln g(z)], \tag{9}$$

avec la même branche du logarithme que nous avons déjà prise dans (8) et supposons que $0 < |z| < r[\omega]$. D'après (5), (9), (3) et (1), nous aurons $|\arg\{z\Phi_z'(z, t)/\Phi(z, t)\}| = |\arg\{(1-t)zf'(z)/f(z) + tzF'(z)/F(z)\}| \leqslant \omega(|z|) < \omega(|z|) + 2\operatorname{arctg}|z| < \pi/2$. En outre, pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$, l'expression $z\Phi_z'(z, t)/\Phi(z, t)$ tend vers 1 lorsque $z \to 0$ et on a par conséquent $\Phi_z'(0, t) \neq 0$. Il en résulte que, pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$ fixé, la fonction $\Phi(z, t)$ est univalente et étoilée dans $C_{r[\omega]}$.

D'autre part, on a en vertu des relations (9), (5), (3), (8) et (1)

$$|\arg\{z\Phi_z'(z, t)/\Phi_t'(z, t)\}| < \pi/2 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, 1\rangle \text{ et } z \in C_{r[\omega]}.$$

Or la fonction $\Phi(z, t)$ étant univalente dans $C_{r[\omega]}$ pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$, la dernière inégalité entraîne la propriété suivante de cette fonction: si $0 < \varrho < r[\omega]$ et $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$, on a $\Phi(z, t) \prec_\varrho \Phi(z, s)$ (cf. [2], p. 47). En particulier, on a $f(z) = \Phi(z, 0) \prec_\varrho \Phi(z, 1) = F(z)$ pour tout $\varrho \in \langle 0, r[\omega]\rangle$, mais cela suffit évidemment pour que l'on ait $f \prec_{r[\omega]} F$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

5. Grunsky [6] a démontré que les fonctions de la forme (1) univalentes dans le cercle C_1 satisfont à l'inégalité

$$|\arg\{zf'(z)/f(z)\}| < \ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{pour} \quad |z| < x$$

(voir [5], p. 142). Admettons que $\omega(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ et désignons par R la racine unique de l'équation

$$\ln\frac{1+x}{1-x} + 2\operatorname{arctg}x = \pi/2; \tag{10}$$

nous aurons évidemment $R = r[\omega]$. Ceci étant, il suffit d'appliquer le théorème 1 pour obtenir le suivant:

THÉORÈME 2. *Si les fonctions* $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$ *et* $F(z) = A_1z + A_2z^2 + \ldots$, *où* $a_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ *et* $\arg a_1 = \arg A_1$, *sont univalentes dans le cercle* C_1 *et si* $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ *pour tout* $z \in C_1$, *alors* $f(z) \prec_R F(z)$, *le nombre* $R = 0{,}390\ldots$ *étant la racine unique de l'équation* (10).

6. Nous allons démontrer que la constante R dans le théorème 2 ne peut être remplacée par un nombre plus grand.

Dans ce but, admettons que $R < R^* < 1$. Il suffit de construire les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ de façon à avoir $f(z)/f'(0) \in S$, $F(z) \in S$ et $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| < 1$, mais que la relation $f(z) \prec_{R*} F(z)$ soit en défaut.

Vu la définition de la constante R, nous pouvons choisir deux nombres réels x et y tels que $R < x < y < R^*$ et

$$\pi/2 < \ln(1+x) - \ln(1-x) + 2\operatorname{arctg}x < \pi. \tag{11}$$

D'après let héorème de Grunsky [6], il existe une fonction $G(z) = z + A_2z^2 + \ldots \in S$ et un nombre complexe ζ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$|\zeta| = x \quad \text{et} \quad \arg\{\zeta G'(\zeta)/G(\zeta)\} = \ln(1-x) - \ln(1+x). \tag{12}$$

Il existe, en outre, un nombre réel θ tel que

$$\arg(1-\zeta e^{i\theta}) - \arg(1+\zeta e^{i\theta}) = 2\operatorname{arctg}x. \tag{13}$$

Ceci étant, soit pour $|z| \leqslant 1$ et $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \varphi(z,t) &= G(\lambda z)\psi(z,t), \\ \psi(z,t) &= 1-(1-t)(1-t\lambda z e^{i\theta})/(1+t\lambda z e^{i\theta}), \\ \lambda &= x/y, \quad \zeta_0 = \zeta/\lambda. \end{aligned} \tag{14}$$

Nous constatons sans peine que l'on a pour $|z_1| = |z_2| = 1$

$$|\psi(z_1,t)-\psi(z_2,t)| \leqslant 2t\lambda(1-t)|z_1-z_2|/(1-t\lambda)^2,$$

et, en outre, qu'il existe deux nombres réels $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ tels que

$$|G(\lambda z_1)-G(\lambda z_2)| \geqslant K_1|z_1-z_2|$$

(cf. [1], p. 147), et

$$|G(\lambda z_2)| \leqslant K_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\varphi(z_1,t)-\varphi(z_2,t)| &\geqslant |G(\lambda z_2)-G(\lambda z_1)|\cdot|\psi(z_1,t)| + \\ &\quad + |G(\lambda z_2)|\cdot|\psi(z_1,t)-\psi(z_2,t)| \\ &\geqslant \{K_1[1-(1-t)(1+t\lambda)/(1-t\lambda)]-K_2(1-t)2t\lambda/(1-t\lambda)\}|z_1-z_2| \end{aligned}$$

et par conséquent $|\varphi(z_1,t)-\varphi(z_2,t)| \geqslant K|z_1-z_2|$ pour $t \in \langle t', 1)$, où $K = \text{const} > 0$ et t' est une constante suffisamment proche de 1. Ainsi, nous avons prouvé que la fonction $\varphi(z,t)$ est univalente pour $|z| \leqslant 1$ et pour tout $t \in \langle t', 1)$.

Lorsque la variable z parcourt la circonférence $|z| = 1$, le point correspondant $\psi(z,t)$, où t est fixé, parcourt aussi un contour circulaire. Ce dernier étant symétrique par rapport à l'axe réel, il est bien facile de constater que $-1 < 1-(1-t)(1+t\lambda)/(1-t\lambda) \leqslant \mathcal{R}\psi(z,t) \leqslant 1-(1-t)(1-t\lambda)/(1+t\lambda) < 1$, d'où $|\psi(z,t)| < 1$ pour $|z| \leqslant 1$, $t \in \langle t_1, 1)$.

Comme $\mathcal{R}\{\varphi_t'(z,t)/\varphi(z,t)\}_{t=1} = \mathcal{R}\{(1-\lambda z e^{i\theta})/(1+\lambda z e^{i\theta})\} > 0$ d'après (14) et, en vertu de (11), (12) et (13),

$$\begin{aligned} &\arg\{\varphi_t'(\zeta_0,t)/\zeta_0\varphi_z'(\zeta_0,t)\}_{t=1} \\ &\quad = \arg\{G(\lambda\zeta_0)/\lambda\zeta_0 G'(\lambda\zeta_0)\} + \arg(1-\lambda\zeta_0 e^{i\theta}) - \arg(1+\lambda\zeta_0 e^{i\theta}) \\ &\quad = \ln(1+x) - \ln(1-x) + 2\operatorname{arctg} x \in (\pi/2, \pi), \end{aligned}$$

il existe un $t_0 \in \langle t', 1)$ tel que l'on a pour $t \in \langle t_0, 1)$ et $|z| \leqslant 1$

$$\mathcal{R}\{\varphi_t'(z,t)/\varphi(z,t)\} > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\{\varphi_t'(\zeta_0,t)/\zeta_0\varphi_z'(\zeta_0,t)\} < 0.$$

La première inégalité entraîne que

$$|\varphi(z,t_1)| \prec_1 |\varphi(z,t_2)| \quad \text{pour} \quad t_0 \leqslant t_1 < t_2 < 1,$$

tandis que la seconde peut s'interpréter comme suit: la fonction $\varphi(z,t)$ transforme la circonférence $|z| = y$ en un contour $\Gamma(t)$ qui se déplace quand $t \in \langle t_0, 1)$ augmente. En même temps, le point $\varphi(\zeta_0,t) \in \Gamma(t)$ se meut de telle façon que sa vitesse est constamment vers l'intérieur du circuit $\Gamma(t)$.

Ainsi, il suffit de prendre deux valeurs t_1 et t_2 de la variable t appartenant à l'intervalle $\langle t_0, 1)$ et suffisamment proches pour que le contour $\Gamma(t_1)$ ne soit pas contenu à l'intérieur du contour $\Gamma(t_2)$. Mais cela signifie que les fonctions $f(z) = \varphi(z,t_1)$ et $F(z) = \varphi(z,t_2)$ ne satisfont point à la condition $f \prec_{R*} F$, bien que l'on ait $|f| \prec_1 |F|$, ce qui achève la construction de l'exemple en question.

7. Pareillement, on peut déduire du théorème 1 des théorèmes concernant les fonctions étoilées ou bien convexes dans C_1, en admettant $\omega(x) = 2\operatorname{arctg} x$ ou $\omega(x) = \arcsin x$ respectivement. Notre travail [2] contient une proposition analogue sur la classe des fonctions dites *α-étoilées* et qui englobe les deux classes que nous venons de considérer.

En général, étant donné une classe particulière de fonctions holomorphes dans le cercle C_1, auxquelles s'applique une limitation de la forme (3) où la fonction $\omega(x)$ est déjà connue, on peut toujours établir un théorème analogue au théorème 2 avec une constante R bien déterminée par la formule (1). Cependant le théorème 1 est encore insuffisant pour résoudre le problème de trouver, pour une classe donnée de fonctions, la valeur maximum des rayons R satisfaisant à la condition (7). Ce dernier problème ne semble pas simple dans toute sa généralité et nous n'avons réussi à le résoudre que dans deux cas particuliers, à savoir pour les fonctions de la classe S et pour les fonctions α-étoilées ([2], p. 50).

BIBLIOGRAPHIE

[1] И. Е. Базилевич, *О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций*, Математический сборник 28 (70):1 (1951), p. 147-164.

[2] A. Bielecki et Z. Lewandowski, *Sur des familles de fonctions α-étoilées*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 45-55.

[3] M. Biernacki, *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 201 (1935), p. 256-258.

[4] — *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica (Cluj) 12 (1936), p. 49-64.

[5] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва—Ленинград 1952.

[6] H. Grunsky, *Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Schriften des Mathematischen Seminars und Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, 1 (1932).

[7] Z. Lewandowski. *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960), p. 5-11.

[8] — *Starlike majorantes and subordinations*, ibidem 14 (1960), p. 79-84.

Reçu par la Rédaction le 7. 7. 1961;
en version modifiée le 18. 11. 1961