COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

ОБ ОБЩЕМ НЕПОДВИЖНОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ДВУХ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ БИКОМПАКТА В СЕБЯ

В. И. ПОНОМАРЕВ (МОСКВА)

В работах [1] и [2] изучались такие многозначные отображения $f\colon X \to Y$, которые ставят в соответствие каждой точке x пространства X замкнутое множество fx пространства Y. При этом многозначное отображение $f\colon X \to Y$ *непрерывно* (1), если для каждого открытого множества (замкнутого множества) $B \subseteq Y$ множество $A = E(x, fx \subseteq \subseteq B)$ (соответсвенно множество $A' = f'B = E(x, fx \frown B \neq \wedge)$) открыто (соответсвенно замкнуто) в пространстве X. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *косонепрерывным* (1), если для всякого открытого множества $B \subseteq Y$ пространства Y множество $f'B = \bigcup_{y \in B} f'y$, где $f'y = E(x, y \in fx)$ открыто в пространстве X. В работе [2] доказана следующая теорема: для того, чтобы отображение $f\colon X \to Y$ было косонепрерывно, необходимо и достаточно, чтобы имело место включение (2) $f[A] \subseteq [fA]$ для любого множества $A \subseteq X$ (предложение 1). Отображение называется *сильно непрерывным* (1), если оно одновременно непрерывно и косонепрерывно.

В работе [1] доказано, что при непрерывном многозначном отображении f бикомпакта X в себя существует *неподвижное множество для* f, т. е. такое *замкнутое* множество F, что $fF = F$ (предложение 2).

Во всем дальнейшем пространство X есть бикомпакт. В настоящей работе доказывается следующая

(1) Ввиду имеющихся терминологических различий заметим следующее: Речь идет об отображениях *точек* пространства X в замкнутые *подмножества* пространства Y, т. е. в *точки* пространства 2^Y, что поэтому и записывается многими авторами в виде не $f\colon X \to Y$, а $f\colon X \to 2^Y$. Соответственным образом следует понимать в частности формулировку следствия (стр. 7). Отображения, называемые здесь *непрерывными*, *косонепрерывными* и *сильно непрерывными*, совпадают в случае метрических комплектных пространств X соответственно с *полунепрерывными справа*, *полунепрерывными слева* и *непрерывными* отображениями в весьма распространенном смысле [*Примечание редакции*].

(2) Через $[A]$ обозначаем замыкание множества A, через $\wedge$ — пустое множество.

Теорема. *Пусть даны два непрерывных отображения* $f\colon X\to X$ *и* $g\colon X\to X$ *бикомпакта* X *в себя, причем одно из отображений* f *или* g *сильно непрерывно; пусть эти отображения* f *и* g *коммутируют, т. е.* $fg=gf$. *Тогда существует такое замкнутое множество* $X^*\subseteq X$, *что*

$$fX^*=gX^*=X^*,$$

т. е. отображения f *и* g *имеют общее неподвижное множество.*

Доказательству теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Пусть множество* $X_0\subseteq X$ *является неподвижным для отображения* f. *Тогда множество* $X_2=gX_0$ *также неподвижно для отображения* f.

Доказательство. Имеем: $X_2=gX_0=gfX_0=fgX_0=fX_1$.

Лемма 2. *Пусть непрерывное отображение* $f\colon X\to X$ — *косонепрерывно. Пусть*

$$fX_\alpha=X_\alpha \quad (\textit{при каждом } \alpha).$$

Тогда

$$f[\bigcup_\alpha X_\alpha]=[\bigcup_\alpha X_\alpha].$$

Прежде всего, в силу замкнутости ([2]) непрерывного отображения f, будем иметь

$$f[\bigcup_\alpha X_\alpha]\supseteq[f\bigcup_\alpha X_\alpha]=[\bigcup_\alpha fX_\alpha]=[\bigcup_\alpha X_\alpha].$$

Нужно теперь доказать обратное включение, но это включение непосредственно следует из предложения 1, доказанного в [2] и сформулированного выше. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть дана вполне упорядоченная убывающая последовательность замкнутых множеств*

$$\{X_\alpha\},\quad X_{\alpha'}\subseteq X_{\alpha'},\quad \textit{если}\quad \alpha'<\alpha,$$

причем $fX_\alpha=X_\alpha$ *для любого* α.

Тогда множество $X_0=\bigcap_\alpha X_\alpha$ *также является неподвижным для отображения* f.

Доказательство. Очевидно достаточно доказать равенство

$$f\bigcap_\alpha X_\alpha=\bigcap_\alpha fX_\alpha.$$

Включение $\bigcap_\alpha fX_\alpha\supseteq f\bigcap_\alpha X_\alpha$ имеет место всегда.

([2]) Отображение $f\colon X\to X$ называется *замкнутым*, если для любого замкнутого множества $A\subseteq X$ множество fA будет замкнутым в Y. В работе [1] доказывается, что непрерывное отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y непременно замкнуто. Для замкнутости отображения f необходимо и достаточно, чтобы $f[A]\supseteq[fA]$.

Докажем обратное включение. Пусть $y_0\in\bigcap_\alpha fX_\alpha$. Надо доказать, что $y_0\in f\bigcap_\alpha X_\alpha$. Так как $y_0\in fX_\alpha$, то имеется точка $x_\alpha\in X_\alpha$ такая, что $fx_\alpha\in y_0$. Взяв такую точку в каждом X_α, получим последовательность точек $\{x_\alpha,\ \alpha\in\Theta\}$ в бикомпакте X, из которой можно выделить конфинальную подпоследовательность $\{x_{\alpha'},\ \alpha'\in\Theta'\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0\in X$. Так как $X_\alpha\supseteq X_{\alpha+1}$, то $x_0\in\bigcap_\alpha X_\alpha$. Вследствие непрерывности отображения f последовательность замкнутых множеств $\{fx_{\alpha'},\ \alpha'\in\Theta'\}$ будет сходиться к замкнутому множеству fx_0 в следующем смысле (см. [1]): какова бы ни была окрестность Ofx_0 замкнутого множества fx_0, найдется такой индекс α_0', что для всех индексов $\alpha'>\alpha_0'$ всегда $fx_{\alpha'}\subseteq Ofx_0$. У нас $y_0\in fx_{\alpha'}$, следовательно $y_0\in fx_0$, а так как $x_0\in\bigcap_\alpha X_\alpha$, то $y_0\in fx_0\subseteq f\bigcap_\alpha X_\alpha$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Доказательство состоит из двух шагов. Вначале строится такое замкнутое множество X^*, что $fX^*=X^*$ и что $gX^*\subseteq X^*$. Предполагается, что отображение f сильно непрерывно. Это множество X^* будем строить по трансфинитной индукции. В силу предложения 2, доказанного в [1] и сформулированного выше, имеется множество $X_0\subseteq X$, неподвижное для непрерывного отображения f. Введем обозначение

$$X_1=gX_0\cup X_0.$$

Имеем $X_1\supseteq X_0$ и $fX_1=X_1$ (по лемме 1 и лемме 2). Предположим, что мы построили X_α для всех порядковых чисел $\alpha<\beta$ так, что для любой пары чисел $\alpha'<\alpha''<\beta$ выполняются следующие условия:

$$X_{\alpha'}\subseteq X_{\alpha''}, \tag{1}$$

$$fX_\alpha=X_\alpha. \tag{2}$$

Построим X_β. Рассмотрим два случая:

а) β предельное число. Тогда положим

$$X_\beta=[\bigcup_{\alpha<\beta}X_\alpha].$$

Будем иметь $fX_\beta=X_\beta$ в силу леммы 2 и для любой пары α,β, $\alpha<\beta$, всегда

$$X_\alpha\subseteq X_\beta.$$

б) $\beta=\alpha+1$. Тогда полагаем

$$X_\beta=gX_\alpha\cup X_\alpha.$$

Опять $X_\alpha\subseteq X_\beta$ при любом $\alpha<\beta$ и $fX_\beta=X_\beta$ в силу лемм 1 и 2. Итак, мы получаем возрастающую последовательность

$$X_0\subseteq X_1\subseteq\ldots\subseteq X_\alpha\subseteq\ldots$$

замкнутых множеств, причем при любом α непременно

$$fX_\alpha = X_\alpha.$$

Эта последовательность, начиная с некоторого трансфинита α становится стационарной, т. е.

$$Y_0 = X_\alpha = X_{\alpha+1} = \ldots,$$

$$fX_\alpha = X_\alpha, \quad X_{\alpha+1} = gX_\alpha \cup X_\alpha = X_\alpha.$$

Отсюда заключаем, что

$$fY_0 = Y_0, \quad gY_0 \subseteq Y_0.$$

Первый шаг доказательства осуществлен. Далее будем строить вполне упорядоченную убывающую последовательность замкнутых множеств

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_\beta \supseteq \ldots,$$

удовлетворяющих условиям:

$$fY_\beta = Y_\beta \quad \text{и} \quad gY_\beta = Y_{\beta+1}.$$

Введем обозначение $Y_1 = gY_0$. По лемме 1 множество Y_1 является неподвижным для f (так как $fY_0 = Y_0$); получаем $fY_1 = Y_1$ и $Y_1 \subseteq Y_0$. Предположим, что построили Y_β для всех $\beta < \alpha$ так, что выполняются условия:

$$fY_\beta = Y_\beta \text{ для любого } \beta < \alpha,$$

$$Y_{\beta'} \supseteq Y_{\beta''} \text{ для любой пары } \beta' < \beta'' < \alpha.$$

Построим Y_α.

а) Если α есть предельное число, то полагаем

$$Y_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} Y_\beta;$$

по лемме 3 имеем $fY_\alpha = Y_\alpha$ и $Y_\alpha \subseteq Y_\beta$ для любого $\beta < \alpha$.

б) Пусть $\alpha = \alpha' + 1$. Полагаем $Y_\alpha = gY_{\alpha'}$. Во-первых по лемме 1 непременно $fY_\alpha = Y_\alpha$. Нужно доказать, что $Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha'}$. Пусть сначала $\alpha' = \alpha'' + 1$. Тогда $Y_{\alpha'} \subseteq Y_{\alpha''}$ (по предположению индукции). Применяем к этому неравенству отображение g; получаем $gY_{\alpha'} \subseteq gY_{\alpha''}$, т. е. $Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha'}$. Пусть теперь α' есть предельное число. Нужно доказать, что $Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha'}$. Но $Y_{\alpha'} = \bigcap_{\beta<\alpha'} Y_\beta$. Достаточно показать что $Y_\alpha \subseteq Y_\beta$ при любом $\beta < \alpha'$, т. е. что $gY_{\alpha'} \subseteq Y_\beta$ (при любом $\beta < \alpha'$). Но $Y_{\alpha'} \subseteq Y_\beta$, значит $gY_{\alpha'} \subseteq gY_\beta = Y_{\beta+1} \subseteq Y_\beta$, что и требовалось доказать.

Итак, построена трансфинитная последовательность замкнутых множеств $\{Y_\beta\}$ так, что $Y_{\beta'} \subseteq Y_{\beta''}$ при $\beta' > \beta''$, $fY_\beta = Y_\beta$ и $Y_{\beta+1} = gY_\beta$. Начиная с некоторого β, будем иметь $Y_\beta = Y_{\beta+1} = \ldots = X^*$, т. е. $gY_\beta = Y_{\beta+1} = Y_\beta$, так что $Y_\beta = X^*$ есть общее неподвижное множество для отображений f и g. Теорема доказана.

Следствие. *Если даны два непрерывных отображения $f\colon X \to X$ и $g\colon X \to X$ бикомпакта X в себя, одно из которых есть однозначное отображение, причем $fg = gf$, то отображения f и g имеют общее неподвижное множество.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Пономарев, *Новое пространство замкнутых множеств и многозначные отображения бикомпактов*, Доклады Академии Наук СССР 118 (1958), № 6, стр. 1081-1084.

[2] — *Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов*, Математический Сборник 48 (1959), № 2, стр. 191-212.

Reçu par la Rédaction le 27. 5. 1962