COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE LICHTENSTEIN DANS LA DYNAMIQUE DES MILIEUX DÉPOURVUS DE COHÉSION

PAR

W. WOLIBNER † (WROCŁAW)

PUBLICATION POSTHUME RÉDIGÉE PAR A. KRZYWICKI

Cette communication concerne le mouvement spatial d'un milieu continu de masse totale infinie dans lequel le tenseur des tensions superficielles est identiquement nul ("vollkommen inkohärentes Medium" selon la dénomination de Lichtenstein [1]) et les seules forces agissantes sont celles de gravitation (d'attraction mutuelle). L'hypothèse de masse totale infinie pouvant conduire à la divergence des intégrales qui expriment la force, Lichtenstein a généralisé, en envisageant un problème analogue (voir [1]), la loi de gravitation de façon à donner un sens à des intégrales divergentes (voir plus loin, formule (2)). C'est ainsi qu'il est parvenu a établir l'existence du mouvement durant un intervalle de temps dans le cas particulier d'un milieu remplissant entièrement l'espace et ayant une densité constante au moment initial.

Le but de cette communication est de résoudre le problème analogue pour une autre répartition initiale des masses, à savoir en supposant qu'au moment initial la masse remplit un ensemble G_0 composé d'infinité des sphères fermées de rayon $\eta < 1/2$ et ayant pour centres tous les sommets d'un réseau quadratique plan aux côtés égaux à 1, la densité des masses étant supposée au moment initial partout la même [1], comme dans le travail précité [1].

La position au moment t d'une particule mobile du milieu située au moment initial dans le point $\boldsymbol{a}$ définit une fonction $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$. Considérée comme fonction du point $\boldsymbol{a} \in G_0$, elle détermine pour tout t fixé

[1] Ce problème intéressait Wolibner depuis une trentaine d'années. Il a rapporté à la séance du 25. IV. 1947 de la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Wrocław (voir Colloquium Mathematicum I. 1, p. 46) sur la solution donnée par Lichtenstein, qui mourut en 1932 sans avoir publié ce résultat dont l'énoncé seul a été connu à Wolibner. Il l'a donc muni de sa propre démonstration, en vue d'en faire une publication posthume de Lichtenstein (voir ibidem). Il en a fait finalement, en 1961, une communication pour Colloquium Mathematicum. Le texte actuel est une version remaniée, complétée et plus détaillée de sa communication.

une transformation de l'ensemble G_0 en ensemble $G_t = \boldsymbol{x}(G_0)$. Lorsque cette transformation est une homéomorphie $G_0 \overset{\longleftrightarrow}{\boldsymbol{x}} G_t$ pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$ où $t_0 > 0$ et qu'elle est en outre continue par rapport à t, on dit que la fonction $\boldsymbol{x}$ définit dans le segment du temps $0 \leqslant t \leqslant t_0$ un mouvement du milieu qui remplissait l'ensemble G_0 au moment initial.

Admettons que la densité initiale des masses en tout point de G_0 est égale à 1. La densité $\varrho_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t)$ au point mobile $\boldsymbol{x}$ s'exprime par la formule

$$\varrho_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t) = \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)}\right)^{-1} \tag{1}$$

où x_1, x_2 et x_3, de même que a_1, a_2 et a_3 sont des composantes des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{a}$ respectivement dans un système orthogonal des coordonnées.

En supposant que c'est un système inerte, le mouvement du milieu se trouve déterminé par l'équation du mouvement

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t),$$

$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}$ étant la force de gravitation généralisée définie par les formules

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t) = \boldsymbol{F}^*[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), t], \\ \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{z}, t) = \varkappa \lim_{R\to\infty} \int_{G_t \cap K_{\boldsymbol{z},R}} \nabla(1/r)\, \varrho^*(\boldsymbol{y}, t)\, d\boldsymbol{y}, \end{gathered} \tag{2}$$

où $\varkappa$ est la constante de gravitation, $K_{\boldsymbol{z},R}$ la sphère de centre $\boldsymbol{z}$ et de rayon R, ∇ l'opération de gradient par rapport aux coordonnées z_i du point $\boldsymbol{z}$, $r = |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|$ la longueur du vecteur $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$, $\varrho^* = \varrho(\boldsymbol{x}, t)$ la fonction donnée par l'équation

$$\varrho^*[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), t] = \varrho_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t)$$

et $d\boldsymbol{y}$ l'élément du volume au point $\boldsymbol{y}$. La lettre $\boldsymbol{y}$ désignera toujours le point variable de l'intégration.

Soient $\boldsymbol{x}^0$ la fonction-identité définie pour tout point $\boldsymbol{a} \in G_0$ et $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{a})$ la répartition initiale des vitesses de masses. En intégrant deux fois l'équation du mouvement par rapport au temps, elle prend la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{a})t + \int_0^t dt'' \int_0^{t''} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t')\, dt'. \tag{3}$$

Considérons une fonction vectorielle $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)$ définie pour tout $\boldsymbol{a} \in G_0$ et pour tout t du segment $0 \leqslant t \leqslant t^*$ où $t^* > 0$, continue par rapport

à $\boldsymbol{a}$ et à t, ayant en outre les dérivées d'ordre 1 continues par rapport à $\boldsymbol{a}$ et assujettie aux conditions

$$\begin{gathered} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)| \leqslant C, \quad |\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)| \leqslant C, \\ |\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}', t) - \nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)| \leqslant C|\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}|^{\lambda} \end{gathered} \tag{4}$$

pour tout $\boldsymbol{a} \in G_0$, $\boldsymbol{a}' \in G_0$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$ et pour des constantes positives C et $\lambda \leqslant 1$. Chaque condition où figure le signe du gradient $\nabla_{\boldsymbol{a}}$ est entendue ici comme système de trois conditions analogues pour les composantes $\partial\boldsymbol{v}/\partial a_i$ du vecteur $\boldsymbol{v}$.

Définissons la norme $\| \|_1$ de l'élément $\boldsymbol{v}$ par la formule

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \inf_{\{C\}} C, \tag{5}$$

où $\{C\}$ est, pour $\boldsymbol{v}$ donné, l'ensemble des constantes C qui satisfont à (4).

Notons que la norme $\| \|_1$ se trouve définie par (5) en particulier pour les fonctions $\boldsymbol{v}$ indépendantes de t; telle est donc par exemple la fonction $\boldsymbol{u}^0$ considérée dans (3).

Soit B_1 l'espace des fonctions $\boldsymbol{v}$ telles que

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}^0\|_1 < \infty,$$

$\boldsymbol{x}^0$ désignant, comme dans (3), la transformation-identité $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{a}$. L'espace B_1 ainsi défini est complet.

On peut montrer (voir [1] et [2]) que si la fonction $\boldsymbol{x}$ satisfait à la condition

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}^0\|_1 \leqslant \omega_0$$

pour une constante ω_0 suffisamment petite et assujettie à la condition

$$1 - 2\eta - 2\omega_0 > 0, \tag{6}$$

où η est, comme auparavant, le rayon des sphères formant G_0 (condition assurant l'absence de points communs de G_0 et $\boldsymbol{v}(G_0)$), alors $\boldsymbol{v}$ est une homéomorphie entre les ensembles G_0 et $\boldsymbol{v}(G_0)$.

Soit S l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{v} \in B_1$ qui satisfont à la condition

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}^0\|_1 \leqslant \omega_0/2. \tag{7}$$

Alors on a le

THÉORÈME. *Si les seules forces qui agissent dans un milieu continu remplissant au moment initial un ensemble de points G_0 avec une densité constante $\varrho_0 = 1$ sont les forces de gravitation généralisées, définies par les formules (2), il existe dans l'ensemble $S \subset B_1$, pour toute répartition $\boldsymbol{u}^0$ des vitesses initiales telles que $\|\boldsymbol{u}^0\|_1 < \infty$, une solution unique $\boldsymbol{x}$ de l'équation (3), solution qui décrit le mouvement de ce milieu pendant un segment $0 \leqslant t \leqslant t_0$ du temps où $t_0 > 0$.*

En outre, pour tout t de ce segment, la frontière de l'ensemble G_t possède une normale satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant λ.

Pour démontrer ce théorème, nous établirons deux propriétés suivantes de la fonction $\boldsymbol{F_x}$ définie par les formules (2): on a pour tout $\boldsymbol{x} \epsilon S$ et tout $\boldsymbol{x}' \epsilon S$

$$\|\boldsymbol{F_x}\|_1 \leqslant \Omega_0, \tag{8}$$

$$\|\boldsymbol{F_{x'}} - \boldsymbol{F_x}\|_1 \leqslant \Omega_0 \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|_1 \tag{9}$$

où Ω_0 est une constante ne dépendant que de ω_0.

En désignant, pour abréger, par $\Phi(\boldsymbol{x})$ le membre droit de l'équation (3), elle prend la forme $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x})$ où $\Phi(\boldsymbol{x})$ possède en vertu de (8) et (9) les propriétés suivantes:

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^0\|_1 \leqslant t\|\boldsymbol{u}^0\|_1 + t^2\Omega_0/2,$$

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}') - \Phi(\boldsymbol{x})\|_1 \leqslant t^2\Omega_0\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|_1/2.$$

Par conséquent, si le nombre $t_0 > 0$ est suffisamment petit, on a pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^0\|_1 \leqslant \omega_0/2,$$

$$\|\Phi(\boldsymbol{x}') - \Phi(\boldsymbol{x})\|_1 \leqslant \mu\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{où} \quad 0 < \mu < 1$$

et il existe alors, en vertu du théorème de Banach, une solution unique $\boldsymbol{x} \epsilon S$ de l'équation (3). La démonstration du théorème se réduit ainsi à celle des propriétés (8) et (9).

Elle sera basée sur un lemme qui résulte du lemme de Lichtenstein (voir [1], p. 612-613, et [2]). Pour l'énoncer d'une manière plus simple, nous allons introduire un espace linéaire auxiliaire B_0^H de fonctions scalaires $\vartheta(\boldsymbol{a})$ définies dans un ensemble fermé et borné de points H et assujetties aux conditions

$$|\vartheta(\boldsymbol{a})| \leqslant C,$$

$$|\vartheta(\boldsymbol{a}') - \vartheta(\boldsymbol{a})| \leqslant C|\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}|^\lambda$$

pour $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}'$ de H et pour une constante C, la norme $\| \ \|_0^H$ étant définie par la formule $\|\vartheta\|_0^H = \inf_{\{C\}} C$.

Soit, en outre, B_1^H l'espace des vecteurs $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a})$ définis dans H, indépendants de la variable t et dont la norme $\| \ \|_1^H$ est supposée introduite par des formules analogues à (4) et (5) pour $\| \ \|_1$. En entendant par $\boldsymbol{x}^0$ la fonction $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{a}$ définie dans H, choisissons un $\omega_H > 0$ suffisamment petit pour que toute fonction $\boldsymbol{w} \epsilon B_1^H$ satisfaisant à la condition $\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}^0\|_1^H \leqslant \omega_H$ soit une homéomorphie entre H et $\boldsymbol{w}(H)$.

S_H étant la sphère $\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}^0\|_1^H \leqslant \omega_H/2$ dans l'espace B_1^H, posons par définition

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{X}^*[\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a})], \qquad \boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{z}) = \int_{\boldsymbol{w}(H)} \nabla(1/r)\vartheta^*(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

où la fonction ϑ^* est définie par l'équation $\vartheta^*[\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a})] = \vartheta(\boldsymbol{a})$.

LEMME. *Soient $\boldsymbol{w} \epsilon S_H$, $\boldsymbol{w}' \epsilon S_H$, $\vartheta \epsilon B_0^H$, $\vartheta' \epsilon B_0^H$, $\Omega_1 > 0$, $\alpha > 0$, $\|\vartheta\|_0^H \leqslant \Omega_1$ et $\|\vartheta' - \vartheta\|_0^H \leqslant \alpha\|\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}\|_1^H$. Alors les fonctions $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$ formées à l'aide des couples de fonctions $\boldsymbol{w}, \vartheta$ et $\boldsymbol{w}', \vartheta'$ respectivement satisfont aux conditions*

$$\|\boldsymbol{X}\|_1^H \leqslant \Omega_2 \quad \textit{et} \quad \|\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}\|_1^H \leqslant \beta\|\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}\|_1^H,$$

où les constantes Ω_2 et β ne dépendent que de ω_H, Ω_1 et α.

En outre, si la frontière de H possède la normale satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant λ, il en est de même de la frontière de $\boldsymbol{w}(H)$.

Passons à la démonstration des propriétés (8) et (9) à l'aide de ce lemme. Plaçons l'origine du système des coordonnées au centre d'une sphère arbitrairement choisie $P^0 \subset G_0$ et menons les axes x_1 et x_2 parallèlement aux côtés du réseau quadratique, porteur des sphères de l'ensemble G_0. Fixons un $t^* > 0$, faisons t parcourir le segment $0 \leqslant t \leqslant t^*$ et désignons par P_t l'ensemble de points en lequel la fonction $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$ transforme la sphère P^0. Posons $\Gamma'_{t,\boldsymbol{z}} = G_t \cap K_{\boldsymbol{z},R} - P_t$ et représentons $\boldsymbol{F_x}$ sous la forme de somme de deux fonctions

$$\boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}} \tag{10}$$

où

$$\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t) = \bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), t), \qquad \boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, t) = \bar{\bar{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), t),$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}, t) = \varkappa \int_{\dot{P}_t} \nabla(1/r)\varrho^*(\boldsymbol{y}, t)d\boldsymbol{y}, \tag{11}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}, t) = \varkappa \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma'_{t,\boldsymbol{z}}} \nabla(1/r)\varrho^*(\boldsymbol{y}, t)d\boldsymbol{y}.$$

En vertu de (1), il existe pour tout $\boldsymbol{x} \epsilon S$ une constante Ω^* ne dépendant que de ω_0 et telle que

$$\|\varrho_{\boldsymbol{x}}\|_0 \leqslant \Omega^*, \qquad \|\varrho_{\boldsymbol{x}'} - \varrho_{\boldsymbol{x}}\|_0 \leqslant \Omega^*\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|_1 \tag{12}$$

où $\| \ \|_0 = \sup_{t,R} \| \ \|_0^{G_t \cap K_{0,R}}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant t^*$ et $0 < R < \infty$.

En posant dans le lemme $H = P^0$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{x}'$, $\vartheta = \varrho_{\boldsymbol{x}}$, $\vartheta' = \varrho_{\boldsymbol{x}'}$, $\varkappa\boldsymbol{X}^* = \bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}$, $\omega_H = \omega_0$ et $\Omega_1 = \alpha = \Omega^*$, il vient

$$\|\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}\|_1^{P^0} \leqslant \Omega, \qquad \|\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}'} - \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}\|_1^{P^0} \leqslant \Omega\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|_1, \tag{13}$$

où Ω, tout comme les autres constantes que cette lettre désignera dans la suite, ne dépend que de ω_0. Vu que $\boldsymbol{x}\in S$, on déduit sans peine de (12) et (13) que

$$\|\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}\|_1 \leqslant \Omega \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}'}-\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}\|_1 \leqslant \Omega\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|_1. \tag{14}$$

Reste à établir les formules analogues pour la fonction $\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}$. En vertu de l'identité

$$\int\limits_{\Gamma'_{0,0}} \nabla(1/r_0)\,d\boldsymbol{y} = 0$$

où $r_0 = |\boldsymbol{y}|$ et $\nabla(1/r_0) = \nabla(1/r)|_{\boldsymbol{z}=0}$, on peut représenter $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}$ (vu que $\varrho_0 = 1$ par hypothèse) sous la forme

$$\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}} = \varkappa \lim_{R\to\infty}\Big\{ \int\limits_{\Gamma'_{t,0}} \nabla(1/r-1/r_0)\,\varrho^* d\boldsymbol{y} + \Big[\int\limits_{\Gamma'_{t,0}} \nabla(1/r_0)\,\varrho^* d\boldsymbol{y} - \int\limits_{\Gamma'_{0,0}} \nabla(1/r_0)\,d\boldsymbol{y}\Big] + \int\limits_{\Gamma_{t,\boldsymbol{z}}-\Gamma_{t,0}} \nabla(1/r)\varrho^* d\boldsymbol{y} - \int\limits_{\Gamma_{t,0}-\Gamma_{t,\boldsymbol{z}}} \nabla(1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y}\Big\}, \tag{15}$$

où $\Gamma'_{t,\boldsymbol{z}} = G_t \cap K_{\boldsymbol{z},R} - P_t$ comme auparavant et $\Gamma_{t,\boldsymbol{z}} = G_t\cap K_{\boldsymbol{z},R}$.

Soit Q_0 l'ensemble des points $\boldsymbol{z}$ définis par les conditions

$$-1/2 \leqslant z_1 \leqslant 1/2 \quad \text{et} \quad -1/2 \leqslant z_2 \leqslant 1/2.$$

Vu que $\boldsymbol{x}\in S$, toute la masse sur laquelle s'étend l'intégration dans (15) est contenue dans la couche

$$-\eta-\omega_0 \leqslant y_3 \leqslant \eta+\omega_0, \qquad |\boldsymbol{y}| > 1-\eta-\omega_0,$$

où $1-\eta-\omega_0 > 0$ d'après (6).

Il existe par conséquent la limite du premier sommande dans le membre droit de (15) et elle ne dépasse pas une constante en valeur absolue. Les limites des deux derniers sommandes sont nulles. Enfin, en remplaçant la variable d'intégration $\boldsymbol{y}$ par $\boldsymbol{x}$ dans le premier de deux termes de l'expression entre crochets, on peut représenter cette expression sous la forme

$$-\int\limits_{\Gamma'_{0,0}} \left(\frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},t)|^3} - \frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}\right) d\boldsymbol{y} + I. \tag{16}$$

Or Δ étant la région

$$R-\omega_0 \leqslant |y| \leqslant R+\omega_0 \quad \text{où} \quad |y_3| \leqslant \eta+\omega_0,$$

il vient

$$|I| \leqslant (R-\omega_0)^{-2}\int\limits_{\Delta} d\boldsymbol{y}.$$

La limite de I est donc nulle. Il en résulte que la limite de (16) existe. Il est ainsi démontré que

$$|\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}| \leqslant \Omega \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{z}\in Q_0.$$

Pour examiner $\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}$, posons $\boldsymbol{k} = (k,0,0)$, $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}+\boldsymbol{k}$ et $r' = |\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{y}|$. On a donc

$$\frac{\partial \overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}}{\partial z_1} = \varkappa \lim_{k\to 0}\lim_{R\to\infty}\Big[1/k\int\limits_{\Gamma'_{t,\boldsymbol{z}}} \nabla(1/r'-1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y} + 1/k\int\limits_{\Gamma_{t,\boldsymbol{z}'}-\Gamma_{t,\boldsymbol{z}}} \nabla(1/r')\,\varrho^* d\boldsymbol{y} - 1/k\int\limits_{\Gamma_{t,\boldsymbol{z}}-\Gamma_{t,\boldsymbol{z}'}} \nabla(1/r')\,\varrho^* d\boldsymbol{y}\Big]. \tag{17}$$

L'intégrale $\displaystyle\int\limits_{G_t-P_t} \frac{\partial}{\partial z_1}\nabla(1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y}$ convergeant uniformément et les limites des deux derniers termes entre crochets dans (17) étant égales à 0, on peut écrire

$$\frac{\partial \overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}}{\partial z_1} = \varkappa \int\limits_{G_t-P_t} \frac{\partial}{\partial z_1}\nabla(1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y};$$

les formules pour les deux autres dérivées partielles sont analogues. Vu que $\boldsymbol{x}\in S$, il en résulte l'estimation

$$|\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}| \leqslant \Omega \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{a}\in P^0.$$

Les dérivées $\dfrac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j}\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}$ étant bornées dans P^0, on a pour les $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}'$ de P^0 la formule

$$\left|\frac{\partial}{\partial a_i}\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}',t) - \frac{\partial}{\partial a_i}\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a},t)\right| \leqslant \Omega\,|\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}|^{\lambda},$$

où $i = 1,2,3$, et les formules pour la fonction $\nabla_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}'}-\boldsymbol{F}''_{\boldsymbol{x}})$ sont analogues. Si $\boldsymbol{a}\in P^0$ et $\boldsymbol{a}'\in P^k$ où P^k désigne pour $k = 1,2,\ldots$ toutes les sphères formant G_0 et distinctes de P^0, on peut représenter $\nabla\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}}$ sous la forme

$$\nabla\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{x}} = \varkappa\int\limits_{G_t-P_t-P_t^k} \nabla(1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y} + \varkappa\int\limits_{P_t^k} \nabla(1/r)\,\varrho^* d\boldsymbol{y} \tag{18}$$

(P_t^k étant l'image de la sphère P^k au moment t). Pour montrer que le premier sommande de la somme (18) satisfait aux conditions analogues à (14), il suffit de poser $r' = |\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{y}|$, $r'' = |\boldsymbol{z}''-\boldsymbol{y}|$ et de passer dans le second sommande de

$$\int\limits_{G_t-P_t-{}_k} \nabla(1/r'')\,\varrho^* d\boldsymbol{y} \to \int\limits_{G_t-P_t-P_t^k} \nabla(1/r')\,\varrho^* d\boldsymbol{y}$$

à la nouvelle variable d'intégration $y' = z'' - z' + y$ en tenant compte des estimations (12). La constante Ω figurant dans les conditions en question sera évidemment indépendante de l'indice k.

La sphère P^0, qui contient l'origine, étant choisie arbitrairement et ne différant par ailleurs en rien des sphères P^k où $k = 1, 2, \ldots$, le second sommande de (18) satisfait également aux conditions analogues à (14) et toutes les estimations établies sont vraies dans l'ensemble G_0 tout entier. Il est ainsi démontré que

$$\|F''_x\|_1 \leqslant \Omega \quad \text{et} \quad \|F''_{x'} - F''_x\|_1 \leqslant \Omega \|x' - x\|_1.$$

Ces conditions et celles de (14) entraînent d'après (10) et (11) les propriétés (8) et (9) de F_x, qu'il s'agissait de prouver.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Lichtenstein, *Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz*, Mathematische Zeitschrift 27 (1928), p. 607-622.

[2] — *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, III*, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), p. 214-239.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 8. 10. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

WITOLD WOLIBNER

(9. IX. 1902 – 9. I. 1961)

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ), A. KRZYWICKI (WROCŁAW) ET J. ZAMORSKI † (WROCŁAW)

Né le 9 septembre 1902 au village Piotrowo près de Płock, Witold Wolibner passa en 1921 son baccalauréat au lycée de Płock et prit l'inscription à la Faculté de Philosophie (Section des Sciences mathématiques et naturelles) de l'Université de Varsovie. Après y avoir étudié les mathématiques, la physique, l'astronomie, la logique et la psychologie, il y obtint en 1930 le grade de docteur en philosophie pour sa thèse de doctorat intitulée „Contribution à la théorie des fonctions analytiques".

Depuis 1927, Witold Wolibner fut occupé à l'Institut d'Aérodynamique nouvellement fondé auprès de l'École Polytechnique de Varsovie. Il y travailla, avec un relâche de trois ans, jusqu'au début de la II^{me} guerre mondiale. Depuis 1935, il occupa, en outre, le poste d'assistant de mathématiques à l'École Polytechnique de Varsovie et fut actif pour l'annuaire „Fortschritte der Mathematik" qui le comptait parmi ses critiques scientifiques permanents.

En 1939, lors de l'invasion allemande, il s'enrôla, malgré la faiblesse de sa santé, au II Bataillon des Volontaires pour la Défense de Varsovie et y combatta jusqu'à la chute de la capitale. En 1941, il trouva réfuge avec sa mère à la campagne où il vécut dans des conditions matérielles très pénibles, s'y vouant toutefois à l'enseignement scolaire secret. En novembre de 1944, aussitôt après la libération de la région du pays où il se trouvait, il devint maître des mathématiques au lycée de Staszów, qu'il ne quitta qu'en 1947 pour aller s'établir définitivement à Wrocław, l'université et l'école polytechnique de cette ville (fondues à cette époque en une unité commune) lui ayant offert la chaire de la Mécanique rationnelle à la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie. En qualité du professeur et du chef de cette chaire, il travailla jusqu'à sa mort qui l'emporta peu avant sa titularisation votée à l'unanimité par le Conseil de la Faculté.