COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

SUR LA COMPOSITION COMMUTATIVE DES FONCTIONS

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

Soit $C_{\langle a,b\rangle}$ l'ensemble des fonctions continues définies dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et transformant cet intervalle en lui-même. L'ensemble $C_{\langle a,b\rangle}$ est un semi-groupe par rapport à l'opération de composition des fonctions. Cette opération n'est pas commutative.

Nous allons résoudre partiellement un problème de J. Mioduszewski sur la commutativité de la composition des fonctions (*). Nous nous bornerons aux fonctions définies dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, ce qui n'est pas une restriction de la généralité grâce au lemme 1. Il est facile de donner des exemples de couples commutatifs de fonctions. Tels sont les couples (e, f), (f, f), (g, g^{-1}) où e est la fonction-identité, f une fonction quelconque appartenant à $C_{\langle 0,1\rangle}$, g une fonction strictement monotone et g^{-1} sa fonction inverse. Le semi-groupe $C_{\langle 0,1\rangle}$ contient même certains groupes abéliens, la famille des fonctions x^a (où $a > 0$) par exemple. Voici maintenant le problème posé par J. Mioduszewski: existe-t-il, pour toute fonction $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$, une fonction $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$, distincte de e et f, non monotone si f est monotone et telle que

$$f[g(x)] = g[f(x)]? \tag{1}$$

On voit que le problème est formulé de façon que les exemples des couples commutatifs précités n'en donnent même pas une solution partielle. Or nous allons montrer que, pour toute fonction $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$, il existe une infinité (voir le théorème 2) de fonctions $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ satisfaisant à (1) et que, si f est strictement monotone, il existe un ensemble de puissance du continu (théorème 1) de fonctions g non monotones satisfaisant à (1). Enfin, nous définirons l'exemple d'une fonction $f(x)$ n'appartenant pas à $C_{\langle 0,1\rangle}$, transformant $\langle 0, 1\rangle$ en $\langle 0, 1\rangle$, discontinue seulement en deux points et telle que $g = e$ est la solution unique $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ de l'équation (1).

LEMME 1. *Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies dans un ensemble E et satisfaisant à l'équation* (1) *transforment E en lui-même et si $t = \varphi(x)$ est*

(*) J. Mioduszewski, *On quasi-ordering in the class of continuous mappings*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 233-240, en particulier p. 240, P 372.

une transformation biunivoque de E en un ensemble E^*, alors les fonctions $f^*(t) = \varphi[f[\varphi^{-1}(t)]]$ et $g^*(t) = \varphi[g[\varphi^{-1}(t)]]$ définies dans E^* transforment E^* en lui-même et satisfont à l'équation

$$f^*[g^*(t)] = g^*[f^*(t)]. \tag{2}$$

Nous laissons au lecteur la vérification facile du lemme. En particulier, posons $E = \langle 0, 1\rangle$, $E^* = \langle a, b\rangle$ et soit $t = \varphi(x)$ une transformation linéaire. Alors l'opération $f^* = A(f)$ transforme biunivoquement la famille $C_{\langle 0,1\rangle}$ en $C_{\langle a,b\rangle}$ et conserve la commutativité de la composition des fonctions. On peut donc se borner à l'étude de la famille $C_{\langle 0,1\rangle}$.

LEMME 2. *Soit $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$ une fonction croissante et telle que*

$$f(x) \neq x \quad \text{pour} \quad x \in (0, 1). \tag{3}$$

Alors toute fonction $g(x)$ définie dans l'intervalle aux extrémités x_0 et $x_1 = f(x_0)$ où $0 \neq x_0 \neq 1$, telle que $g(x_1) = f[g(x_0)]$, $0 < g(x) < 1$ et continue peut être prolongée à une fonction $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et satisfaisant à l'équation (1).

Démonstration. Posons $x_n = f(x_{n-1}) = f^{-1}(x_{n+1})$ pour tout n entier. Par suite de (3) et de la continuité de la fonction $f(x)$, on a alors ou bien l'inégalité

$$f(x) < x \quad \text{pour tout } x \in (0, 1), \tag{4}$$

ou bien l'inégalité $f(x) > x$ pour tout $x \in (0, 1)$. Bornons nous au premier cas, la démonstration dans le second cas étant analogue.

Soit $I_n = \langle x_{n+1}, x_n\rangle$. On a $x_n < x_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = 1$. Les intervalles I_n n'empiètent pas les uns sur les autres, mais ils ont des extrémités communes. La fonction $g(x)$ est définie dans I_0 et on a $g(x_1) = f[g(x_0)]$ aux extrémités de cet intervalle. Admettons que la fonction $f(x)$ est déjà définie dans l'intervalle I_n, qu'elle y est continue, satisfait à l'inégalité $0 < g(x) < 1$ et à l'égalité $g(x_{n+1}) = f[g(x_n)]$. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f\{g[f^{-1}(x)]\} & \text{pour} \quad x \in I_{n+1}, \\ f^{-1}\{g[f(x)]\} & \text{pour} \quad x \in I_{n-1}. \end{cases} \tag{5}$$

La fonction $g(x)$ ainsi définie dans I_{n+1} et I_{n-1} est continue et satisfait à l'inégalité $0 < g(x) < 1$ en tout point $x \in I_{n+1} \cup I_n \cup I_{n-1}$. Aussi on a $g(x_{i+1}) = f[g(x_i)]$ où $i = n+1$ et $n-1$ aux extrémités de I_{n+1} et I_n. On voit que si la fonction $g(x)$ a été déjà définie plus tôt dans l'un des intervalles I_{n+1} et I_{n-1} (ce qui est toujours le cas lorsque $n \neq 0$), la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne. Il est aisé de vérifier que l'on a (1) pour $x \in I_n$. La fonction $g(x)$ est donc définie dans l'intervalle $(0, 1) = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_n$ de telle manière qu'elle est continue dans cet intervalle et y satisfait à (1). Reste donc à poser $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ pout avoir (1) aussi aux extrémités de $\langle 0, 1\rangle$, et à montrer que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, la démonstration que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$ étant anogue.

Soit $g(I_0) = C$. Nous avons $g(I_0) = g[f(I_0)] = f(C)$ et, par induction, $g(I_n) = f^n(C)$ car $g(I_{n-1}) = f^{n-1}(C)$ entraîne $g(I_n) = g[f(I_{n-1})] = f[g(I_{n-1})] = f[f^{n-1}(C)] = f^n(C)$. Il résulte facilement de (4) et (5) que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(C) = 0$; vu que $g(I_n) = f^n(C)$, cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} g(I_n) = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

LEMME 3. *Soient $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$ une fonction décroissante, $\xi = f(\xi)$,*

$$f[f(x)] \neq x \quad \text{pour tout } 0 \neq x \neq 1 \text{ et } x \neq \xi \tag{6}$$

et $0 < x_0 < \xi$. Alors toute fonction $g(x)$ définie dans l'intervalle aux extrémités x_0 et $f[f(x_0)] = x_2$, telle que $0 < g(x) < 1$, $g(x_2) = f\{f[g(x_0)]\}$ et continue peut être prolongée à une fonction $g(x) = g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ telle que $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g(\xi) = \xi$ et satisfaisant à l'équation (1).

Démonstration. En raison de la continuité de la fonction $f(x)$ et de l'hypothèse (6), on a ou bien $f[f(x)] < x$ pour tout $x \in (0, \xi)$, ou bien $f[f(x)] > x$ pour tout $x \in (0, \xi)$. Nous nous bornerons au premier cas, la démonstration dans le second étant analogue.

Posons $x_n = f(x_{n-1}) = f^{-1}(x_{n+1})$. La fonction $g(x)$ est définie par hypothèse dans l'intervalle $I_0 = \langle x_2, x_0\rangle$. Admettons qu'elle est déjà définie dans l'intervalle I_n aux extrémités x_n et x_{n+2}, qu'elle y est continue et satisfait aux conditions $0 < g(x) < 1$ et $g(x_{n+2}) = f\{f[g(x_n)]\}$. Soit $g(x)$ la fonction définie dans les intervalles I_{n+1} et I_{n-1} par la formule (5) où $I_{n+1} = f(I_n)$ et $I_{n-1} = f^{-1}(I_n)$. La fonction $g(x)$ se trouve ainsi définie dans tous les intervalles I_n, elle y est continue, satisfait à l'inégalité $0 < g(x) < 1$ et on a $g(x_{n+2}) = f\{f[g(x_n)]\}$ aux extrémités de ces intervalles. De plus, elle y satisfait à (1), ce qu'on vérifie aisément. Les intervalles I_n n'empiètent pas les uns sur les autres, mais les intervalles I_n et I_{n+2} ont une extrémité commune. On a $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n} = (0, \xi)$ et $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n+1} = (\xi, 1)$. De même que dans le lemme 2, on constate l'existence des limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \xi$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$. Posons donc $g(0) = 1$, $g(\xi) = \xi$ et $g(1) = 0$. Alors $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ et on a bien (1) partout.

THÉORÈME 1. *Si la fonction $f \in C_{\langle 0,1\rangle}$ est strictement monotone, il existe des intervalles $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$ tels que toute fonction g définie dans $\langle a, b\rangle$, continue et satisfaisant à l'inégalité $c < g(x) < d$ peut être prolongée à une fonction $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ satisfaisant à* (1).

Démonstration. Si $f = e$, on peut prendre pour a et b des nombres quelconques tels que $c < a < b < d$ où $c = 0$ et $d = 1$. Il suffit alors de prendre pour g une fonction quelconque de $C_{\langle 0,1\rangle}$ qui est un prolongement de la fonction $g(x)$.

Si $f \neq e$, admettons d'abord que la fonction est croissante. Il existe des nombres α et β tels que $\alpha < \beta$, $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$ et que $f(x) \neq x$ pour $\alpha < x < \beta$. Soit $\varphi(x)$ une transformation linéaire de $\langle\alpha, \beta\rangle$ en $\langle 0, 1\rangle$ et telle que $\varphi(\alpha) = 0$. En posant $f^* = \varphi\{f[\varphi^{-1}(x)]\}$, on a $f^* \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$. En vertu du lemme 2, il existe un intervalle I aux extrémités x_0 et $x_1 = f^*(x_0)$ tel que toute fonction $g^*(x)$ définie dans cet intervalle, continue et telle que $0 < g^*(x) < 1$ et $g^*(x_1) = f^*[g^*(x_0)]$ se laisse prolonger à la fonction $g^*(x) = g^* \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ telle que $g^*(0) = 0$, $g^*(1) = 1$ et satisfaisant à (2). Choisissons a et b de façon à avoir $\langle a, b\rangle \subset \varphi^{-1}(I)$. Posons $c = a$ et $d = \beta$. Etant donné une fonction quelconque $g(x)$ vérifiant les hypothèses du théorème, prolongeons-la continûment sur tout l'intervalle $\varphi^{-1}(I) = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1\rangle$ de façon à avoir $g(\bar{x}_1) = f[g(\bar{x}_0)]$ et $c < g(x) < d$. La fonction $g^*(x) = \varphi\{g[\varphi^{-1}(x)]\}$ est alors définie dans l'intervalle I, elle y est continue, satisfait à l'inégalité $0 < g^*(x) < 1$ et on a $g^*(x_1) = f^*[g^*(x_0)]$. En vertu du lemme 2, on peut la prolonger à une fonction $g^* \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ telle que $g^*(0) = 0$, $g^*(1) = 1$ et que l'on ait (2). La fonction $g(x) = \varphi^{-1}[g^*[\varphi(x)]]$ est donc un prolongement de la fonction $g(x)$, définie dans $\langle a, b\rangle$, sur l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$ tout entier et on a $g(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta$ et $g \epsilon C_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Enfin, g satisfait à (1) en vertu du lemme 1.

Posons $g(x) = f(x)$ pour tout x non $\epsilon \langle\alpha, \beta\rangle$. La fonction $f(x)$ transformant chacun des deux ensembles $\langle\alpha, \beta\rangle$ et $\langle 0, 1\rangle - \langle\alpha, \beta\rangle$ en lui-même et satisfaisant à (1) dans chacun d'eux, elle satisfait à (1) dans $\langle 0, 1\rangle$ tout entier. Evidemment, $g \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$.

Admettons à son tour que la fonction f est décroissante. Deux cas sont à envisager: celui où $f[f(x)] = x$ pour tout $x \epsilon \langle 0, 1\rangle$ et celui où il n'en est pas ainsi. Dans le premier cas, choisissons a et b de façon à avoir $0 < a < b < \xi = f(\xi)$. Posons $c = 0$ et $d = 1$. Prolongeons ensuite continûment la fonction $g(x)$ assujettie aux hypothèses du théorème sur l'intervalle $\langle 0, \xi\rangle$ tout entier de façon à avoir $g(\xi) = \xi$, $g(0) = 0$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Posons enfin $g(x) = f\{g[f(x)]\}$ pour tout $x \epsilon (\xi, 1\rangle$. On a alors $g(1) = 1$, $g \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ et la condition (1) est évidemment satisfaite.

Reste le cas où la fonction $f(x)$ est décroissante sans que l'on ait $f[f(x)] = x$ pour tout $x \epsilon \langle 0, 1\rangle$. Il existe alors des nombres α et β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \xi = f(\xi)$, $f[f(\alpha)] = \alpha$, $f[f(\beta)] = \beta$ et que $f[f(x)] \neq x$ pour tout $x \epsilon (\alpha, \beta)$. Soit $\varphi_0(x)$ une transformation linéaire de $\langle\alpha, \beta\rangle$ en $\langle 0, \mu\rangle$, où $\mu = (\beta-\alpha)/(\beta-\alpha+f(\alpha)-f(\beta))$ et telle que $\varphi_0(\alpha) = 0$. Soit $\varphi_1(x)$ une transformation linéaire de l'intervalle $\langle f(\beta), f(\alpha)\rangle$ en l'intervalle $\langle\mu, 1\rangle$ telle que $\varphi_1[f(\beta)] = \mu$. Posons $f^*(x) = \varphi_{1-i}\{f[\varphi_i^{-1}(x)]\}$ où

$$i = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \epsilon \langle 0, \mu\rangle, \\ 1 & \text{pour} \quad x \epsilon \langle \mu, 1\rangle. \end{cases}$$

Alors $f^* \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ et on a $\xi = \varphi^*(\xi)$ pour $\xi = \mu$. Soit $0 < x_0 < \mu$. Désignons par I l'intervalle aux extrémités x_0 et $x_2 = f^*[f^*(x_0)]$. Choisissons à l'intérieur de I deux nombres a^* et b^* tels que $a^* < b^*$. Posons

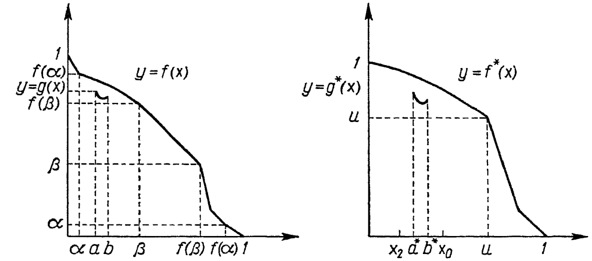

Fig. 1

$a = \varphi_0^{-1}(a^*)$, $b = \varphi_0^{-1}(b^*)$, $c = f(\beta)$ et $d = f(\alpha)$. Si la fonction $g(x)$ satisfait aux hypothèses du théorème, la fonction $g^*(x) = \varphi_i\{g[\varphi_0^{-1}(x)]\}$, où $i = 0$ ou $i = 1$ est définie dans $\langle a^*, b^*\rangle$, y est continue et satisfait à l'inégalité $0 < g^*(x) < 1$. Prolongeons-la continûment, en conservant cette inégalité, sur tout l'intervalle I de façon à avoir $g^*(x_2) = f^*\{f^*[g^*(x_0)]\}$ En vertu du lemme 3, la fonction $g^*(x)$ peut êtrep rolongée sur tout l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ à une fonction $g^* \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ satisfaisant à l'équation (2) et aux égalités $g^*(0) = 1$, $g^*(\mu) = \mu$, $g^*(1) = 0$. Posons $g(x) = f(x)$ pour $x \epsilon \langle 0, \alpha\rangle \cup \langle\beta, f(\beta)\rangle \cup \langle f(\alpha), 1\rangle$. Posons enfin $g(x) = \varphi_j^{-1}\{g^*[\varphi_i(x)]\}$ pour $x \epsilon \langle\alpha, \beta\rangle \cup \langle f(\beta), f(\alpha)\rangle = E$, où j est choisi de façon que la fonction $g(x)$ se trouve définie et qu'elle soit continue lorsque $g^*[\varphi_i(x)] = \mu$. On aura alors $g(\alpha) = f(\alpha)$, $g(\beta) = f(\beta)$, $g[f(\beta)] = f[f(\beta)] = \beta$ et $g[f(\alpha)] = f[f(\alpha)] = \alpha$; en outre, $g(E) = f(E) = E$ et on a (1) pour tout $x \epsilon E$, de même que pour tout $x \epsilon \langle 0, 1\rangle - E$. On constate aisément que $g \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$. Il est ainsi démontré que la fonction $f(x)$ est prolongeable dans tous les cas possibles.

L'ensemble des fonctions définies dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$, continues non monotones et bornées étant de puissance du continu et chacune d'elles étant prolongeable à une solution du l'équation (1), on a le

COROLLAIRE. *Si la fonction $f \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ est strictement monotone, l'ensemble des solutions non monotones de l'équation* (1) *est de puissance du continu.*

THÉORÈME 2. *Quelle que soit la fonction $f \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$, l'ensemble des fonctions $g \epsilon C_{\langle 0,1\rangle}$ satisfaisant à l'équation* (1) *est infini.*

Démonstration. Posons $g_1(x) = f(x)$ et $g_m(x) = f[g_{m-1}(x)]$. On voit immédiatement que toutes les fonctions $g_n(x)$ satisfont à l'équation (1). Si $g_n(x) \neq g_m(x)$ pour $n \neq m$, il existe une infinité de solutions de cette équation. Reste à étudier le cas où il existe deux nombres m_0 et n_0 (où $m_0 < n_0$) tels que $g_{m_0}(x) = g_{n_0}(x)$. Alors $g_{n_0}(x) = g_{n_0-m_0}[g_{m_0}(x)]$, d'où $g_{n_0-m_0}(x) = x$. On a ensuite $f[g_{n_0-m_0-1}(x)] = g_{n_0-m_0}(x) = x$. La fonction $f(x)$ est donc inverse de $g_{n_0-m_0-1}(x)$ et par suite elle est univalente. Comme continue, elle est strictement monotone. Il existe donc en vertu du corollaire qui précède une infinité de fonctions $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ satisfaisant à (1).

Exemple. Soit $\eta \in \langle 0, 1\rangle$ un nombre irrationnel. Posons

$$f(x) = \begin{cases} x+\eta & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1-\eta, \\ x+\eta-1 & \text{pour} \quad 1-\eta < x < 1, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 1. \end{cases}$$

La fonction f transforme donc l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ en lui-même, mais elle est discontinue en deux points. Nous allons montrer que la seule fonction $g \in C_{\langle 0,1\rangle}$ qui satisfait à l'équation (1) est la fonction $g = e$. En posant $\xi_0 = g(\xi_0)$, (1) entraîne en effet $f(\xi_0) = g[f(\xi_0)]$. Le point $\xi_1 = f(\xi_0)$ est donc un point fixe de la transformation g. En posant $\xi_1 = f(\xi_{n-1})$, on constate par récurrence que tous les nombres ξ_n sont des points fixes de la transformation g. Or l'ensemble des nombres ξ_n étant dense dans $\langle 0, 1\rangle$, la fonction continue g, dont l'ensemble des points fixes est dense, est nécessairement la fonction-identité.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 3. 8. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

DIFFERENTIABILITY OF MONOTONIC FUNCTIONS

BY

L. A. RUBEL (URBANA, ILL.)

This paper gives still another proof of the theorem of Lebesgue that a non-decreasing function $f(x)$ on a closed interval $[a, b]$ has a finite derivative $f'(x)$ almost everywhere. Riesz [1], p. 5-9, has proposed an elegant elementary proof that uses no measure theory beyond that of sets of measure zero. The proof is elegant and simple in the case where $f(x)$ is continuous, but the details ([2], p. 69-75) of the straightforward extension of Riesz's proof to the discontinuous case are troublesome and tedious. We use only elementary methods, borrowing half of Riesz's proof. Our proof for the general case is then no longer than Riesz's proof for the continuous case.

Recently in this journal, Boas [3] gave a simple proof, but one that required some measure-theoretic preliminaries, that if f is a jump function, then f' exists and is zero almost everywhere. Since each monotonic function is the sum of a monotonic continuous function and a jump function, the result for arbitrary monotonic function follows from the result for continuous functions and for jump functions. There shortly followed a completely elementary proof for jump functions by Lipiński [4]. We end this paper with a short proof that f' is zero almost everywhere if f is a jump function.

The principal innovation in our proof of Lebesgue's theorem is the idea of studying a continuous inverse of $f(x)$ to make the extension to the discontinuous case in a painless way. We take as our starting point Lemma 1, which is the second part of what Riesz proved in detail.

Lemma 1. *If $F(y)$ is continuous and non-decreasing on $[A, B]$, then $F'(y) \leqslant +\infty$ exists almost everywhere.*

The first part of Riesz's proof shows that $F'(y) < +\infty$ almost everywhere. We do not need this fact in Lemma 1, and will give a separate proof later that the derivative is finite almost everywhere even in the discontinuous case.

Lemma 2. *Let $f(x)$ be a strictly increasing function on $[a, b]$. Then $f(x)$ has a continuous inverse; that is, there exists a continuous, non-de-*