ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1962)

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

WZÓR REKURENCYJNY DLA ILOŚCI PARTYCJI OGRANICZONYCH

Przy okazji obliczania ilości możliwych obwodów w mechanizmie o zadanej liczbie członów i gałęzi Oderfeld i Pleszczyńska [1] natknęli się na pytania dotyczące partycji ograniczonych. Nawiązując do tej pracy, chcę ją tutaj uzupełnić wzorem rekurencyjnym (3). Jest on uogólnieniem na przypadek partycji ograniczonych znanego wzoru dotyczącego partycji nieograniczonych o zadanej liczbie składników (por. [1], wzór (4)). Ponadto podaję także uogólnioną wersję tego wzoru rekurencyjnego.

1. Pytamy, jaka jest liczba $p(a, n; c)$ ciągów liczb całkowitych $x_1, \ldots, x_n$ spełniających warunki

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant c \quad \text{oraz} \quad x_1+x_2+\ldots+x_n = a, \tag{1}$$

gdzie liczby a, n, c są ustalone.

Niemal oczywisty jest wzór (por. [1], wzór (7))

$$p(a, 1; c) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant a \leqslant c, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{2}$$

Udowodnimy następujący wzór:

$$p(a, n; c) = \sum_{i=0}^{[a/n]} p(a-ni, n-1; c-i) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a,\ 0 \leqslant c,\ n \geqslant 2, \tag{3}$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że na to, by warunki (1) były niesprzeczne, czyli aby było $p(a, n; c) > 0$, potrzeba i wystarcza, żeby

$$0 \leqslant a \leqslant nc; \tag{4}$$

w dalszym ciągu dowodu przyjmujemy, że (4) zachodzi.

Pytamy więc, ile jest ciągów liczb całkowitych $x_1, \ldots, x_n$ spełniających relacje (1). Aby wyznaczyć ich liczbę, podzielmy je na klasy ze względu na wartości przyjmowane przez x_1. Niech S_i oznacza liczbę takich spośród tych ciągów, dla których $x_1 = i$. Przez podstawienie $x_2 = i + x'_2, \ldots$ $x_n = i + x'_n$ widzimy, że S_i jest równe liczbie ciągów liczb całkowitych $x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ spełniających warunki

$$0 \leqslant x'_2 \leqslant x'_3 \leqslant \ldots \leqslant x'_n \leqslant c-i, \quad x'_2 + \ldots + x'_n = a - ni.$$

To dowodzi, że $S_i = p(a-ni,\ n-1;\ c-i)$. W sprawie granic sumowania zauważmy, że na to, by było $S_i \neq 0$, potrzeba, żeby $0 \leqslant a - ni \leqslant$ $\leqslant (n-1)(c-i)$, czyli żeby $a-(n-1)c \leqslant i \leqslant [a/n]$. To, oraz relacje $0 \leqslant i$, $[a/n] \leqslant c$ pokazują, że we wzorze (3) składniki różne od zera mamy tylko dla $\max(0, a-(n-1)c) \leqslant i \leqslant [a/n]$. Niektóre wyrazy w sumie (3) mogą więc równać się 0. To kończy dowód.

2. Możemy również obliczyć $p(a, n; c)$, zaczynając od drugiego końca i dzieląc ciągi spełniające warunki (1) na klasy według wartości przyjmowanych przez x_n. Oczywiście $x_n \leqslant \min(c, a)$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość x_n? Jest ona osiągnięta, gdy wszystkie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmują wartość a/n, gdy a/n jest całkowite, lub $[a/n]$ oraz $[a/n]+1$, gdy a/n nie jest całkowite. W każdym razie x_n wyczerpuje wszystkie wartości całkowite z przedziału $a/n \leqslant x_n \leqslant \min(c, a)$.

Niech więc $x_n = i$ i niech S_i będzie liczbą ciągów spełniających warunki (1), dla których $x_n = i$. Tak więc S_i jest liczbą ciągów $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$, dla których

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant i \quad \text{oraz} \quad x_1 + \ldots + x_{n-1} = a - i,$$

czyli

$$S_i = p(a-i,\ n-1;\ i),$$

a stąd

$$p(a, n; c) = \sum_{a/n \leqslant i \leqslant \min(c, a)} p(a-i, n-1; i) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a,\ 0 \leqslant c. \tag{5}$$

Jest to inny z możliwych wzorów rekurencyjnych na $p(a, n; c)$.

3. Teraz obliczymy $p(a, n; c)$ jeszcze inaczej. Dla ustalonego s z przedziału $1 < s < n$ oznaczmy przez $S(i, k)$ ilość ciągów liczb całkowitych $x_1, \ldots, x_n$ spełniających warunki (1), dla których

$$x_s = i, \quad x_1 + \ldots + x_{s-1} = k. \tag{6}$$

Widać, że wówczas $S(i, k)$ jest iloczynem ilości ciągów $x_1, \ldots, x_{s-1}$, spełniających warunki

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{s-1} \leqslant i, \quad x_1 + \ldots + x_{s-1} = k, \tag{7}$$

przez ilość ciągów $x_{s+1}, \ldots, x_n$ spełniających warunki

$$i \leqslant x_{s+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant c, \quad x_{s+1} + \ldots + x_n = a - k - i. \tag{8}$$

Pierwszych ciągów jest oczywiście $p(k, s-1; i)$. Przez podstawienie $x_{s+1} = i+x'_{s+1}, \ldots, x_n = i+x'_n$ widzimy, że drugich jest tyle, ile ciągów $x'_{s+1}, \ldots, x'_n$ spełniających warunki

$$(9) \quad 0 \leqslant x'_{s+1} \leqslant x'_{s+2} \leqslant \ldots \leqslant x'_n \leqslant c-i, \quad x'_{s+1}+\ldots+x'_n = a-k-(n-s+1)i,$$

a to znaczy, że jest ich $p\big(a-k-(n-s+1)i,\ n-s;\ c-i\big)$. Ostatecznie otrzymujemy wzór

$$(10) \qquad p(a, n; c) = \sum_{(i,k)\in W} p(k, s-1; i)\, p\big(a-k-(n-s+1)i,\ n-s;\ c-i\big),$$

gdzie za W bierzemy zbiór tych par (i, k), dla których warunki (7) i (9) są niesprzeczne. Niesprzeczność warunków (7) jest równoważna z nierównościami

$$(11) \qquad 0 \leqslant k \leqslant (s-1)i,$$

a niesprzeczność warunków (9) z nierównościami

$$(12) \qquad 0 \leqslant a-k-(n-s+1)i \leqslant (n-s)(c-i).$$

Nierówności (11) i (12) opisują łącznie zbiór W. Wynika z nich, że musi być

$$\max\big(0,\ a-(n-s)c-i\big) \leqslant k \leqslant \min\big((s-1)i,\ a-(n-s+1)i\big),$$

i że współrzędne i punktów ze zbioru W na pewno nie przekraczają granic $0 \leqslant i \leqslant \min\big([a/(n-s+1)],\ c\big)$.

Dla $s = n-2$ otrzymujemy ze wzoru (10) inną postać wzoru (16) z pracy [1].

Dla $s = 1$ odczytamy ze wzoru (10), jako jego szczególny przypadek, wzór (3), jeśli umówimy się, że

$$(13) \qquad p(k, 0; i) = 1 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0,\ i \geqslant 0,$$

gdyż wobec (11) musi być wówczas $k = 0$.

Podobnie przy konwencji (13) otrzymujemy z (10) przy $s = n$ wzór (5), gdyż na mocy (12) musi być wówczas $k = a-i$.

Praca cytowana

[1] J. Oderfeld i E. Pleszczyńska, *Pewne zastosowanie partycji*, Zastosowania Matematyki 6 (1962), str. 189.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 22. 3. 1961

С. ЗУБЖИЦКИ (Вроцлав)

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЙ НА СУММУ ОГРАНИЧЕННЫХ СЛАГАЕМЫХ

РЕЗЮМЕ

В статье [1], опубликованной в настоящем выпуске, Одерфельд и Плещинска дают ответ на некоторые вопросы, касающиеся разложений натурального числа на сумму некоторого числа ограниченных слагаемых. В связи с этой статьей автор пополняет ее рекуррентной формулой (3). Эта формула является обобщением на случай ограниченных разложений известной формулы для неограниченных разложений с заданным числом слагаемых (ср. [1], ф-ла (4)). Сверх того, дается также обобщенный вариант этой рекуррентной формулы.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

A RECURSIVE FORMULA FOR THE NUMBER OF RESTRICTED PARTITIONS

SUMMARY

In paper [1], published in the present issue of Zastosowania Matematyki, Oderfeld and Pleszczyńska answer certain questions concerning the restricted partitions. In connection with the mentioned paper, the author gives the recursive formula (3) which is a generalization of the well-known formula for the unrestricted partitions with a given number of terms (see [1], formula (4)) to the case of restricted partitions. Besides, the author gives also the generalized version of this recursive formula.
