COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 1

SUR LA DISCONTINUITÉ APPROXIMATIVE ET LA DÉRIVÉE APPROXIMATIVE

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

Admettons que la fonction $f(x)$ ait en tout point une dérivée finie ou infinie. Soit x_0 un point de discontinuité de la fonction $f(x)$. Évidemment, on a alors $f'(x_0) = +\infty$ ou bien $f'(x_0) = -\infty$ et

$$\overline{\lim_{t\to x_0-}} f(t) \neq \overline{\lim_{t\to x_0+}} f(t) \quad \text{ou bien} \quad \underline{\lim_{t\to x_0-}} f(t) \neq \underline{\lim_{t\to x_0+}} f(t).$$

Tout point où l'une au moins de ces deux inégalités se présente est un point de structure asymétrique au sens de Young [7] de la fonction f. Cet auteur [7] a montré que l'ensemble des points de structure asymétrique d'une fonction réelle quelconque est au plus dénombrable. Il en résulte que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction qui a en tout point une dérivée finie ou infinie est au plus dénombrable. Zahorski (voir [6]) a posé la question suivante: le théorème précédent est-il en défaut lorsqu'on y remplace la discontinuité par la discontinuité approximative et la derivée par la dérivée approvimative? Afin de répondre à cette question, nous établirons des conditions nécessaires pour qu'un ensemble soit l'ensemble des points de discontinuité approximative d'une fonction ayant en tout point une dérivée approximative (théorème 1) et nous construirons un exemple de fonction approximativement discontinue sur un ensemble de puissance du continu et qui a en même temps une dérivée approximative en tout point (théorème 2). La réponse à la question de Zahorski est donc affirmative.

Nous emprunterons de la monographie de Saks [5] (chapitre VII, § 3) les définitions et les notations relatives à la continuité approximative et à la dérivabilité de fonctions.

THÉORÈME 1. *Si la fonction $f(x)$ a en tout point une dérivée approximative finie ou infinie, l'ensembles A des points de discontinuité approximative de cette fonction est de I^e catégorie et de mesure nulle.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit x_0 un point de discontinuité approximative de la fonction $f(x)$. Alors l'une au moins des quatre limites approximatives à droite ou à gauche de cette fonction n'est pas égale à $f(x_0)$. Admettons d'abord que c'est la limite supérieure à droite

(1) $$a = \lim_{x\to x_0+} \sup \operatorname{ap} f(x) > f(x_0).$$

Il en résulte que la densité extérieure supérieure à droite de l'ensemble $G = \{x: f(x) > 2^{-1}[f(x_0)+a]\}$ au point x_0 est positive (cf. [5]). $N>0$ étant quelconque, soit $\beta = (a-f(x_0))/2N$. On a pour tout $x \in G$ tel que $0 < x-x_0 < \beta$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{a-f(x_0)}{2(x-x_0)} > \frac{a-f(x_0)}{2\beta} = N.$$

Par conséquent, en posant

$$H = \left\{x: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > N\right\},$$

on a

$$G \cap (x_0, x_0+\beta) \subset H.$$

La densité extérieure supérieure à droite de G en x_0 étant positive, il en set de même de H en x_0. On a donc

$$\lim_{x\to x_0+} \sup \operatorname{ap} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > N.$$

L'hypothèse que la dérivée approximative de la fonction f au point x_0 existe entraîne que $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) > N$ et, N étant arbitraire, on a même $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) = +\infty$.

Admettons à son tour que l'on a l'inégalité

(2) $$\lim_{x\to x_0+} \inf \operatorname{ap} f(x) > f(x_0).$$

L'inégalité (1) est alors vérifiée à plus forte raison et on a encore nécessairement $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) = +\infty$. D'une façon analogue, en admettant que

(3) $$\lim_{x\to x_0-} \sup \operatorname{ap} f(x) > f(x_0),$$

on en déduit que $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) = -\infty$. Les inégalités (1) et (3) ne peuvent donc être vraies simultanément: si l'on admet (1), on a nécessairement la négation de (3). Donc

(4) $$\lim_{x\to x_0+} \sup \operatorname{ap} f(x) > f(x_0) \geqslant \lim_{x\to x_0-} \sup \operatorname{ap} f(x).$$

Désignons par E^+ l'ensemble des points x_0 en lesquels on a l'inégalité (1) et par A^+ celui des points x_0 en lesquels on a les inégalités (4). Alors $E^+ \subset A^+$. En posant

$$E_+ = \{x_0: \lim_{x\to x_0+} \inf \operatorname{ap} f(x) < f(x_0)\},$$

$$A_+ = \{x_0: \lim_{x\to x_0+} \inf \operatorname{ap} f(x) < \lim_{x\to x_0-} \inf \operatorname{ap} f(x)\},$$

$$E^- = \{x_0: \lim_{x\to x_0-} \sup \operatorname{ap} f(x) > f(x_0)\},$$

$$A^- = \{x_0: \lim_{x\to x_0-} \sup \operatorname{ap} f(x) > \lim_{x\to x_0+} \sup \operatorname{ap} f(x)\},$$

$$E_- = \{x_0: \lim_{x\to x_0-} \inf \operatorname{ap} f(x) < f(x_0)\},$$

$$A_- = \{x_0: \lim_{x\to x_0-} \inf \operatorname{ap} f(x) < \lim_{x\to x_0+} \inf \operatorname{ap} f(x)\},$$

on établit d'une façon analogue les inclusions $E_+ \subset A_+$, $E^- \subset A^-$ et $E_- \subset A_-$.

On vérifie aisément que tout point de discontinuité approximative de la fonction $f(x)$ appartient à l'un des ensembles E^+, E_+, E^-, E_- et par suite à la somme $A = A^+ \cup A_+ \cup A^- \cup A_-$.

L'ensemble A a été étudié par Matysiak [4]. Un sur-ensemble de A, à savoir l'ensemble des points de structure asymétrique approximative d'une fonction, a été envisagé par Kulbacka et Császár. Matysiak et Kulbacka ont montré que l'ensemble A est toujours de I^e catégorie et Császár — qu'il est de mesure nulle (voir Kulbacka [2]). Le théorème 1 se trouve ainsi établi.

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction $f(x)$ qui a en tout point une dérivée approximative finie ou infinie, tout en étant approximativement discontinue aux points d'un ensemble de puissance du continu.*

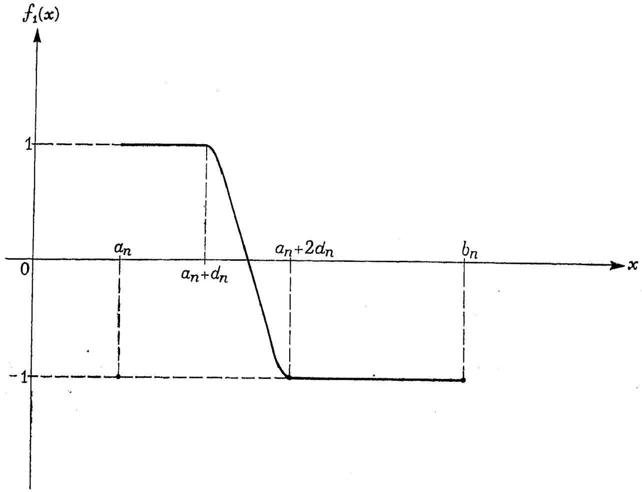
Démonstration. Soit E un ensemble parfait de mesure nulle, non borné inférieurement et supérieurement. Son complément à la droite est la somme d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts (a_n, b_n) dont les extrémités appartiennent à E. Posons

$$d_n = \min\left[\frac{b_n-a_n}{n+2}, \frac{(b_n-a_n)^2}{2}\right]$$

et introduisons la fonction auxiliaire

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad x \in E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n+2d_n, b_n), \\ 1 & \text{pour} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, a_n+d_n\rangle, \\ \cos \pi d_n^{-1}(x-d_n-a_n) & \text{pour} \quad x \in (a_n+d_n, a_n+2d_n) \end{cases}$$

(voir la figure). On voit aisément que la fonction $f_1(x)$ est continue et dérivable en tout point du complément de E. Nous allons montrer d'abord que la dérivée approximative à gauche de la fonction $f_1(x)$ existe en



tout point de E et qu'elle y est nulle. C'est évident pour $x = b_n$. Reste donc à considérer le cas où x est un point d'accumulation à gauche de l'ensemble E. Posons pour $\varepsilon > 0$ arbitraire

$$A_\varepsilon = \bigcup_{\substack{b_n - a_n \geqslant \varepsilon \\ b_n < x}} \langle a_n, b_n \rangle$$

Tout intervalle fini ne contenant évidemment qu'un nombre fini de segments $\langle a_n, b_n\rangle$ tels que $b_n - a_n \geqslant \varepsilon$, l'ensemble A_ε est fermé et on a $x \notin A_\varepsilon$. Soit $h_\varepsilon = \varrho(x, A_\varepsilon)$. Nous allons évaluer la densité moyenne de l'ensemble $D = \{x: f_1(x) > -1\} \cap (x-h, x)$ dans l'intervalle $(x-h, x)$ pour $0 < h < h_\varepsilon$. L'intervalle $(x-h, x)$ se compose de partie commune $E \cap (x-h, x)$, d'infinité dénombrable d'intervalles (a_n, b_n) et, peut-être, d'intervalle $(x-h, b_{\bar n})$, où $x-h \in (a_{\bar n}, b_{\bar n})$. Dans le dernier cas, on a aussi $x - h_\varepsilon < a_{\bar n}$, d'où $b_{\bar n} - a_{\bar n} < h_\varepsilon$, et $(x-h, x) = (x-h, b_{\bar n}) \cup (b_{\bar n}, x)$. La densité moyenne de l'ensemble D dans l'intervalle $(x-h, x)$ ne peut donc surpasser le plus grand des deux nombres

$$D_1 = \frac{|D \cap (x-h, b_{\bar n})|}{b_{\bar n} - x + h} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{|D \cap (b_{\bar n}, x)|}{x - b_{\bar n}}.$$

Lorsque h parcourt l'intervalle $(x - a_{\bar n}, x - b_{\bar n})$, la densité moyenne de l'ensemble D dans l'intervalle $(x-h, b_{\bar n})$ diminue de $2d_{\bar n}/(b_{\bar n} - a_{\bar n})$ à zéro. Il en résulte que $D_1 < 2d_{\bar n}/(b_{\bar n} - a_{\bar n})$ et, vu la définition du nombre d_n, que $D_1 < (b_{\bar n} - a_{\bar n})^2/(b_{\bar n} - a_{\bar n}) < h_\varepsilon$. On a ensuite

$$D_2 = (x - b_{\bar n})^{-1} \sum_{\substack{b_n < x \\ a_n > x-h}} 2d_n < (x - b_{\bar n})^{-1} \sum_{\substack{b_n < x \\ a_n > x-h}} (b_n - a_n)^2,$$

$$\sum_{\substack{b_n < x \\ a_n > x-h}} (b_n - a_n) = x - b_{\bar n},$$

$$b_n - a_n > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{b_n < x \\ a_n > x-h}} (b_n - a_n)^2 \leqslant (x - b_n)^2;$$

par conséquent $D_2 < (x - b_{\bar n})^{-1}(x - b_{\bar n})^2 < h_\varepsilon$. Finalement, la densité moyenne de l'ensemble D dans l'intervalle $(x-h, x)$ où $h < h_\varepsilon$ est inférieure à h_ε.

Or si $\varepsilon \to 0+$, on a $h_\varepsilon \to 0+$. Ainsi la densité à gauche de l'ensemble D aux points $x \in E \setminus \{b_n\}$ est nulle. La densité à gauche du complément de D, c'est-à-dire de l'ensemble $\{x: f_1(x) = -1\}$, aux points $x \in E \setminus \{b_n\}$ est égale à 1, la fonction $f_1(x)$ y est constante et sa dérivée à gauche relative à ce complément est évidemment égale à sa dérivée à gauche approximative, donc nulle. On a en outre

$$\lim_{t \to x-} \operatorname{ap} f_1(t) = -1 \quad \text{pour} \quad x \in E. \tag{5}$$

On voit aisément que la dérivée inférieure à droite aux points $x \in E \setminus \{a_n\}$ est nulle, la dérivée à droite aux points a_n étant égale à $+\infty$. Posons

$$G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{m} d_n, \, a_n + \frac{1}{m} d_n\right).$$

Les ensembles G_n sont ouverts. L'ensemble $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap E)$ est donc un G_δ et on a $G \subset E$. Tous les points a_n appartenant à G, cet ensemble est en même temps dense dans l'ensemble parfait E et par suite de puissance du continu (voir [3], p. 349).

Nous allons montrer que

$$\overline{\lim_{t \to x}} \operatorname{ap} f_1(t) = 1 \quad \text{en tout point } x \in G. \tag{6}$$

En effet, soit $x_0 \in G$. Il existe alors une suite d'intervalles

$$\left\{\left(a_{n_m} - \frac{1}{m} d_{n_m}, \, a_{n_m} + \frac{1}{m} d_{n_m}\right)\right\}_{m=1,2,\ldots},$$

dont chacun contient le point x_0. La densité moyenne de l'ensemble $M = \{x\colon f_1(x) = 1\}$ dans chacun de ces intervalles est au moins égale à 1/2. Par conséquent la densité moyenne de M dans l'un au moins des intervalles

$$\left(a_{n_m} - \frac{1}{m} d_{n_m}, x_0\right) \quad \text{et} \quad \left(x_0, a_{n_m} + \frac{1}{m} d_{n_m}\right) \tag{7}$$

est au moins égale à 1/2. Les longueurs des intervalles (7) tendant vers 0 lorsque $m \to \infty$, la densité supérieure de M au point x_0 est positive. L'ensemble $\{x\colon f_1(x) > 1\}$ étant vide, on a donc nécessairement (6). Les formules (6) et (5) entraînent la discontinuité approximative de la fonction $f_1(x)$ en tout point de G et l'égalité

$$\overline{\lim_{t \to x+}} \operatorname{ap} f_1(t) = 1 \quad \text{pour tout } x \in G.$$

La fonction $f_1(x)$ satisfait donc dans un ensemble ayant la puissance du continu à l'inégalité

$$\underline{\lim_{t \to x-}} \operatorname{ap} f_1(t) < \overline{\lim_{t \to x+}} \operatorname{ap} f_1(t).$$

Un exemple plus compliqué d'une telle fonction a été publié antérieurement par Belowska [1].

Soit, d'autre part, $f_2(x)$ une autre fonction auxiliaire, à savoir continue, croissante, dérivable aux points du complément de l'ensemble E et ayant aux points $x \in E$ la dérivée égale à $+\infty$. On sait que de telles fonctions existent (voir [5], chapitre VI, théorème 7.5).

Posons $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Chacune des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant dérivable aux points du complément de E, la fonction $f(x)$ l'y est aussi et sa dérivabilité y entraîne l'existence de dérivée approximative. Aux points de E, la dérivée approximative à gauche de la fonction $f_1(x)$ est nulle et sa dérivée ordinaire inférieure à droite est non négative. Puisque $f_2'(x) = +\infty$ pour $x \in E$, il vient $f'_{\text{ap}}(x) = +\infty$ pour $x \in E$. La fonction $f(x)$ a donc en tout point une dérivée finie ou infinie.

Reste à prouver que cette fonction est approximativement discontinue dans un ensemble de puissance du continu. Or l'addition d'une fonction continue $f_2(x)$ à une fonction approximativement discontinue $f_1(x)$ n'en altère la discontinuité approximative en aucun point. La fonction $f(x)$ est donc approximativement discontinue en tout point de l'ensemble G, dont il a été démontré qu'il est de puissance du continu.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Belowska, *Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives*, Fundamenta Mathematicae 48 (1960), p. 277-286.

[2] M. Kulbacka, *Sur l'ensemble des points de l'asymétrie approximative*, Acta Scientiarum Mathematicarum Universitatis Szegediensis 21 (1960), p. 90-95.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[4] A. Matysiak, *Sur les limites approximatives*, Fundamenta Mathematicae 48 (1960), p. 363-366.

[5] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1939.

[6] Z. Zahorski, *Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1949), p. 306-323.

[7] W. H. Young, *La symétrie de structure des fonctions de variables réelles*, Bulletin des Sciences Mathématiques 52 (1928), p. 265-280.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 12. 12. 1961