REFERENCES

[1] M. S. Bartlett, *An introduction to the theory of stochastic processes with special references to methods and applications*, Cambridge 1955.

[2] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

[3] M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, 2nd edition, Warszawa 1958.

[4] А. Н. Колмогоров, *Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова*, Известия Академи Наук СССР 13 (4) (1949), p. 281-300.

[5] A. Renyi, *On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957), p. 193-199.

[6] В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова*, Москва-Ленинград 1949.

[7] L. Takács, *On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957), p. 169-191.

[8] — *On a sojurn time problem*, Теория вероятностей и ее применения 3 (1958), p. 61-69.

[9] — *On a sojourn time problem in the theory of stochastic processes*, Transactions of the American Mathematical Society 93 (1959), p. 531-540.

Reçu par la Rédaction le 19. 9. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

MIECZYSŁAW BIERNACKI

(30. III. 1891 – 21. XI. 1959)

Né le 30 mars 1891 à Lublin, fils d'un médecin, Mieczysław Biernacki y passa en 1909 son baccalauréat et, après deux ans d'études de la chimie à l'Université de Cracovie, prit l'inscription à la Sorbonne comme étudiant des mathématiques. Depuis 1914 jusqu'à 1919 il participa comme volontaire aux luttes de l'armée française et puis de la formation polonaise du général J. Haller contre les Allemands au front occidental. Intoxiqué par gaz asphyxiant et grièvement blessé, il retourna, aussitôt rétabli, sur le front français et, démobilisé en 1919, rentra dans son pays avec l'armée Haller.

Dès 1921 Biernacki poursuivit à la Sorbonne ses études mathématiques, y passa sa licence et y soutint le 11 mai 1928 sa thèse du doctorat auprès de la Commission d'examen présidée par le professeur Paul Montel.

Retourné en Pologne, il fut nommé en 1928 assistant à l'Université de Wilno, en 1929 professeur extraordinaire des mathématiques à l'Université de Poznań et en 1937 professeur ordinaire à la même université. Il n'arrêta pas ses recherches scientifiques pendant les terribles années 1939-1944 de l'occupation allemande en Pologne. Il les passa à Lublin, où quelques leçons privées qu'il y donnait lui ont permis de survivre.

En 1944 il devint professeur ordinaire des mathématiques à l'Université Marie Skłodowska-Curie à Lublin et prit une part particulièrement active à l'organisation de cette université. Il y enseignait jusqu'à la fin de ses jours.

Ses mérites publiques et scientifiques lui ont valu des distinctions et des prix. En 1936 la France lui attribua la Croix d'Officier de la Légion d'Honneur; en 1950 il a été décoré par la République Polonaise de la Croix d'or de l'Ordre du Mérite, en 1954 de celle du Chevalier et en 1959 du Commandeur de l'Ordre *Polonia Restituta*. En 1950 il a reçu le Prix scientifique de l'Etat (II^{me} degré). Deux fois la Société Polonaise

des Mathématiques le couronna de ses prix et le Conseil National du département de Lublin lui décerna un prix scientifique pour 1959.

Il mourut à Lublin le 21 novembre 1959.

*

La série de cinq articles qui suivent, sur la vie et l'oeuvre de Mieczysław Biernacki, débute par un souvenir que lui a consacré Paul Montel, dont il était l'élève. L'article suivant décrit l'activité de Biernacki à l'Université Marie Skłodowska-Curie de Lublin où il travaillait dès la fin de la II^{me} guerre mondiale en lui offrant le coeur et l'âme. L'article sur les travaux de Biernacki dans le domaine de la théorie des fonctions analytiques, qui occupe la place dominante dans son riche bagage scientifique, de même que les articles sur ses travaux de la théorie des équations différentielles et de la géométrie, n'épuisent pas le total de son oeuvre mathématique. Il a été également l'auteur de plusieurs autres travaux qu'il serait bien difficile de faire entrer dans des aperçus synthétiques aussi succints. L'un des plus excellents en est son travail [84] concernant le second théorème du calcul intégral sur la valeur moyenne.

La bibliographie de ses publications clôt la série.

SOUVENIR DE MIECZYSŁAW BIERNACKI

PAR

PAUL MONTEL (PARIS)

La vie laborieuse et féconde de Mieczysław Biernacki offre une image des bienfaits qu'apporte à la découverte scientifique l'union par delà les frontières de ceux que rapproche un même attachement aux valeurs de l'esprit.

Né à Lublin, Biernacki fit ses études secondaires dans cette ville. Puis, après avoir abordé la chimie à l'Université de Cracovie, puissamment attiré par les mathématiques, il vint les étudier à la Sorbonne. La première guerre mondiale interrompit son travail et il s'engagea aussitôt comme volontaire dans les forces françaises d'abord, ensuite dans la formation polonaise du général Haller. Victime d'asphyxie par les gaz de combat et grièvement blessé, il retourna dès sa guérison sur le front français. La France n'a pas oublié l'aide généreuse et vaillante qu'il lui a prêtée et lui a témoigné sa reconnaissance par l'attribution de la Croix d'Officier de la Légion d'Honneur. Après la guerre, revenu à Paris pour achever ses études supérieures, il s'adonna à la recherche mathématique pour laquelle il se sentit doué. Il passa à la Sorbonne la licence et le doctorat avec la mention „très honorable". Ses ressources, fort limitées, rendaient sa vie matérielle pénible. Il dut consacrer ses matinées à un travail indigne de sa culture dans le secrétariat d'une banque qui lui valait une modeste rétribution. Son alimentation demeurait toutefois insuffisante et sa faiblesse fut cause d'une chute dans l'escalier de son domicile. On apprit alors le dénûment qu'il cachait et Mme Curie, prévenue, intervint aussitôt. Plus tard, devenu professeur d'université dans sa patrie, il vit la nouvelle guerre mondiale et l'occupation ennemie interrompre pour la seconde fois son travail. Il fut contraint de se contenter de leçons privées qui n'arrêtèrent d'ailleurs pas ses recherches mathématiques.

Son oeuvre scientifique comprend près d'une centaine de publications qui ont enrichi de progrès importants l'analyse mathématique, en particulier dans la théorie des polynômes et celle des fonctions analytiques. Elle porte la marque de l'union féconde et de l'heureuse collaboration de l'Ecole mathématique polonaise et de l'Ecole française.

On sait que la localisation des zéros des polynômes suivant la nature de leurs coefficients, appelée aussi la *géométrie des polynômes*, a donné lieu à de nombreux travaux auxquels Biernacki a pris une large part. A l'époque où il commençait ses recherches, l'attention s'était portée sur les fonctions de variable complexe univalentes et la représentation conforme, sur les fonctions multivalentes, régionalement ou localement. De nombreux travaux leur furent consacrés; la contribution de Biernacki comportant une quinzaine de mémoires est importante. Il a introduit les notions nouvelles de multivalence en moyenne, multivalence faible et autres.

Dans la théorie des fonctions analytiques holomorphes ou méromorphes, on lui doit une étude pénétrante de la distribution des zéros et de ceux de la dérivée, des droites de condensation de ces zéros, des suites infinies de fonctions.

Je laisse de côté ses recherches sur les fonctions de distance, les séries doubles, les ensembles de cercles et de sphères, l'histoire des sciences et les livres d'enseignement. L'ensemble constitue une oeuvre mathématique de haute qualité et qui met son auteur en bonne place parmi les mathématiciens de cette Pologne fertile en savants éminents et qui, malgré la terrible hécatombe que les crimes de la dernière guerre lui ont imposée, a su reconquérir sa primauté, avec, au début, un personnel réduit et des bibliothèques dévastées.

Biernacki laisse dans la mémoire de ceux qui l'ont approché le souvenir d'un homme dont la valeur morale était à la hauteur de la valeur scientifique.

Il avait gardé pour la France beaucoup d'amitié, y passait des vacances et s'associait à tous les évènements heureux de ceux qui furent ses maîtres. Je ne puis oublier l'attachement qui n'a cessé de nous unir et dont, à toute occasion, il m'a donné les marques les plus affectueuses.

ACADÉMIE DES SCIENCES, PARIS
ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

L'OEUVRE DE MIECZYSŁAW BIERNACKI Á L'UNIVERSITÉ MARIE SKŁODOWSKA-CURIE Á LUBLIN

PAR

A. BIELECKI (LUBLIN)

En 1944, après la libération de la ville de Lublin de l'occupation hitlérienne, le Comité Polonais de la Libération Nationale (PKWN), qui a pris le pouvoir sur ce lopin de terre polonaise délivrée, y a institué l'Université Marie Skłodowska-Curie et appelé le 31. XI. 1944 le professeur Mieczysław Biernacki au professorat à cette université. Dès lors jusqu'à la fin de ses jours, il n'a pas quitté ce poste, fidèle à ses devoirs et à sa ville natale, sans se laisser tenter par des offres honorifiques et attrayantes de la part des grands centres scientifiques.

Les plus difficiles ont été, naturellement, les premières années de la jeune école qui débuta presque sans logements, sans livres et sans meubles. Les difficultés à trouver des enseignants n'ont pas été moins sensibles. Leon Jeśmanowicz, agrégé en mathématiques, Jerzy Słupecki, professeur de la logique, et un peu plus tard Jan Mikusiński, professeur des mathématiques, ont bien mérité de la nouvelle université en l'aidant à surmonter les obstacles de la période la plus pénible. Mais ils ne sont pas resté à Lublin, de même que Mikolaj Olekiewicz, qui y est rentré après quelques années et y professe la statistique mathématique.

Le grand soucis du professeur Biernacki était donc de gagner pour l'université quelques mathématiciens qui seraient décidés à s'établir pour plus longtemps dans le milieu scientifique de cette ville, en partie ruinée par la guerre et incapable d'assurer un rapide développement à son école supérieure, nouvellement fondée. C'est cependant grâce à des démarches délicates du professeur Biernacki que deux mathématiciens de Cracovie, à savoir l'auteur de ces lignes et le docteur Krzysztof Tatarkiewicz, actuellement professeurs des mathématiques, de même que le chargé de cours Stanisław Dobrzycki de Kielce et l'agrégé actuel Jan Krzyż de Poznań, sont venus se domicilier en définitive à Lublin. A présent, que le professeur Biernacki n'est plus, ce sont eux qui, avec concours d'une pléiade de jeunes mathématiciens, élevés déjà par l'université de cette ville, sont à même d'y guider les études supérieures en mathématiques. C'est peut être là le point capital de l'activité d'organisateur que l'Université Marie Skłodowska-Curie doit au savant défunt.

Il convient d'ajouter, à ce propos, les noms de ses disciples et de ceux qui ont obtenus leurs grades scientifiques sous son patronat. Les *veniae legendi* (habilitations) y ont été accordées aux docteurs Jan Mikusiński et Adam Bielecki. Leon Jeśmanowicz, Czesław Ryll-Nardzewski, Witold Janowski, Wiktor Jankowski, Franciszek Jakóbczyk, Jan Krzyż et Konstanty Radziszewski ont été promus docteurs des mathématiques.

Un équipement fondamental de toute chaire des mathématiques est sa bibliothèque. Le professeur Biernacki, alors titulaire de la I^re^ chaire des mathématiques (devenue plus tard Chaire collective des mathématiques), a su recueillir une riche bibliothèque contenant plusieurs milliers de volumes. Et encore, cette bibliothèque doit son accroissement rapide à un vaste échange avec l'étranger contre les volumes des „Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A" dont le professeur Biernacki était le rédacteur en chef. Soucieux du développement de cet organe universitaire, il y publiait ses meilleurs travaux, par exemple les résultats de ses recherches sur les fonctions faiblement p-valentes.

Enfin, il ajoutait à l'activité organisatrice et didactique sa part active à plusieurs sociétés savantes. Il était membre correspondant de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie, membre de la Société des Amis des Sciences de Poznań, membre de la Société Polonaise des Mathématiques dont il présidait la Section de Lublin et enfin membre fondateur de la Société des Sciences de Lublin où il était jusqu'à la mort président de la Section des Sciences Mathématiques et Physiques.

SUR LES TRAVAUX DE MIECZYSŁAW BIERNACKI DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES ET DE CELLE DES POLYNÔMES

PAR

A. BIELECKI ET J. KRZYŻ (LUBLIN)

L'article présent (1) n'a pour but qu'une analyse fort sommaire de plus de quarante publications concernant les fonctions analytiques et les polynômes et qui contiennent à peu près la moitié de la totalité des recherches du professeur Biernacki.

C'est la théorie des fonctions univalentes et multivalentes qui est récemment au centre des recherches dans le domaine des fonctions analytiques. Toute fonction analytique $f(z)$ dont la dérivée en un point z_0

(1) C'est la traduction quelque peu abrégée de l'article paru en polonais sous le même titre dans le Bulletin de la Société des Sciences de Lublin, n^o 1 (1961), p. 71-77. Ici, les numéros en crochets indiquent ceux de la *Bibliographie des travaux de Mieczysław Biernacki*, ce volume, p. 377-381, et les chiffres romains en parenthèses renvoient aux travaux des autres auteurs, cités p. 371 et 372.

icm©

différe de 0 est univalente dans un entourage $\{z: |z-z_0| < \varrho\}$ de ce point et y possède un développement de la forme

$$f(z) = A_0+A_1(z-z_0)+A_2(z-z_0)^2+\dots$$

En transformant au besoin le domaine et l'ensemble des valeurs de la fonction par translation et par homothétie, on peut toujours arriver à avoir $\varrho = A_1 = 1$ et $A_0 = 0$. Ainsi, les propriétés locales des fonctions analytiques au voisinage d'un point qui n'est pas un zéro de la dérivée ont leurs analogues dans les propriétés des fonctions univalentes convenablement normées, à savoir formant la classe (S), c'est-à-dire univalentes dans le cercle $K(1) = \{z: |z| < 1\}$ et ayant dans ce cercle le développement

$$f(z) = z+a_2z^2+\dots \tag{1}$$

De même, si la dérivée d'une fonction holomorphe a au point z_0 un zéro d'ordre $p-1$ (où $p > 1$), l'examen des propriétés locales de cette fonction se laisse réduire d'une manière analogue à celui des propriétés que possède au voisinage du point $z = 0$ certaine fonction f qui est p-valente dans le cercle $K(1)$ et s'y laisse développer en série

$$f(z) = z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\dots \quad \text{où} \quad p > 1. \tag{2}$$

Dans son travail [28], Biernacki, qui a consacré à l'étude des fonctions analytiques uni- et multivalentes une bonne partie de ses recherches, a donné une estimation d'en haut de la moyenne intégrale d'ordre $\lambda > 0$ du module d'une fonction $f(z)$ p-valente et holomorphe dans le cercle $K(1)$ au moyen du maximum du module

$$M(r) = \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |f(re^{i\theta})|,$$

à savoir l'estimation

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant 2\pi p^\lambda \int_0^r [M(\varrho)]^\lambda \varrho^{-1} d\varrho.$$

Le même travail contient une estimation d'en haut du module du n-ième coefficient d'une fonction p-valente $f(z) = a_1z+a_2z^2+\dots$, holomorphe dans le cercle $K(1)$ et y ayant q zéros. Cette estimation s'exprime par la formule

$$|a_n| \leqslant C(p)\,\mu_q n^{2p-1},$$

où $\mu_q = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_q|)$ et $C(p)$ est une constante ne dépendant que de p. Si la fonction $f(z)$ est de la forme (2), on peut admettre que $\mu_q = 1$ et que $C(p) = p(2p-1)^{-1}\exp(8p\pi+1)$. Bien que, dans le dernier cas, les estimations trouvées par Biernacki ne soient pas de précision définitive, l'ordre de grandeur du coefficient a_n est précis. Ces résultats

sont couramment cités dans la littérature (voir par exemple Hayman (V), p. 42 et 50). Cependant le nom de Biernacki se rencontre le plus souvent dans la littérature consacrée aux fonctions analytiques en rapport avec la notion de fonction p-valente en moyenne.

Le problème des estimations optima du module d'une fonction p-valente, de celui de sa dérivée et de ceux de ses coefficients tayloriens s'est imposé aux mathématiciens d'une manière naturelle déjà avant 1920. Toutefois, les premiers résultats partiels n'ont été acquis à ce sujet que par Cartwright (II) en 1935 et par Biernacki [28] en 1936. C'est en poursuivant l'étude de ce problème que Biernacki est parvenu en 1946 (voir [35]) à la notion de p-valence en moyenne. Soit $n(w)$ le nombre des solutions de l'équation $f(z) = w$, la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans le cercle $K(1)$. Lorsque la valeur moyenne de la fonction $n(w)$ sur une circonférence arbitraire $\{w: |w| = R\}$ ne surpasse pas un nombre (pas nécessairement entier) $p > 0$, c'est-à-dire que

$$\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})d\Phi \leqslant 2\pi p,$$

la fonction $f(z)$ est dite *p-valente en moyenne*.

Les fonctions p-valentes en moyenne ont une propriété importante et dont les fonctions p-valentes tout court sont dépourvues: si $f(z)$ est une fonction p-valente en moyenne, $[f(z)]^a$ est ap-valente en moyenne (pourvu qu'elle soit holomorphe). On peut donc réduire ainsi l'étude des fonctions p-valentes en moyenne de la forme (2) à celle des fonctions univalentes en moyenne $\varphi(z) = [f(z)]^{1/p}$ de la forme (1). Biernacki a énoncé l'hypothèse que le problème bien difficile de trouver de diverses estimations importantes dans la classe des fonctions multivalentes pourrait être résolu dans certains cas en envisageant des estimations analogues dans la classe des fonctions multivalentes en moyenne, qui est plus vaste. En fait, plusieurs raisons permettaient de s'attendre à ce que certaines fonctions extrémales dans la classe des fonctions p-valentes en moyenne sont déjà p-valentes tout court. En outre, divers problèmes extrémaux dans la classe des fonctions p-valentes en moyenne ont leurs analogues dans ceux pour les fonctions univalentes en moyenne en lesquelles elles passent par l'extraction de la p-ième racine.

Or il n'y avait pas, en 1946, de méthodes qui auraient permis d'exécuter jusqu'à la fin le programme de recherches tracé par Biernacki. Ce n'est que grâce à la méthode de symétrisation circulaire de Pólya que Hayman (IV) a réussi, conformément à l'idée de Biernacki, de tirer parti des propriétés des fonctions multivalentes en moyenne et de trouver de différentes estimations précises dans la classe des fonctions multivalentes tout court.

Pour les fonctions univalentes en moyenne, il existe les mêmes estimations que pour les fonctions univalentes tout court, à savoir d'en haut et d'en bas de leurs modules, d'en haut des modules de leurs dérivées, de même que de leurs deuxième et troisième coefficients dans la série de Taylor (1). Dans des monographies modernes sur les fonctions analytiques, on trouve des chapitres consacrés entièrement aux fonctions multivalentes en moyenne de Biernacki (voir par exemple Hayman (V), chapitre V et Jenkins (VI), chapitre 8.6). Il est à noter que c'était la voie de recherches proposée par Biernacki qui a conduit Hayman à la démonstration du théorème connu sous le nom de *l'hypothèse asymptotique de Bieberbach* — un des résultats les plus beaux parmi les dernières conquêtes de la théorie des fonctions analytiques.

Déjà en **1940** Spencer (X) a introduit une classe plus générale de fonctions, à savoir celle des *fonctions en aire multivalentes*. Au lieu des moyennes arithmétiques sur les circonférences $\{w: |w| = R\}$, on y prend les moyennes intégrales de la fonction $n(w)$ sur les cercles $K(R) = \{w: |w| < R\}$

$$\iint_{K(R)} n(w)\,du\,dv \leqslant \pi p R^2 \quad \text{pour tout} \quad R > 0.$$

Pour les fonctions en aire p-valentes, ces moyennes ne dépassent jamais le nombre p. Les propriétés des fonctions de cette classe rappellent moins celles des fonctions univalentes que ne le font les propriétés des fonctions univalentes en moyenne. C'est ainsi que pour les fonctions en aire univalentes développables en série (1), l'hypothèse $|a_n| \leqslant n$ de Bieberbach s'avère pour $n = 2$, sans subsister toutefois déjà pour $n = 3$ (résultat de Spencer, encore inédit).

Dans son travail [35], Biernacki a établi pour les fonctions en aire multivalentes de Spencer le célèbre théorème de Bieberbach sur „l'aire non couverte". Et en généralisant le résultat classique de Koebe-Bieberbach, il a montré (voir [34]) que les valeurs de toute fonction holomorphe de la forme (1) et p-valente dans le cercle $K(1)$ couvrent entièrement le cercle $K(1/4)$.

Biernacki s'occupait également du problème de la croissance des coefficients des fonctions de la classe (S). Il a trouvé l'estimation

$$||a_{n+1}| - |a_n|| \leqslant A(\log n)^{3/2}$$

qui améliore considérablement les estimations antérieures données par Goluzin (voir [78]). Voici l'avis de Hayman en cette matière: „This result, although probably not best possible, represents a very strong advance on what was known previously and is our only tool available so far for tackling the general problem" (voir (IV), p. 270).

Rappelons que, dans l'un de ses travaux plus anciens sur les fonctions univalentes (voir son travail [27] de 1936), Biernacki a défini une sous-classe (L) de la classe (S), à savoir la classe des fonctions *linéairement accessibles*, c'est-à-dire univalentes dans $K(1)$ et transformant ce cercle en une région dont le complémentaire au plan se compose de demi-droites disjointes. Les fonctions dites *étoilées*, qui ont été l'objet des vastes études depuis plusieurs années, sont un cas particulier des fonctions linéairement accessibles. Biernacki a déterminé pour les fonctions de la classe (L) les régions

$$\{w: w = z/f(z)\} \quad \text{et} \quad \{w: w = zf'(z)/f(z)\},$$

où z est un point fixé dans le cercle $K(1)$ et f parcourt la classe (L). La connaissance de ces régions lui a permis de trouver les estimations précises des arguments $z/f(z)$ et $zf'(z)/f(z)$. Un de ses élèves, Lewandowski, a montré dans les publications (VIII)-(X) que la classe des fonctions univalentes presque convexes, introduite par Kaplan (voir (VII)) et étudiée dernièrement par de nombreux auteurs, est identique à la classe (L) distinguée bien antérieurement par Biernacki.

Quinze jours avant sa mort, Biernacki, a envoyé à l'Académie Polonaise des Sciences une communication (voir [87]) où il a établi, par l'emploi fort ingénieux des méthodes du calcul des variations, un théorème d'après lequel si une fonction f de la forme (1) appartient à la classe (S), il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^z f(\xi)\,\xi^{-1}\,d\xi = z + \tfrac{1}{2}a_2 z^2 + \ldots$$

Plusieurs théorèmes intéressants, cités fréquemment dans la littérature et même dans des cours (voir par exemple celui de Goluzin (III), p. 404), ont été établis par Biernacki en relation avec la majoration des fonctions dites subordonnées. Une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $K(1)$ est *subordonnée* à la fonction $F(z)$ univalente dans ce cercle, en formule: $f(z) \prec F(z)$, lorsque $f(0) = F(0)$ et $f(z) \equiv F[\varphi(z)]$, où $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $K(1)$, telle que $\varphi(0) = 0$ et $|\varphi(z)| < 1$. Biernacki a montré (voir [25]) que la relation de subordination de $f(z)$ à $F(z)$, sous l'hypothèse supplémentaire de l'univalence de $f(z)$ et de l'égalité des arguments des dérivées des deux fonctions au zéro, entraîne l'inégalité $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ dans un cercle $K(r_0)$ dont le rayon $r_0 = 0{,}390\ldots$ est une racine d'une équation transcendante bien déterminée et ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand. Il peut cependant l'être lorsque les régions $f[K(1)]$ et $F[K(1)]$ sont étoilées ou convexes. On peut alors remplacer r_0 par certains nombres plus grands et dont les valeurs précises ont été également trouvées par Biernacki. Il a montré

en outre que $f(z) \prec F(z)$ et $\arg f'(0) = \arg F'(0)$ entraînent $|f'(z)| \leqslant |F'(z)|$ dans le cercle $K(r_1)$ où $r_1 > 0{,}12$.

En même temps que la communication [87], Biernacki a envoyé à l'Académie Polonaise des Sciences une autre communication (voir [86], ibidem) contenant une démonstration fort simple du théorème de Cauchy-Goursat sur la continuité des dérivées de fonctions complexes différentiables et qui se passe complètement sans intégrales dans le domaine complexe. C'était un résultat inattendu, étant donné que même Ahlfors exprimait le scepticisme à cet égard (voir (I), p. 82).

Une mention spéciale doit être faite, parmi les travaux de Biernacki sur les fonctions analytiques, de sa publication [23] dans laquelle il a complété le théorème de Picard sur les fonctions entières par le résultat suivant sur les fonctions entières représentables par des séries tayloriennes avec des lacunes: lorsque

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{n(1)} + a_2 z^{n(2)} + \ldots \quad \text{où} \quad n(1) < n(2) < \ldots$$

et que la série $\sum_k n(k)^{-1}$ converge, $F(z)$ prend chacune de ses valeurs une infinité de fois.

On peut considérer la théorie classique des polynômes comme l'un des domaines de la théorie des fonctions analytiques. C'est à ce domaine que Biernacki a consacré son premier travail (voir [1]) et y revenait toujours. Nous n'en rappelons ici que deux résultats particulièrement beaux et importants.

Si z_0 est le zéro du polynôme

$$1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

de valeur absolue minimum, le polynôme

$$W(z) = z^p(1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)$$

est p-valent dans le cercle $\{z: |z| < p|z_0|/(n+p)\}$, mais peut ne l'être dans aucun cercle plus grand, comme le montre l'exemple du polynôme $W(z) = z^p(1 - z/z_0)^n$ pour lequel le rayon $p|z_0|/(n+p)$ est le meilleur (voir pour ces résultats le travail [5]).

Dans son travail [74], Biernacki a établi un théorème qui peut être regardé comme la réciproque du théorème classique de Gauss-Lucas d'après lequel toute région convexe contenant tous les zéros d'un polynôme contient également tous ceux de sa dérivée. Le problème posé et résolu par Biernacki a été de savoir ce qu'on peut dire sur les zéros de l'intégrale d'un polynôme dont tous les zéros sont connus. Biernacki a montré que si tous les zéros d'un polynôme $W(z)$ sont situés dans un

ensemble convexe D et $a \in D$, tous ceux du polynôme $\Phi(z) = \int_a^z W(\xi)\,d\xi$ le sont dans une région dont la frontière Γ est l'image homothétique de centre a et de rapport 2 de la courbe Γ' que trace la projection du point a sur la droite d'appui de la région D. Deux théorèmes suivants en sont des cas particuliers:

1. *Si tous les zéros d'un polynôme $W(z)$ et le point a sont situées sur un segment rectiligne bc, tous les zéros du polynôme $\Phi(z)$ se trouvent dans les cercles (ouverts) de centres b et c, tangents l'un à l'autre extérieurement au point a.*

2. *Si tous les zéros d'un polynôme $W(z)$ de n-ième degré sont situés dans un cercle $\{z: |z-a| \leqslant R\}$, tous ceux du polynôme $\Phi(z)$ le sont dans le cercle $\{z: |z-a| \leqslant 2R\}$,*

Biernacki a réussi de le rétrécir à $\{z: |z-a| \leqslant 2R\cos\pi/2(n+1)\}$ pour les n pairs. Ces résultats sont, dans un certain sens, définitifs, comme le montrent des exemples.

Les théorèmes précités sont d'importance capitale dans la géométrie des zéros de polynômes. Leur originalité et élégance, de même que la simplicité de leurs énoncés, les rangent à notre avis parmi ceux qui sont destinés à prendre place à côté des théorèmes classiques de Gauss, Lucas, Grace, Walsh etc.

L'influence des idées de Biernacki dans les matières en question a été féconde. „Your papers on p-valent functions have been a great stimulus to me ..." — lui écrivait Hayman dans l'une de ses lettres. Plusieurs mathématiciens de divers pays en peuvent dire autant.

TRAVAUX CITÉS

(I) L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, New York—Toronto—London 1953

(II) M. L. Cartwright, *Some inequalities in the theory of functions*, Mathematische Annalen 111 (1935), p. 98-118.

(III) Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменого*, Москва—Ленинград 1952.

(IV) W. K. Hayman, *Some solved and unsolved coefficient problems for schlicht functions*, Seminars on Analytic Functions, vol. I, Princeton 1957, p. 264-277.

(V) — *Multivalent functions*, Cambridge 1958.

(VI) J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

(VII) W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Mathematical Journal 1 (1952), p. 169-185.

(VIII) Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 12 (1958), p. 131-146.

(IX) — *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II*, ibidem 14 (1960), p. 19-46.

(X) — *Sur certaines classes de fonctions univalentes dans le cercle-unité*, ibidem 13 (1959), p. 115-126.

(XI) D. C. Spencer, *On finitely mean valent functions II*, Transactions of the American Mathematical Society 48 (1940), p. 418-435.

SUR LES TRAVAUX DE MIECZYSŁAW BIERNACKI DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

A. BIELECKI (LUBLIN)

Il n'y a parmi les 88 publications mathématiques de Biernacki que 10 travaux de recherche consacrés aux équations différentielles, mais cette dizaine de travaux contient des résultats de rare valeur.

Il est remarquable que déjà le premier de ces travaux (voir [19]) appartient à ceux qui sont cités le plus fréquemment dans la littérature du sujet. On savait bien que sous des hypothèses convenables concernant la fonction $A(t)$, les solutions de l'équation

$$x''+A(t)x = 0$$

présentent des analogies avec les fonctions trigonométriques *sinus* et *cosinus* (pour $A(t) = 1$), par exemple que ces solutions oscillent lorsque la fonction $A(t)$ est positive, monotone et ne converge pas trop rapidement vers 0 quand t croît indéfiniment. Dans le travail en question, Biernacki a démontré, entre autres, que si $A'(t) > 0$ pour tout t dépassant un t_0, les intégrales de l'équation considérée sont bornées, oscillent et manifestent d'autres analogies encore avec $\sin x$.

Dans son travail [23], Biernacki s'est occupé de l'équation générale

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Il y a établi, entre autres, le théorème d'après lequel, lorsque la fonction $f(x, y)$ est continue pour tout x dépassant un x_0 et tend uniformément, quand $x \to \infty$, vers une fonction $\varphi(y)$ assujettie aux inégalités

$$\liminf_{y\to\infty}\varphi(y) < 0 < \limsup_{y\to-\infty}\varphi(y),$$

toute valeur frontière y_0 (point d'accumulation) pour $x \to \infty$ d'une intégrale quelconque $y(x)$ de l'équation (1) est finie et satisfait à l'équation $\varphi(y_0) = 0$, en même temps que l'on a $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$. Ce théorème y est complété par diverses variantes et exemples, ce qui constitue une étude

intéressante de la manière dont se comportent à l'infini les intégrales de l'équation (1) lorsque $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(y)$ avec $x \to \infty$, et résoud ce problème à fond.

Le mémoire [41] de Biernacki concerne l'équation différentielle

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y = 0. \tag{2}$$

L'auteur la classe dans le type L_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ lorsqu'il en existe toujours une solution prenant des valeurs arbitrairement fixées d'avance pour k valeurs données de la variable indépendante. Sinon, l'équation (2) est dite du type S_k. Le but du mémoire est d'établir des rapports entre les propriétés des racines de l'équation caractéristique de (2) et le type L_k ou S_k de (2). L'auteur est parvenu à la solution complète pour $k = 2$ et $k = n$.

A la séance du 6 décembre 1937 de la Société Polonaise des Mathématiques, Section de Poznań, Biernacki a présenté les résultats de son travail intitulé *Sur des intégrales d'une équation différentielle du 4^{me} ordre*. Il l'a cité ensuite dans sa publication [45] sans en signaler des données bibliographiques; aussi, on n'est pas réussi de le retrouver jusqu'à présent. Dans les deux travaux, il s'agissait de l'équation

$$x^{(n)}(t)+A(t)x(t) = 0 \tag{3}$$

pour $n = 4$ et 5. Biernacki y a montré que la fonction $A(t)$ étant dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ continue, non-croissante et telle que $0 \leqslant A(t) \leqslant M$, les distances entre les zéros consécutifs d'une intégrale non banale quelconque de l'équation (3) surpassent $M^{-1/4}$ dans le cas de $n = 4$ et $(2+\sqrt{3})^{-1}M^{-1/5}$ dans celui de $n = 5$, sauf tout au plus $n-2$ intervalles exceptionnels. Ce résultat est une amélioration, dans les deux cas considérés, de l'ancien théorème général de Sturm contenant une estimation moins exacte et précise, à savoir $K_nM^{-1/n}$ où K_n sont des constantes ne dépendant que de n et dont on ne sait pas davantage (2).

Le théorème sur l'oscillation des solutions dans le cas $A(t) \geqslant m > 0$, de même que le célèbre théorème comparatif de Sturm et autres théorèmes encore, se trouvent établis dans le travail [48] de Biernacki dans des formes analogues pour les équations linéaires aux différences du second ordre.

Son travail [49] se rattache à certaines recherches de Mikusiński. Ce travail apporte certains théorèmes comparatifs assez spéciaux sur les systèmes d'équations et d'inégalités différentielles linéaires.

(2) Les cas $n = 3$ et $n = 6$ ont été traités par J. G. Mikusiński dans ses travaux *Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 1 (1946), p. 23-34, et *Sur l'équation différentielle* $y^{(6)}+y = 0$, ibidem, p. 35-40.

Parmi les résultats du travail [58], deux surtout sont à mentionner:

1. *Si la fonction $A(x)$ est positive de classe $C^{(1)}$ pour tout x dépassant un x_0 et tend d'une manière monotone à l'infini avec x, et si la fonction $y(x)$ satisfait pour $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ aux conditions*

$$y^{(\nu)} > 0 \quad \text{et} \quad A(x) \geqslant y^{(n)}/y > 0,$$

alors

$$\frac{y^{(\nu)}}{y} < \frac{n!}{\nu!}[A(x)]^{\nu/n} \quad \text{pour} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1$$

et les exposants ν/n ne peuvent pas être diminués.

Par conséquent,

$$y(x) < c \cdot \exp\left(n! \int_{x_0}^{x} [A(t)]^{1/n}\, dt\right).$$

Les hypothèses de ce théorème sont satisfaites en particulier par les intégrales de l'équation $y^{(n)} = A(x) \cdot y$ assujetties à la condition initiale $y^{(\nu)}(x_0) > 0$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$. Dans le cas $n = 2$, un résultat plus précis est établi.

2. *Si la fonction $A(x)$ est positive de classe $C^{(4)}$ pour tout x dépassant un x_0, croissante indéfiniment et telle que A'/A ne décroît pas, toute intégrale de l'équation $y''' = A(x) \cdot y$ assujettie à la condition initiale $y^{(\nu)}(x_0) > 0$ pour $\nu = 0, 1$ et 2 satisfait à partir d'un x suffisamment grand aux inégalités*

$$y'/y < [A(x)]^{1/3} \quad \text{et} \quad y''/y < [A(x)]^{2/3}$$

et on a, lorsque y'/y n'est pas borné (ce qui est le cas quand A'/A tend vers l'infini),

$$y'/y < y''/y' < y'''/y'' < y''''/y'''$$

pour des x suffisamment grands.

Dans le travail [59] Biernacki a montré que la fonction $A(x)$ étant positive de classe $C^{(1)}$ pour tout x dépassant un x_0 et non-décroissante, il existe toujours une intégrale de l'équation $y^{(4)} + A(x) \cdot y = 0$, convergeant vers 0 quand $x \to \infty$. Il y a établi en outre plusieurs autres théorèmes sur la marche des intégrales oscillantes et, entre autres, sur la répartition de leurs zéros lorsque la fonction $A(x)$ est soumise à certaines conditions supplémentaires. L'importance de ce travail réside dans la démonstration pour les équations du quatrième ordre (ce qui est naturellement bien plus difficile) de certains théorèmes convenablement modifiés, établis antérieurement pour les équations linéaires du second ordre.

Depuis 1933, l'année de la première publication de Biernacki sur la théorie des équations différentielles, cette théorie a subi un développement très considérable. Un bon nombre de résultats, alors célèbres ou sensationnels, établis par des mathématiciens éminents, ont perdu leur éclat primitif et ne nous semblent aujourd'hui que des truismes. Cependant — chose remarquable — la plupart des travaux de Biernacki sur les équations différentielles ont conservé jusqu'à présent leur fraîcheur et survécu à leur auteur sans dépérir. Or c'est peut-être là le critérium le plus juste pour juger de la valeur d'une oeuvre scientifique de quiconque.

SUR LES TRAVAUX DE MIECZYSŁAW BIERNACKI EN GÉOMÉTRIE

PAR

S. GOŁĄB (CRACOVIE)

Bien que la plupart des travaux mathématiques de Biernacki appartiennent à la théorie des fonctions analytiques et à celle des équations différentielles, les quelques travaux de géométrie différentielle qui lui sont dus témoignent — à ce qu'il me semble — qu'il ait été un véritable géomètre. Il choisissait en effet, dans tous les domaines de ses recherches, des sujets intimement liés à la géométrie et savait en imprégner d'autres des raisonnements géométriques par excellence. Il suffit de rappeler sa préférence pour la géométrie des zéros des polynômes et pour les problèmes concernant la répartition des zéros des solutions oscillantes des équations différentielles.

Mais aussi la liste des travaux purement géométriques de Biernacki prouve à elle seule que, pour lui, la géométrie était un domaine où il se sentait chez lui et travaillait avec entrain. Son cours de géométrie différentielle en deux volumes ([69] et [70]) est, dans la littérature mathématique polonaise, bien unique jusqu'à présent qui soit suffisamment vaste et complet, vu que du manuel de A. Hoborski n'a paru que le volume I (*Théorie des courbes*), la mort de l'auteur dans le camp hitlérien à Sachsenhausen ayant entravé l'édition de la suite. On peut objecter au manuel de Biernacki qu'il ne soit pas assez moderne, ou qu'il fasse l'usage trop modeste de la méthode vectorielle et tensorielle, ou encore qu'il ne se serve pas des hypothèses de régularité pour économiser ses exposés. Mais on ne peut pas méconnaître les importantes valeurs didactiques de ce manuel, la richesse des matériaux dont il traite, la belle collection d'exercises, remarquable par la vaste échelle de leur difficulté, et enfin l'esprit géométrique sur lequel l'auteur insiste bien davantage que sur le côté

analytique de ses arguments. Le cours en question est sans doute le résultat du désir ambitieux de combler une lacune invétérée dans la littérature du sujet et, en même temps, de donner libre cours à sa propre énergie dans un domaine qui l'attirait depuis sa jeunesse.

Les travaux géométriques de Biernacki ne relevent pas que de la géométrie différentielle classique. Son travail [47] par exemple appartient à une branche plus récente de géométrie, à savoir à la *géométrie des ensembles*. Citons-en un des théorèmes dus à Biernacki. Soit U la borne supérieure des nombres inverses aux rayons des circonférences passant par trois points arbitraires d'un continu plan C. Si U est un nombre fini, C est un arc (au sens de Jordan) rectifiable et ayant une tangente continue, de même qu'une courbure (au sens classique) partout, sauf dans un ensemble de points de mesure nulle. Le nombre U ne peut pas être atteint, excepté le cas où C contient un arc de circonférence de rayon $1/U$.

Biernacki s'intéressait tout particulièrement de divers problèmes métriques liés aux ovales et aux ovaloïdes. Il ne s'est pas contenté de plusieurs théorèmes intéressants dont il a enrichi ce beau domaine de la géométrie, mais a su attirer sur ce domaine l'attention de ses collègues et de ses disciples. C'est ainsi qu'une série de travaux de Radziszewski [3] sur les ovales se rattache aux idées géométriques suggérées par Biernacki. Consultons, à titre d'exemple sa publication [64]. On y trouve entre autres le théorème: lorsqu'un ovale a un centre de symétrie et qu'il est fortement convexe, on peut inscrire en lui un rectangle d'aire égale au moins à la moitié de celle de l'ovale. On y trouve aussi une courte démonstration du théorème de Kakeya, d'après lequel on peut inscrire dans tout ovale au moins deux carrés. A et B étant les bouts d'un diamètre de l'ovale, $|AB|$ la longueur de l'arc AB et L celle de l'ovale, on a

$$|AB|/L \geqslant 3/(2\pi+3)$$

— théorème également trouvé par Biernacki.

[3] K. Radziszewski, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 6 (1952), p. 5-18.

— *Sur les cordes qui partagent l'aire d'un ovale en 2 parties égales*, ibidem 8 (1954), p. 89-92.

— *Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale en 2 parties égales*, ibidem 8 (1954), p. 93-96.

— et Z. Lewandowski, *Sur le lieu géométrique des milieux des cordes divisant l'aire d'un ovale dans le rapport k*, ibidem 9 (1955), p. 177-180.

— et Z. Lewandowski, *Sur le lieu géométrique des milieux de cordes qui divisent le périmètre d'un ovale dans le rapport k*, ibidem 9 (1955), p. 181-185.

— *Sur une fonctionnelle définie sur les ovales*, ibidem 10 (1956), p. 57-59.

Il a résolu dans son travail [82] plusieurs problèmes géométriques posés par F. Leja en rapport avec certaines recherches sur les points extrémaux.

Il est intéressant d'observer comment les questions de l'analyse, surtout celles de la théorie des fonctions analytiques, lui suggéraient des problèmes purement géométriques. Le problème dont il s'occupait avant sa mort et qui a été l'objet de sa dernière communication faite le 20 juin 1958 à la Société Polonaise des Mathématiques, Section de Cracovie, *Sur les intégrales des fonctions univalentes*, a suscité une féconde discussion sur certaines propriétés des courbes fermées planes.

BIBLIOGRAPHIE
DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE MIECZYSŁAW BIERNACKI

Abréviations

ASPM	Annales de la Société Polonaise de Mathématique.
AUMCS	Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, Sectio A.
BIAC	Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A.
BAP	Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques.
BSM	Bulletin des Sciences Mathématiques.
CR	Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris.

[1] *Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation*, CR 175 (1922), p. 18-20.

[2] *Sur un nouveau théorème d'Algèbre*, CR 177 (1923), p. 1193-1195.

[3] *Sur un théorème de M. Denjoy*, CR 182 (1926), p. 916-918.

[4] *Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation*, CR 184 (1927), p. 1530-1533.

[5] *Sur les équations algébriques contenants des paramètres arbitraires*, BIAC (1927), p. 541-685.

[6] *Sur les droites de Julia des fonctions entières*, CR 186 (1928), p. 1260-1262.

[7] *Sur les droites de Julia des fonctions entières*, CR 186 (1928), p. 1410-1412.

[8] *Sur les suites de fonctions holomorphes*, CR 186 (1928), p. 1799-1801.

[9] *Sur les fonctions entières à série lacunaire*, CR 187 (1928), p. 477-480.

[10] *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes*, CR 189 (1929), p. 21-23.

[11] *Sur la théorie des fonctions entières*, BIAC (1929), p. 529-590.

[12] *Remarques sur un théorème de M. Carleman*, Mathematica (Cluj) 1 (1929), p. 125-127.

[13] *Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel*, Bulletin de la Société des Sciences de Cluj 5 (1930), p. 374-379.

[14] *Sur les directions de Borel des fonctions mémororphes*, Acta Mathematica 56 (1930), p. 197-204.

[15] *Sur les zéros des fonctions holomorphes*, Mathematica (Cluj) 6 (1930), p. 25-29.

[16] *Sur une propriété des séries doubles*, ASPM 10 (1931), p. 12-14.

[17] *Sur une limitation du module de la dérivée des fonctions holomorphes*, ASPM 10 (1931), p. 15-20.

[18] *Sur le théorème de Rolle*, Bulletin de Mathématiques et de Physique Pures et Appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II N° 3, Fasc. 6, p. 1-7.

[19] *Sur l'équation différentielle* $x''+A(t)x=0$, Prace Matematyczno-Fizyczne 40 (1933), p. 163-171.

[20] *Sur l'équation du troisième degré*, Mathematica (Cluj) 8 (1933), p. 196-200.

[21] *O odwzorowaniu konforemnym [Sur la représentation conforme]*, Pamiętnik XIV Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu (1933), p. 205-207.

[22] *O własnościach asymptotycznych całek równań różniczkowych liniowych [Sur les propriétés asymptotiques des intégrales des équations différentielles linéaires]*, Pamiętnik XIV Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu (1933), p. 207-210.

[23] *Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles*, ASPM 13 (1934), p. 93-99.

[24] *Deux remarques au sujet d'un théorème de M. Rogosiński*, Mathematica (Cluj) 10 (1934), p. 46-48.

[25] *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, CR 201 (1935), p. 256-258.

[26] *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica (Cluj) 12 (1935), p. 49-64.

[27] *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Matematyczno-Fizyczne 44 (1936), p. 293-314.

[28] *Sur les fonctions multivalentes d'ordre p*, CR 203 (1936), p. 449-451.

[29] *Zagadnienia nierozwiązalne w dziejach matematyki [Les problèmes insolubles dans l'histoire des mathématiques]*, Pamiętnik Lubelski 3 (1937), p. 1-9.

[30] *Les fonctions multivalentes*, Actualités Scientifiques et Industrielles 657 (1938), p. 1-66.

[31] *Sur la représentation conforme des domaines étoilés*, Mathematica (Cluj) 16 (1938), p. 44-49.

[32] *Sur les zéros des polynômes et sur les fonctions entières dont le développement taylorien présente des lacunes*, BSM 69 (1945), p. 197-203.

[33] *Sur les fonctions univalentes et k-symétriques*, BSM 69 (1945), p. 204-214.

[34] *Sur les domaines couverts par des fonctions multivalentes*, BSM 70 (1946), p. 45-51.

[35] *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, BSM 70 (1946), p. 41-76.

[36] *Sur les moyennes de module des fonctions holomorphes*, AUMCS 1 (1946), p. 1-8.

[37] *Sur une proposition de Bieberbach-Eilenberg*, AUMCS 1 (1946), p. 9-12.

[38] *Sur les valeurs moyennes des fonctions sous-harmoniques*, AUMCS 1 (1946), p. 13-17.

[39] *Sur une propriété des suites à termes positifs*, AUMCS 1 (1946), p. 19-21.

[40] *Sur les fonctions lentement croissantes*, Science et Technique de la Polytechnique de Timişoara 12 (1946), p. 146-162.

[41] *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires*, ASPM 20 (1947), p. 169-214.

[42] *Commentaire sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes*, Selecta, cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel, Paris 1947, p. 146-153.

[43] *Commentaire sur les modules des zéros des polynômes*, ibidem, p. 225-228.

[44] *Sur une inégalité entre les moyennes des dérivées logarithmiques*, Mathematica (Timişoara) 23 (1947-1948), p. 54-59.

[45] *Sur les zéros des intégrales de l'équation* $x^{(5)}(t)+A(t)x(t)=0$, ASPM 21 (1948), p. 26-37.

[46] *Problème P 55*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 331.

[47] *Sur les cercles et sur les sphères qui passent par 3 ou 4 points d'un continu*, AUMCS 3 (1949), p. 85-102.

[48] *Sur l'équation* $\Delta^2 y/h^2+A(x)y=0$, Prace Matematyczno-Fizyczne 47 (1949), p. 49-60.

[49] *Sur un théorème dans la théorie des équations différentielles*, Prace Matematyczno-Fizyczne 47 (1949), p. 129-141.

[50] *Nowsze badania nad geometrią zer wielomianów [Nouvelles recherches sur la géométrie des zéros des polynômes]*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego (Supplément à ASPM) 22 (1950), p. 8-16.

[51] *O funkcjach słabo p-listnych [Sur les fonctions faiblement p-valentes]*, ibidem 22 (1950), p. 39.

icm©

[52] (avec H. Pidek et C. Ryll-Nardzewski), *Sur une inégalité entre des intégrales définies*, AUMCS 4 (1950), p. 1-4.

[53] *Sur le calcul des aires situés sur une sphère*, AUMCS 4 (1950), p. 19-21.

[54] *Sur quelques applications de la formule de Parseval*, AUMCS 4 (1950), p. 22-40.

[55] *Sur le 2^e théorème de la moyenne et sur l'inégalité de Tchebycheff*, AUMCS 4 (1950), p. 123-130.

[56] *Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchebycheff*, AUMCS 5 (1951), p. 23-29.

[57] *Sur quelques propriétés des fonctions de distances*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 31 (1952, p. 305-318.

[58] *Sur la dérivée logarithmique des intégrales des équations différentielles linéaires*, AUMCS 6 (1952), p. 55-64.

[59] *Sur l'équation différentielle* $y^{(4)}+A(x)y = 0$, AUMCS 6 (1952), p. 65-78.

[60] *Sur une inégalité de Riesz et sur quelques inégalités analogues*, AUMCS 6 (1952), p. 79-89.

[61] *Sur quelques applications de la formule de Parseval*, II, AUMCS 7 (1953), p. 5-14.

[62] *Sur le nombre minimum des zéros des intégrales de l'équation* $y^{(n)}+A(x)y = 0$, AUMCS 7 (1953), p. 15-18.

[63] *Sur des inégalités remplies par des expressions dont les termes ont des signes alternés*, AUMCS 7 (1953), p. 99-101.

[64] *Sur quelques propriétés des ovales*, AUMCS 7 (1953), p. 103-112.

[65] *Sur un problème de M. Leja relatif à une fonction de distances entre des points*, AUMCS 7 (1953), p. 113-120.

[66] *O równości wielokątów [Sur l'égalité des polygones]*, Matematyka 7 (1954), p. 4-6.

[67] *Sur les fonctions en aire multivalentes*, AUMCS 8 (1954), p. 71-79.

[68] *Sur quelques propriétés des fonctions de distances, II*, AUMCS 8 (1954), p. 81-88.

[69] *Geometria różniczkowa*, cz. I *[Géométrie différentielle*, première partie*]*, Warszawa 1954, Biblioteka Matematyczna 5, p. 240.

[70] *Geometria różniczkowa* cz. II *[Géométrie différentielle*, seconde partie*]*, Warszawa 1955, Biblioteka Matematyczna 8, p. 247.

[71] *Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone*, Annales Polonici Mathematici 1 (1955), p. 380-387.

[72] *F. Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne [Fonctions analytiques et harmoniques]*, Prace Matematyczne 1 (1955), p. 143-145 (analyse critique).

[73] *O pewnym szeregu potęgowym lakunarnym [Sur une série lacunaire de puissances]*, Prace Matematyczne 1 (1955), p. 264-271.

[74] *Sur les zéros des polynômes*, AUMCS 9 (1955), p. 81-97.

[75] *Sur la caractéristique T(f) des fonctions méromorphes dans un cercle*, AUMCS 9 (1955), p. 99-122.

[76] *Sur les coefficients de Taylor des fonctions univalentes*, AUMCS 9 (1955), p. 81-88.

[77] (avec J. Krzyż), *On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic functions*, AUMCS 9 (1955), p. 135-146.

[78] *Sur les coefficients tayloriens des fonctions univalentes*, BAP 4 (1956), p. 5-6.

[79] *Sur les polynômes dont tous les zéros sont réels*, AUMCS 10 (1956), p. 61-75.

[80] *Sur les moyennes et les extréma des modules des fonctions analytiques*, AUMCS 10 (1956), p. 127-136.

[81] *O niektórych zagadnieniach dotyczących wykładu geometrii analitycznej [Sur quelques questions relatives au cours de géométrie analytique]*, Wiadomości Matematyczne I, 2 (1956), p. 222-225.

[82] *Sur la position des extrémas relatifs de certaines fonctions composées des fonctions sur-harmoniques ou sous-harmoniques*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, Rendiconti 24 (1958), p. 7-11.

[83] *Sur la convergence, des intégrales*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 247-249.

[84] *Sur le second théorème de la moyenne du calcul intégral*, AUMCS 12 (1958), p. 45-58.

[85] *Sur les travaux de la théorie des fonctions en Pologne*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Serie A, 251 1 (1958), p. 1-11.

[86] *Sur le théorème de Cauchy-Goursat*, BAP 8 (1960), p. 25-28.

[87] *Sur l'intégrale des fonctions univalentes*, BAP 8 (1960), p. 29-34.

[88] (avec Z. Charzyński et H. Grunsky), *Sur la convexité des lemniscates* (en préparation).