Démonstration. Il suffit de montrer que la condition (27) est satisfaite. Or cela résulte de l'estimation

$$\frac{1}{n^{a}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}\Big|\sum_{j=1}^{r}x_j[h_{ij}(t, s+t)-p_{s+t|j}]\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{a}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}\sum_{j=1}^{r}|x_j|\,|h_{ij}(t, s+t)-p_{s+t|j}|$$

$$\leqslant L\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n^{a}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}|h_{ij}(t, s+t)-p_{s+t|j}|$$

et d'une propriété des chaînes d'une ergodicité stationnaire de degré a où $0 < a \leqslant 1$ (cf. [9], lemme).

En terminant, je tiens à remercier les professeurs E. Marczewski, C. Ryll-Nardzewski et K. Urbanik pour leurs conseils concernant la rédaction définitive de ce mémoire.

TRAVAUX CITÉS

[1[C. H. Бернштейн, *Теория вероятностей*, Москва-Ленинград 1946.

[2] — *Распространение предельной теоремы вероятностей на суммы зависимых величин*, Успехи Математических Наук 10 (1944), p. 65-114.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, New York 1957.

[4] E. Frankx, *Sur la convergence forte*, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs-Mathematiker 59 (1959), Nr. 2, p. 293-296.

[5] P. Lévy, *Loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées*, Journal de mathématiques pures et appliquées 15 (1936), p. 11-24.

[6] M. Loève, *Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*, ibidem 24 (1945), p. 249-318.

[7] B. de Finetti, *La legge dei grandi numeri nel caso dei numeri aleatori equivalenti*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei 18 (1933), p. 203-207.

[8] A. Kolmogoroff, *Ein einfacher Beweis des Birkhoff-Khintchinschen Ergodensatzes*, Математический Сборник 2 (44) (1937), p. 367-368.

[9] I. Koźniewska, *Ergodicité et stationnarité des chaînes de Markoff variables à un nombre fini d'états possibles*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 333-346.

Reçu par la Rédaction le 21. 2. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X . 1963 FASC. 2

SUR LE CONTACT DES COURBES DANS LES ESPACES MÉTRIQUES GÉNÉRAUX

PAR

S. GOŁĄB ET Z. MOSZNER (CRACOVIE)

§ 1. La théorie des courbes dans les espaces métriques généraux entre progressivement dans le domaine de plus en plus vaste, dominé par la géométrie différentielle classique des courbes. Il y a quelques années, parut la note de Haantjes et Nottrot [1], dans laquelle les auteurs ont introduit la notion de direction (appliquée au point fixé d'un espace métrique général), notion fondée sur celle de mesure d'un angle, introduite par Menger [2] pour les triplets. Cependant cette notion de mesure, bien adaptée à l'avis de Haantjes à l'espace euclidien, n'est pas généralement adéquate. C'est pourquoi l'idée nous est venue de baser la notion de direction sur une autre qui nous semble bien adaptée aux espaces généraux, à savoir sur celle de contact des arcs simples. Les arcs simples (ensembles des points homéomorphes au segment $0 \leqslant x \leqslant 1$) peuvent ne pas exister dans un espace métrique général. Tel est par exemple l'espace quelconque avec la métrique zéro-un, ou bien un ensemble au plus dénombrable quelconque avec la métrique arbitraire. Nous n'allons pas nous occuper ici de l'existence des arcs simples dans les espaces considérés, mais envisagerons plus précisement la notion de contact entre eux dans les espaces métriques généraux (autant qu'il y existent), discuter les difficultés liés à cette notion et, entre autres, établir un théorème qui n'est pas connu à notre avis même pour les espaces euclidiens.

§ 2. Soit E l'espace pourvu d'une métrique satisfaisant aux postulats connus de Fréchet. Les éléments de l'espace E, appelés dans la suite les *points*, seront désignés par des minuscules latines, les majuscules latines étant reservées pour désigner les courbes, en particulier les arcs simples. La distance entre p et q sera designée par $\varrho(p, q)$.

La distance d'un point $a \epsilon E$ à l'ensemble $A \subset E$, définie par la formule

$$\varrho(a, A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{x \epsilon A} \varrho(a, x), \tag{1}$$

peut ne pas être atteinte pour certains points $x \epsilon A$. Toutefois, si l'ensemble A est compact, il existe pour tout $a \epsilon A$ au moins un point $x \epsilon A$ pour lequel cette distance est atteinte.

Soient C_1 et C_2 deux arcs simples sortant d'un même point p_0. Pour définir que l'arc C_2 est tangent au point p_0 à l'arc C_1, nous introduirons la notion de projection du point a sur un arc C de l'espace E.

Définition 1. Soit C un arc simple paramétrisé à l'aide d'un paramètre τ variant dans l'intervalle fermé $[0, \delta]$ avec l'origine fixée $p_0 = p(0)$. Etant donné un point $a \in E$ quelconque, a' sera dit *la projection du point a sur l'arc C* lorsque $a' = p(\tau)$ est le seul point de l'arc C qui correspond à la plus petite valeur de τ telle que

(2) $$\varrho(a, p(\tau)) = \varrho(a, C).$$

Définition 2. L'arc C_2 sera dit *tangent à l'arc C_1 au point p_0* lorsque

(3) $$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 0,$$

où p_2 est le point variable de l'arc C_2, différent de p_0, et p_2' est la projection de p_2 sur l'arc C_1. Nous écrirons (3) brièvement comme il suit:

(4) $$C_2 T_{p_0} C_1,$$

en omettant l'indice p_0 dans les cas où ce point est fixé.

On voit facilement que *la relation T_{p_0} est réflexive*. En prenant $C_2 = C_1$, nous voyons que la projection p_2' du point p_2 sur C_1 est le point p_2 lui-même, puisque pour tous les points $p \in C_2$ correspondants aux autres valeurs du paramètre τ, on a $\varrho(p_2, p) > 0$ et la relation (3) se trouve satisfaite trivialement.

La définition adoptée de la relation T_{p_0} n'étant pas symétrique, la question se pose si la relation T_{p_0} elle-même est symétrique, c'est-à-dire si l'on a l'implication

(5) $$C_2 T_{p_0} C_1 \Rightarrow C_1 T_{p_0} C_2.$$

Kuczma nous a indiqué que (5) peut être en défaut. Un contre-exemple de (5) sera donné après le théorème 2 même pour les arcs C_1 et C_2 rectifiables. A présent, nous allons montrer que *la relation T est transitive*.

§ 3. Théorème 1. $C_3 T C_2 \cdot C_2 T C_1 \Rightarrow C_3 T C_1$.

Commençons par établir le

Lemme. *$C_2 T C_1$ entraîne l'égalité*

(6) $$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_0, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 1.$$

On a en effet d'après la loi du triangle

$$\varrho(p_0, p_2) - \varrho(p_2, p_2') \leqslant \varrho(p_0, p_2') \leqslant \varrho(p_0, p_2) + \varrho(p_2, p_2'),$$

d'où

$$1 - \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} \leqslant \frac{\varrho(p_0, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} \leqslant 1 + \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)},$$

ce qui entraîne (6) en vertu de (3).

Passons à la démonstration du théorème 1. Désignons
par p le point parcourant l'arc C_3, mais différent de p_0,
par p' la projection du point p sur l'arc C_1,
par p'' la projection du point p sur l'arc C_2,
par $\tilde{p}$ la projection du point p'' sur l'arc C_1.

On a par hypothèse d'après la définition 2

(7) $$\lim_{p \to p_0} \frac{\varrho(p, p'')}{\varrho(p_0, p)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p'' \to p_0} \frac{\varrho(p'', \tilde{p})}{\varrho(p_0, p'')} = 0.$$

La première de ces relations implique d'après le lemme que $p \to p_0$ entraîne $p'' \to p_0$, d'où en vertu de la seconde

(8) $$\lim_{p \to p_0} \frac{\varrho(p'', \tilde{p})}{\varrho(p_0, p'')} = 0.$$

Il s'ensuit de la définition 1 que

(9) $$\varrho(p, p') \leqslant \varrho(p, \tilde{p}').$$

Considérons le quotient $\varrho(p, p')/\varrho(p_0, p)$. On a d'après (9), en appliquant l'inégalité du triangle,

(10) $$\frac{\varrho(p, p')}{\varrho(p_0, p)} \leqslant \frac{\varrho(p, \tilde{p})}{\varrho(p_0, p)} \leqslant \frac{\varrho(p, p'')}{\varrho(p_0, p)} + \frac{\varrho(p'', \tilde{p})}{\varrho(p_0, p)} = \frac{\varrho(p, p'')}{\varrho(p_0, p)} + \frac{\varrho(p'', \tilde{p})}{\varrho(p_0, p'')} \cdot \frac{\varrho(p_0, p'')}{\varrho(p_0, p)}$$

et d'après le lemme,

$$\frac{\varrho(p_0, p'')}{\varrho(p_0, p)} \to 1.$$

En vertu de (8) et de la première des relations (7) le membre droit de l'inégalité (10) converge donc vers zéro, d'où

$$\lim_{p \to p_0} \frac{\varrho(p, p')}{\varrho(p_0, p)} = 0,$$

c'est-à-dire $C_3 T C_1$, c. q. f. d.

En cherchant des conditions les plus faibles possibles qu'il suffirait d'ajouter à l'hypothèse $C_2 T C_1$ pour en déduire $C_1 T C_2$, nous fûmes amenés au théorème 2. On y verra qu'il est superflu de faire aucune hypothèse complémentaire sur l'arc C_2, mais quant à l'arc C_1, nous admettons qu'il a *la propriété d'Archimède* au point p_0 (voir [3]), c'est-à-dire que

$$\lim_{p \to p_0} \frac{l(\widehat{p_0 p})}{\varrho(p_0, p)} = 0,$$

où $l(\widehat{p_0 p})$ désigne la longueur de l'arc $\widehat{p_0 p}$.

THÉORÈME 2. *Lorsque les arcs C_1 et C_2 ont la même extrémité p_0, que $C_2 T_{p_0} C_1$ et que l'arc C_1 a la propriété d'Archimède au point p_0, on a $C_1 T_{p_0} C_2$.*

Démonstration. Considérons pour l'arc C_1 la paramétrisation naturelle, en désignant par σ la longueur de l'arc $p_0 p_1$, où p_1 parcourt l'arc C_1. Admettons que le paramètre sur C_2 varie sur un intervalle $[0, \delta]$ et que la valeur du paramètre égale à zéro correspond au point p_0. Considérons l'ensemble des points p de l'arc C_2, pour lesquels $\varrho(p, p_0) = \sigma$. Pour $\sigma > 0$ suffisamment petit, il existe dans cet ensemble un point univoquement déterminé qui a la plus petite valeur du paramètre sur C_2. Nous désignerons un tel point dans la suite par p_2 ($p_2 = p_2(\sigma)$). Désignons en outre par p_2' la projection du point p_2 sur l'arc C_1 et par σ' la valeur du paramètre σ sur C_1 qui correspond à la projection p_2'.

On a par hypothèse

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 0, \tag{11}$$

en vertu du lemme

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_0, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 1 \tag{12}$$

et en vertu de la propriété d'Archimède de l'arc C_1 au point p_0

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\sigma'}{\varrho(p_0, p_2')} = 1. \tag{13}$$

Vu que $p_1 \to p_0$ entraîne $p_2 \to p_0$, nous concluons de (12) que $p_1 \to p_0$ entraîne $p_2 \to p_0$. Il en résulte en vertu de (12) et (13) que

$$\lim_{p_1 \to p_0} \frac{\sigma'}{\sigma} = \lim_{p_1 \to p_0} \frac{\sigma'}{\varrho(p_0, p_2)} = \lim_{p_1 \to p_2} \frac{\sigma'}{\varrho(p_0, p_2')} \cdot \frac{\varrho(p_0, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 1 \cdot 1 = 1 \tag{14}$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\varrho(p_1, p_2)}{\sigma} = 0. \tag{15}$$

En effet, on a d'après l'inégalité du triangle

$$\varrho(p_1, p_2) \leqslant \varrho(p_1, p_2') + \varrho(p_2, p_2') \leqslant |\sigma - \sigma'| + \varrho(p_2, p_2'),$$

puisque la distance $\varrho(p_1, p_2')$ ne dépasse pas la longueur de la partie de l'arc C_1 comprise entre les points p_1 et p_2', la longueur de cette partie étant égale à $|\sigma - \sigma'|$.

En divisant la dernière inégalité membre à membre par σ, il vient

$$\frac{\varrho(p_1, p_2)}{\sigma} \leqslant \left|1 - \frac{\sigma'}{\sigma}\right| + \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\sigma} = \left|1 - \frac{\sigma'}{\sigma}\right| + \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)}.$$

La dernière somme convergeant vers zéro en vertu de (14) et (11), l'égalité (15) se trouve établie.

Désignons à présent par p_1' la projection du point p_1 sur l'arc C_2. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{p_1 \to p_0} \frac{\varrho(p_1, p_1')}{\varrho(p_0, p_1)} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\varrho(p_1, p_1')}{\varrho(p_0, p_1)} = 0. \tag{16}$$

On a d'après l'inégalité du triangle

$$\varrho(p_0, p_1') \geqslant \varrho(p_0, p_1) - \varrho(p_1, p_1'), \tag{17}$$

d'où

$$\frac{\varrho(p_0, p_1')}{\sigma} \geqslant \frac{\varrho(p_0, p_1)}{\sigma} - \frac{\varrho(p_1, p_1')}{\sigma} \tag{18}$$

et d'après la définition 1,

$$\frac{\varrho(p_1, p_1')}{\sigma} \leqslant \frac{\varrho(p_1, p_2)}{\sigma}. \tag{19}$$

Il en résulte en vertu de (15) que

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\varrho(p_1, p_1')}{\sigma} = 0 \tag{20}$$

et on a en vertu de la propriété d'Archimède admise

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\varrho(p_0, p_1)}{\sigma} = 1. \tag{21}$$

Par conséquent, en vertu de (20) et (21), la limite du membre droit de l'inégalité (18) est égale à 1. Il s'ensuit en particulier que

$$\varrho(p_0, p_1) - \varrho(p_1, p_1') > 0$$

pour σ suffisamment petit, d'où en vertu de (17)

$$\frac{1}{\varrho(p_0, p_1')} \leqslant \frac{1}{\varrho(p_0, p_1) - \varrho(p_1, p_1')}.$$

En multipliant cette inégalité membre à membre par (19) et par σ, il vient

$$\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1')} \leqslant \frac{\varrho(p_1,p_2)}{\varrho(p_0,p_1)-\varrho(p_1,p_1')} = \frac{\dfrac{\varrho(p_1,p_2)}{\sigma}}{\dfrac{\varrho(p_0,p_1)}{\sigma}-\dfrac{\varrho(p_1,p_2')}{\sigma}},$$

d'où en vertu de (15), (20) et (21)

$$\lim_{p_1\to p_0}\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1')}=0. \tag{22}$$

On a d'après l'inégalité du triangle

$$\varrho(p_0,p_1')-\varrho(p_1,p_1')\leqslant\varrho(p_0,p_1)\leqslant\varrho(p_0,p_1')+\varrho(p_1',p_1),$$

d'où

$$1-\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1')}\leqslant\frac{\varrho(p_0,p_1)}{\varrho(p_0,p_1')}\leqslant 1+\frac{\varrho(p_1',p_1)}{\varrho(p_0,p_1')},$$

donc en vertu de (22)

$$\lim_{p_1\to p_0}\frac{\varrho(p_0,p_1)}{\varrho(p_0,p_1')}=1. \tag{23}$$

D'après l'identité

$$\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1)}=\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1')}\cdot\frac{\varrho(p_0,p_1')}{\varrho(p_0,p_1)},$$

(22) et (23) entraînent (17), c. q. f. d.

EXEMPLE. Soit, sur le plan euclidien, C_2 le segment rectiligne aux extrémités $(0,0)$ et $(0,1)$. L'arc C_1 sera défini à l'aide de trois suites infinies $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ de points définis par leurs coordonnées comme suit. Soient $a_n=1/2^n$ et $\delta_n=1/4^n$, les points

$$a_n(a_n+\delta_n,0),\qquad c_n\,(a_n-\delta_n,0)\qquad\text{et}\qquad b_n(a_n,a_n)$$

les n-ièmes points des trois suites en question et C_1 l'arc rectiligne composé de point $(0,0)$ et d'infinité de segments

$$a_1b_1\cup b_1c_1\cup c_1a_2\cup a_2b_2\cup b_2c_2\cup c_2a_3\cup\ldots$$

Soit p_2 un point arbitraire parcourant l'arc (le segment) C_2 sur le plan euclidien, c'est-à-dire supposé métrisé par la distance ϱ pythagoréenne habituelle. Lorsque la projection p_2' du point p_2 sur l'arc C_1 coïncide avec p_2, c'est-à-dire que p_2 se trouve sur l'un des segments $a_{n+1}c_n$, on a $\varrho(p_2,p_2')=0$ et lorsque le point p_2 est situé sur l'un des segments a_nc_n, on a $\varrho(p_2,p_2')\leqslant\delta_n$, comme le montre le triangle $\triangle a_nb_nc_n$. On a donc toujours

$$\frac{\varrho(p_2,p_2')}{\varrho(p_0,p_2)}\leqslant\frac{\delta_n}{\varrho(p_0,c_n)}=\frac{\delta_n}{a_n-\delta_n}=\frac{\dfrac{1}{4^n}}{\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{4^n}}=\frac{1}{2^n-1},$$

d'où $\dfrac{\varrho(p_2,p_2')}{\varrho(p_0,p_2)}\to 0$ avec $p_2\to p_0$, c'est-à-dire $C_2T_{p_0}C_1$.

Par contre, si $p_1=b_n$, la projection p_1' coïncide avec le point $(a_n,0)$ et on a $\varrho(p_1,p_1')=a_n$, d'où

$$\frac{\varrho(p_1,p_1')}{\varrho(p_0,p_1)}=\frac{a_n}{a_n\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

et ce rapport ne converge pas vers 0. La relation $C_1T_{p_0}C_2$ est donc dans ce cas en défaut.

Notons que, dans ce contre-exemple, l'arc C_2 est le plus régulier possible et l'arc C_1 est rectifiable, mais il n'a pas de propriété d'Archimède au point p_0.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Haantjes and R. Nottrot, *Distance geometry. Directions in metric spaces. Torsion*, Indagationes Mathematicae 17 (1955), p. 405-410.

[2] K. Menger, *Some applications of point set methods*, Annals of Mathematics, (2) 32 (1931), p. 739-760.

[3] P. Hartman and A. Wintner, *On the problem of geodesics in the small*, American Journal of Mathematics 73 (1951), p. 132-148.

Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1962