STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1963)

Об исследовании собственных функций непрерывного спектра оператора $-\Delta u+q(x_1, x_2, x_3,)u$ в случае наличия особенности у $q(x_1, x_2, x_3)$

М. БУРНАТ (Варшава)

Рассмотрим оператор типа Шредингера $Lu = -\Delta u+q(x_1, x_2, x_3)u$, где $q(x_1, x_2, x_3)$ — непрерывная функция в E за исключением некоторого множества N (E означает трехмерное эвклидово пространство (x_1, x_2, x_3)). Известно, что при $q(x) \underset{|x|\to\infty}{\to} 0$ спектр оператора Lu содержит в общем случае две части: дискретную и непрерывную. Ряд задач квантовой механики сводится к нахождению собственных функций, соответствующих как дискретным, так и непрерывным собственным значениям. В связи с этим имеется ряд работ по иследованию свойств собственных функций так в бесконечности, как и в окрестности точек множества N. Свойства собственных функций для дискретного спектра исследованы довольно хорошо (Stummel [7], Kato [3], Шноль [8], Burnat [1]). Напротив, свойства собственных функций, принадлежащих к непрерывному спектру, исследованы весьма недостаточно. Трудность состоит в том, что собственные функции непрерывного спектра не принадлежат $L^2(E)$.

В большинстве работ (Maurin [5], Костюченко [4]) касающихся исследования собственных функций для непрерывного спектра, доказывается, что для почти всех (в смысле некоторой меры) точек непрерывного спектра существует собственная функция, определённая и регулярная в $E-N$. Поведение собственных функций в окрестности множества N и на бесконечности (см. Шноль [8]) исследовано весьма недостаточно. В конкретных задачах квантовой механики (напр. задача рассеивания) требуется найти собственные функции, удовлетворяющие некоторым условиям, для заданных значений непрерывного спектра. Единственной известной автору работой строго решающей задачу этого типа для широкого класса потенциалов, являлается работа Я. Повзнера [6]. В работе рассмотривается квантовая задача упругого рассеивания на атоме, котороя сводится к нахождению во всём трехмерном пространстве решения уравнения

$$-\Delta u+q(x)u-\lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

имеющего вид $u = e^{i\lambda(\omega,x)}+v(x)$, где ω — заданный единичный вектор, λ^2 — точка непрерывного спектра оператора $-\Delta u+q(x)u$, $v(x)$ удовлетворяет условиям излучения:

$$(2)\qquad |x|\,v(x) = O(1),\quad |x|\left(\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}-i\lambda v\right) = o(1)\quad (|x|\to\infty),$$

где $|x|^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$ и $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Доказывается существование и единственность решения задачи рассеивания при предположении, что $q(x)$ функция непрерывная во всём пространстве E. Кроме того, $q(x)$ должна на бесконечности удовлетворять условию

$$(3)\qquad q(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{3,5+\varepsilon}}\right)\quad (|x|\to\infty).$$

Однако, для большинства физических случаев, функция $q(x)$ имеет некоторое множество N особых точек, в которых она становится неограниченной.

В настоящей работе покажем, что результаты Повзнера сохраняются также в случае потенциала, не являющегося непрерывным. При этом будем предполагать, что функция $q(x)$ локально интегрируемая с квадратом и непрерывная, за исключением конечного множества точек ограниченных кривых или ограниченных поверхностей. На бесконечности предполагается условие (3). Результаты работы сформулированы в частном виде в заметке [2].

I. Воспомогательные замечания. Будем рассматривать оператор $Bu = -\Delta u+q(x)u$ для $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежащего целому трехмерному эвклидову пространству E. В качестве области определения $D(B)$ оператора B возмем все функции $u(x)$ удовлетворяющие следующим условиям:

1° $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция для $x\in E$.

2° Для каждой функции $u(x)$ существует шар K_u, такой что $u(x) = 0$ для $x\in E-K_u$.

Если теперь предположить, что потенциал $q(x)$ локально квадратично интегрируемый, тогда, в нашем случае, на основании теоремы Штуммеля ([7], стр. 171, теорема (4.2)) оператор Bu является существенно самосопряжённым в $L^2(E)$.

Это означает, что $A = \bar{B}$ ($\bar{B}$ — замыкание B) самосопряжённый оператор.

Резольвента R_λ ($\lambda\notin S(A)$, $S(A)$ — спектр оператора A) оператора A является, как известно, интегральным оператором

$$R_\lambda f(x) = \int_E H(x, y, \lambda)f(y)\,dy.$$

Отметим следующие свойства резольвентного ядра $H(x, y, \lambda)$:

(a) Для любой ограниченной, замкнутой области Ω, для которой потенциал $q(x)$ непрерывен при $x\in\Omega$, существует такая постоянная M, что

$$(4)\qquad \int_E |H(x, s, \lambda)|^2 ds < M\quad \text{при}\quad x\in\Omega.$$

(b) Пусть N — замкнутое множетсво, вне которого $q(x)$ непрерывная, однократно непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функция $h(x, y, \lambda) = H(x, y, \lambda)-1/4\pi|x-y|$ является непрерывной при $x, y\in E-N$.

(c) $H(x, y, \lambda)$ удовлетворяет свойству симетрии:

$$(5)\qquad H(x, y, \lambda) = \overline{H(y, x, \bar{\lambda})}.$$

(d) $H(x, y, \lambda^2)$ удовлетворяет интегральному уравнению (см. [1], стр. 144 и 151)

$$(6)\qquad H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}-\int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|}\,q(s)H(s, y, \lambda^2)\,ds,$$

где знак $+$ или $-$ соответствует $I(\lambda) < 0$ или $I(\lambda) > 0$.

Относительно $q(x)$ в дальнейшем будем предполагать следующее:

(I) $q(x)$ локально квадратично суммируемая функция.

(II) $q(x)$ непрерывная, однократно непрерывно дифференцируемая при $x\in E-N$. N состоит из конечного множества точек, гладких и ограниченных кривых и поверхностей. N замкнутое множество.

(III) Пусть $\sigma_n = \{x\colon \inf_{y\in N} |x-y| = 1/n\}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{\sigma_n}\left(\int_R \frac{|q(s)|}{|x-s|^2}\,ds\right)dx = 0.$$

(IV) На бесконечности будем за Повзнером [6] предполагать

$$(7)\qquad q(x) \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{3,5+\varepsilon}}\right)\quad (\varepsilon > 0).$$

(V) Заметим ещё, что если $R = \{x\colon \inf_{y\in N} |x-y| \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$, тогда из (I) следует, что

$$\varphi(x) \underset{x\in R-N}{=} \left(\int_R \frac{|q(s)|^2}{|x-s|^2}\,ds\right)^{1/2} \in L^2(R).$$

Нетрудно заметить, что напр. потенциал с одной (или несколькими) особой точкой P

$$q(x) \underset{|x|\to P}{=} O\left(\frac{1}{|x-P|^{a}}\right) \qquad (a<1{,}5)$$

удовлетворяет условиям (I), (II), (III) и (V).

Сформулируем еще три леммы Повзнера (см. [6], стр. 140, 141, 147), которые доказаны при предположении (7) и непрерывности $q(x)$ при $x \in E$. Поскольку они относятся к поведению на бесконечности, они очевидно верны и в нашим случае.

Лемма 1. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям* (I), (II) *и* (IV), *тогда для функции*

$$\Psi(x) = \int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)\,ds \tag{8}$$

имеет место оценка [1]

$$\Psi(x) \underset{|x|\to\infty}{=} \frac{e^{i\lambda|x|}}{|x|}\int_F e^{-i\lambda(\tilde{x},s)} q(s)\,ds + O\left(\frac{1}{|x|^{1+h/(2+h)}}\right),$$

где $I(\lambda)=0$, $\tilde{x}=x/|x|$, $h>0$.

Лемма 2. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям* (I), (II) *и* (IV), *тогда функция $\Psi(x)$, определённая формулой* (8) *удовлетворяет уравнению*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{d\Psi}{dr} - i\lambda\Psi\right) = 0,$$

где $I(\lambda)=0$, $r=|x|$.

Лемма 3. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям* (I), (II) *и* (IV), *тогда для всякого непрерывного в E решения уравнения*

$$\Psi(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)\Psi(s)\,ds,$$

удовлетворяющего условию

$$\Psi(x) \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|}\,\omega\right),$$

имеет место оценка

$$\Psi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+(\eta+\omega)/(2+\eta+\omega)}}\right),$$

где $I(\lambda)=0$, $\omega\geqslant 0$, $\eta=\frac{1}{2}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ (ε — *число из условия* (IV)).

---

[1] (x,s), где $x=(x_1,x_2,x_3)$, $s=(s_1,s_2,s_3)$, означает скалярное произведение $x_1s_1+x_2s_2+x_3s_3$.

II. Свойства оператора $T_\lambda v(x)$. Для исследования оператора

$$T_\lambda v(x) = \int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)v(s)\,ds$$

введём некоторые пространства типа Банаха. Пусть y — произвольная точка, не являющаяся особенной точкой потенциала $q(x)$ $(y\notin N)$ а R — окрестность множества N:

$$R = \{x\colon \inf_{y\in N}|x-y|\leqslant\delta\},$$

где δ — некоторое положительное число. Сначала введём неполное пространство $B^0_{y,R}$, которое состоит из всех функций вида

$$v(x,y) = \frac{a}{|x-y|} + u(x),$$

где $u(x)$ функция непрерывная для $x\in E$, стремящаяся к нулю при $|x|\to\infty$, a — произвольное число. Норма в $B^0_{y,R}$ вводится следующим образом:

$$\|v\|_{B^0_{y,R}} = |a| + \sup_{x\in E-R}|u(x)| + \Big(\int_R u^2(x)\,dx\Big)^{1/2}. \tag{9}$$

Замыкая $B^0_{y,R}$ в смысле нормы (9), получим некоторое полное банахово пространство $B_{y,R}$.

Введем пространство B_y, которое состоит из того же набора фунций, что $B^0_{y,R}$, но норма вводится по другому:

$$\|v\|_{B_y} = |a| + \sup_{x\in E}|u(x)|;$$

через B будем обозначать подпространсво B_y, состоящее из элементов, для которых $a=0$. Верна следующая лемма:

Лемма 4. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям* (I), (II) *и* (IV), *тогда для $J(\lambda)\geqslant 0$ оператор $T_\lambda v$ переводит пространства $B_{y,R}$, B_y и B на себя и является вполне непрерывным.*

Лемму 4 докажем для $B_{y,R}$ (доказательство для B_y и B аналогично).

Оператор $T_\lambda v$ переводит $B_{y,R}$ на себя. Действительно

$$T_\lambda v = a\int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)}{|s-y|}\,ds + \int_{E-R}\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)u(s)\,ds + {}$$
$$+ \int_R \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)u(s)\,ds.$$

Первый и второй интегралы являются непрерывными функциями в E. Из леммы 1 следует их стремление к нулю для $|x|\to\infty$.

Третий интеграл непрерывен в $E-R$, при $|x|\to\infty$ стремится к нулю, при $x\in R$ является функцией суммируемой с квадратом. Таким образом $T^\lambda v(x)$ непрерывная функция при $x\in E-R$, а при $x\in R$ имеем $T_\lambda v(x)\in L^2(R)$ и наше утверждение доказано.

Пусть далее

$$v_n=\frac{a_n}{|x-y|}+u_n(x)\in B_{y,R},\qquad \|v_n\|_{B_{y,R}}\leqslant 1,$$

$$T_\lambda v_n=a_n\int\limits_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)}{|s-y|}\,ds+\int\limits_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s}\,q(s)\,u_n(s)\,ds.$$

Тогда $|a_n|\leqslant 1$ и, считая что a_n сходится к a, получаем, что первый член сходится в смысле нормы $B_{y,K}$ к

$$a\int\limits_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)}{|s-y|}\,ds.$$

Рассмотрим второй член, который равняется,

$$\int\limits_{E-R}\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\,q(s)\,u_n(s)\,ds+\int\limits_R\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\,q(s)\,u_n(s)\,ds=f_n^{(1)}(x)+f_n^{(2)}(x).$$

На основании очевидных неравенств

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned}|f_n^{(1)}(x')-f_n^{(1)}(x'')|&\leqslant\int\limits_{E-R}\left|\frac{e^{i\lambda|x'-s|}}{|x'-s|}-\frac{e^{i\lambda|x''-s|}}{|x''-s|}\right||q(s)|\,ds,\\ |f_n^{(2)}(x')-f_n^{(2)}(x'')|&\leqslant\int\limits_{R}\left|\frac{e^{i\lambda|x'-s|}}{|x'-s|}-\frac{e^{i\lambda|x''-s|}}{|x''-s|}\right||q(s)|\,ds\end{aligned}$$

находим, что $f_n^{(1)}(x)$ и $f_n^{(2)}(x)$ равностепенно непрерывны соответственно в E и $E-R$.

Следствием неравенств

$$\text{(10')}\qquad |f_n^{(1)}(x)|\leqslant\int\limits_{E-R}\frac{|q(s)|}{|x-s|}\,ds,\qquad |f_n^{(2)}(x)|\leqslant\Big(\int\limits_R\frac{|q(s)|^2}{|x-s^2}\Big)^{1/2}$$

для $I(\lambda)>0$ и леммы 1 для $I(\lambda)=0$ является существование функции $\mu(x)\to 0$ ($|x|\to\infty$), для которой имеется оценка равномерна относительно n:

$$\text{(11)}\qquad |f_n^{(i)}(x)|_{|x|\to\infty}=O\big(\mu(x)\big)\qquad (i=1,2).$$

На основании теоремы Арцелли существуют подпоследовательности $f_{n_k}^{(1)}$ и $f_{n_k}^{(2)}$, которые сходятся равномерно в любой ограниченной подобласти E и соответственно $E-R$. На основании оценки (11) они сходятся равномерно в E и $E-R$ к непрерывным функциям, удовлетворяющим оценке (11).

Для полного доказательства леммы достаточно заметить, что существует подпоследовательность $f_{n_{k_s}}^{(2)}(x)$ сходящаяся в $L^2(R)$. Действительно, на основании теоремы Арцелли можно методом диагональной подпоследовательности из $f_{n_k}^{(2)}(x)$ избрать подпоследовательность $f_{n_{k_s}}^{(2)}(x)$, которая сходится в пространствах $L^2(R-R_{1/\mu})$ ($\mu=1,2,\ldots$), где

$$R_{1/\mu}=\Big\{x:\inf_{y\in N}|x-y|<\frac{\delta}{2\mu}\Big\}.$$

Из оценки (10') и свойства (V) следует, что $f_{n_{k_s}}^{(2)}(x)$ сходится в $L^2(R)$. Лемма 4 доказана полностью.

Таким образом в пространствах $B_{y,R}$, B_y и B для оператора T_λ верна альтернатива Фредгольма, частью которой является следующее утверждение: если γ не является собственным значением оператора T_λ, то уравнение $\gamma T_\lambda\varphi-\varphi=f$ имеет для любого f единственное решение φ.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям* (I), (II), (III) *и* (IV), *тогда для $J(\lambda)\geqslant 0$ уравнение*

$$\text{(12)}\qquad \Psi(x)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\,q(s)\,\Psi(s)\,ds$$

может иметь только тогда в $B_{y,K}$, B_y и B решение, отличное от нуля, если λ^2 является собственным значением оператора Af.

Для доказательства заметим сначала следующее. Пусть $\Psi(x)$ функция непрерывная, дважды непрерывно дифференцируемая в $E-N$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\text{(13)}\qquad \Psi(x)\in L^2(E),$$

$$\text{(14)}\qquad -\Delta\Psi+q\Psi\in L^2(E),$$

$$\text{(15)}\qquad \lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\sigma_n}\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}}\,dx=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\sigma_n}\Psi\,dx=0,$$

где $\sigma_n=\{x:\inf\limits_{y\in N}|x-y|=1/n\}$ гладкая поверхность. Тогда

$$\text{(16)}\qquad \Psi\in D_{B*}=D_A,\qquad A\Psi=-\Delta\Psi+q\Psi.$$

Это непосредственно следует из формулы Грина, для которой в бесконечности поверхностные интегралы исчезают, в связи с тем, что, для $u \in D_B$, $u(x)$ исчезает вне шара K_u. Исчезновение интегралов, взятых по поверхностям, которые устремляются к множеству N, вытекает из условия (15).

Для доказательства теоремы рассмотрим два случая: 1° $J(\lambda) > 0$, 2° $J(\lambda) = 0$.

1° Пусть $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (12) и $\Psi \in B_{y,R}$, B_y или B. Тогда, на основании условий, которым удовлетворяет $q(x)$, $\Psi(x)$ является функцией непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой в $E-N$. Кроме того существует $\int\limits_R |\Psi(x)|^2 dx$. Далее, в случае $J(\lambda) > 0$, уравнение (12) дает оценку

$$|\Psi(x)| = O(|q(x)|), \quad |x| \to \infty,$$

из которой, на основании овойства (IV) потенциала $q(x)$, получаем, что $\Psi \in L^2(E)$. Дифференцируя (12) получаем

$$-\Delta\Psi + q(x)\Psi = \lambda^2\Psi \quad (x \in E-N). \tag{17}$$

Из последнего следует $-\Delta\Psi + q\Psi \in L^2(E)$. Условие (15) вытекает непосредственно из свойства (III) потенциала $q(x)$. Окончательно для $\Psi(x)$ имеет место (16) и λ^2 является собственным значением Af и, тем самым, теорема 1 при $J(\lambda) > 0$ доказана.

2° Рассмотрим теперь случай $J(\lambda) = 0$. В этом случае функция $\Psi(x)$ удовлетворяющая (12) тоже непрерывна и непрерывно дифференцируема в $E-N$. Кроме того $\Psi(x)$ удовлетворяет равенству (17) и условию (15). Таким образом, для доказательства того, что $\Psi \in D_A$ и $A\Psi = \lambda^2\Psi$, достаточно показать, что $\Psi \in L^2(E)$. В связи с тем, что $\Psi(x) = O(1)$, $|x| \to \infty$, применяя k раз лемму 3 получим

$$\Psi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\omega_k}}\right), \quad |x| \to \infty \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_k = \frac{\eta + \omega_{k-1}}{2 + \eta + \omega_{k-1}} + 1.$$

Существует подпоследовательность $\omega_{kn} \to \mu$,

$$\mu = 1 + \frac{\eta + \mu}{2 + \eta + \mu}.$$

Для $\varepsilon > \frac{1}{2}$ последнее уравнение имеет положительный корень $\mu > \frac{3}{2}$ и, таким образом,

$$\Psi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{3/2+\varepsilon}}\right), \quad |x| \to \infty \quad (\varepsilon > 0),$$

откуда $\Psi \in L^2(E)$. Теорема 1 полностью доказана.

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 2. *Если $J(\lambda) \geqslant 0$ и λ^2 не является собственным значением оператора Af, тогда уравнение*

$$u(x) = f(x) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)u(s)\,ds$$

имеет для любой $f(x)$, принадлежащей к одному из пространств $B_{y,R}$, B_y, B, единственное решение соответственно в $B_{y,R}$, B_y и B.

III. Исследование функции $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)u(s)\,ds. \tag{18}$$

Обозначим единственное решение уравнения (18) в B_y для $J(\lambda) = 0$, $\lambda^2 \in C(A)$, $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$, где $C(A)$ обозначает непрерывный спектр оператора A. Отметим следующие свойства функции $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$:

1° $\tilde{H}(x, y, \lambda^2) - 1/4\pi|x-y|$ является для $y \notin N$ непрерывной функцией x во всём E.

Действительно, $\tilde{H}(-, y, \lambda^2) \in B_y$ и, тем самым, имеет вид $a/|x-y| + v(x)$, где $v(x)$ непрерывная функция в E. Поскольку $\tilde{H}$ удовлетворяет уравнению (18), имеем $a = 1/4\pi$.

2° $\tilde{H}(x, y, \lambda^2) = \tilde{h}(x, y, \lambda^2) + 1/4\pi|x-y|$ функция ограниченная для $|x| \to \infty$.

Это следует непосредственно из $\tilde{H}(-, y, \lambda^2) \in B_y$.

3° $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ удовлетворяет условиям излучения:

$$|x| \cdot \tilde{H}(x, y; \lambda^2) = O(1), \quad |x| \to \infty,$$

$$|x|\left(\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\vec{r}} - i\lambda\tilde{H}\right) = o(1), \quad |x| \to \infty,$$

где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Доказательство получаем немедленно на основании свойства 2°, уравнения (18) и лемм 1 и 2.

Рассмотрим теперь поведение функции $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ в окрестности множества N (точки разрывности потенциала $q(x)$). Из теоремы 2 следует, что оператор T_λ имеет в B ограниченный обратный оператор T_λ^{-1}. Поскольку $\tilde{h}(-, y, \lambda^2) \in B$, из уравнения (18) получаем:

$$\|\tilde{h}(-, y, \lambda^2)\|_B \leqslant \|T^{-1}\|_B \left\| \int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} \cdot \frac{q(s)}{|s-y|}\,ds - \frac{e^{i\lambda|x-y|} - 1}{|x-y|} \right\|_B,$$

откуда

$$\sup_{x\in E}|h(x,\ y,\ \lambda^2)|\leqslant M\sup_{x\in E}\left|\int_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)}{|s-y|}\,ds\right|,$$

где M некоторая постоянная.

Окончательно получается

Теорема 3. *Имеем*

$$\left|\tilde{H}(x,y,\lambda^2)-\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|\leqslant M\int_E\frac{|q(s)|}{|s-y|^2}\,ds,$$

где M постоянная, $x,y\in E-N$.

В случае, когда множество N состоит только из одной точки P и $q(x)\underset{x\to P}{=}O(1/|x-P|^a)$, получаем следующую оценку:

$$\tilde{H}(x,y,\lambda^2)=\frac{1}{4\pi|x-y|}+\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{|y-P|^{a-1}}\right) & \text{при}\quad a>1,\\ O(\ln|y-P|) & \text{при}\quad a=1,\\ O(1) & \text{при}\quad a<1.\end{cases}$$

$$(x,y\to P).$$

Пусть Ω ограниченная замкнутая область, $\Omega\cdot N=0$. Имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial\tilde{H}(x,y,\lambda^2)}{\partial x}\right|\leqslant L(\Omega,K)\int_E\frac{|q(s)|}{|s-y|^2}\,ds, \tag{19}$$

где $L(\Omega,K)$ постоянное число для $x\in\Omega$, $y\in E\cdot K$, где K некоторая сфера содержащая множество N. Действительно, дифференцируя равенство

$$\tilde{H}(x,y,\lambda^2)=\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}-\frac{1}{4\pi}\int_E\frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\,q(s)\tilde{H}(s,y;\lambda^2)\,ds \tag{20}$$

получаем

$$\frac{\partial\tilde{H}(x,y,\lambda^2)}{\partial x}= \tag{21}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)-\frac{1}{(4\pi)^2}\int_E\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-s|}\right)\frac{q(s)}{|s-y|}\tilde{H}(s,y,\lambda^2)\,ds,$$

отсюда, на основании теоремы 3, следует оценка (19). Дифференцируя (20) вторично, приходим аналогичным образом к оценке

$$\left|\frac{\partial^2\tilde{H}(x,y,\lambda^2)}{\partial x^2}\right|\leqslant Q(\Omega,K)\int_E\frac{|q(s)|}{|s-y|^2}\,ds, \tag{22}$$

где Q постоянное число для $x\in\Omega$, $y\in E\cdot K$

Отметим, что из (20) следует

$$-\Delta\tilde{H}(x,y,\lambda^2)+q(x)\tilde{H}(x,y,\lambda^2)-\lambda^2\tilde{H}(x,y,\lambda^2)=0 \tag{23}$$

(оператор Лапласа взят по x) для $x\neq y$ и $x,y\notin N$. Кроме того если учесть теорему 3, видно, что для $x=y\neq P$ функция $\tilde{H}(x,y,\lambda^2)$ и её производные ведут себя как функция Грина и её соответствующие производные.

Рассмотрим теперь связь функции $\tilde{H}(x,y,\lambda^2)$ $(J(\lambda)=0)$ с ядром резольвенты $H(x,y,\lambda^2)$ $(J(\lambda)>0)$. Из (6) вытекает, что ядро резольвенты $H(x,y,\lambda^2)$ удовлетворяет для $\lambda^2\notin S(A)$ уравнению (18). Кроме того, на основании свойств функции $H(x,y,\lambda^2)$, имеем $H(-,y,\lambda^2)\in B_{y,R}$. Действительно,

$$H(x,\ y,\ \lambda^2)=h(x,\ y;\ \lambda^2)+\frac{1}{4\pi|x-y|},$$

где $h(x,y,\lambda^2)$ функция непрерывная по x для $x\in E-R$. Для любого $y\notin N$ существует интеграл $\int_R|h(x,y,\lambda^2)|^2dx$.

Употребляя неравенство Шварца получаем из уравнения (18), что $h(x,y,\lambda^2)$ ограниченная на бесконечности, следовательно, на основании леммы 1, $h(x,y,\lambda^2)$ стремится равномерно к нулю, если $|x|\to\infty$.

На основании теоремы 2, $H(x,y,\lambda^2)$ является единственным, в пространствах $B_{y,R}$ и B_y, решением уравнения (18) и, следовательно, $H(-,y,\lambda^2)\in B_y$.

Рассмотрим поведение резольвентного ядра для случая, когда λ^2, будучи комплексной, стремится к точке непрерывного спектра. Докажем следующую лемму:

Лемма 5. *Семейство операторов T_λ $(J(\lambda)\geqslant 0)$, рассматриваемых в пространстве B, зависит непрерывно от параметра λ, т. е. при заданном ω можно найти такое $\delta=\delta(\omega)$, что $\|(T_\lambda-T_\mu)f\|_B\leqslant\omega\|f\|_B$, если только $|\lambda-\mu|<\delta(\omega)$.*

Пусть $R_r=\{x:\inf_{y\in N}|x-y|\leqslant r\}$. Выберем r так, чтобы

$$\sup_{x\in E-R_r}|T_\lambda f(x)|\leqslant\frac{\omega}{3}\|f\|_B.$$

Это всегда возможно, так как

$$|T_\lambda f(x)| = \frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)f(s)\,ds\right| \leqslant \frac{\|f\|_B}{4\pi}\int\limits_E \frac{|q(s)|}{|x-s|}\,ds.$$

Но, при $x \in R_r$, можно λ и μ выбрать на столько близким, что

$$\int\limits_E \frac{|e^{i\lambda|x-s|}-e^{i\mu|x-s|}|}{|x-s|}\,ds$$

будет меньше, чем $\omega/3$. Из этих фактов вытекает сразу доказательство леммы 5.

Далее, поскольку $T_\lambda+I$ $(If=f)$ тоже непрерывно зависит от λ, то, на основании теоремы 2, оператор $\tilde{T}_\lambda = (T_\lambda+I)^{-1}$ является ограниченным, непрерывно зависящим от λ.

Если решение уравнения (18) обозначим через $G(x,y,\lambda^2) = g(x,y,\lambda^2)+1/4\pi|x-y|$ $(G=H$ для $J(\lambda)>0$, $G=\tilde{H}$ для $J(\lambda)=0)$ для $J(\lambda)\geqslant 0$, тогда можно написать:

$$(25)\qquad g(x,y,\lambda^2)-g(x,y,\mu^2) =$$

$$= \tilde{T}_\lambda\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}-e^{i\mu|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)\,ds}{|s-y|} - \frac{e^{i\lambda|x-y|}-e^{i\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right]+$$

$$+(\tilde{T}_\lambda-\tilde{T}_\mu)\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|}\cdot\frac{q(s)\,ds}{|s-y|} - \frac{e^{i\lambda|x-y|}-1}{4\pi|x-y|}\right],$$

где операторы $\tilde{T}_\lambda$, $\tilde{T}_\mu$ применяются по x. Из равенства (25) получаем оценку нормы:

$$\|g(x,y,\lambda^2)-g(x,y,\mu^2)\|_B = \sup_{x\in E}|g(x,y,\lambda^2)-g(x,y,\mu^2)|,$$

которая, на основании непрерывной зависимости оператора $\tilde{T}_\lambda$ от λ, даёт следующую теорему, показывающую, что $\tilde{H}(x,y,\lambda^2)$ является равномерым пределом ядра резольвенты $H(x,y,\lambda^2)$ при $J(\lambda)\to 0$:

Теорема 4. *Пусть отрезок $(\alpha,\beta)\in C(\Lambda)$ и Z множество комплексных чисел λ, для которых $\alpha<R(\lambda^2)<\beta$, $J(\lambda)\geqslant 0$. Тогда для $\lambda\to\lambda_0$*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} G(x,y,\lambda^2) = G(x,y,\lambda_0^2), \quad \textit{где} \quad \lambda,\lambda_0\in Z,$$

равномерно для $x,y\in E-R$ при $R=\{x\colon \inf\limits_{y\in N}|x-y|<\delta\}$.

Из теоремы следует, что свойства симметрии резольвентного ядра $H(x,y,\lambda^2)$ переносятся на функцию $\tilde{H}(x,y,\lambda^2)$:

$$(26)\qquad \tilde{H}(x,y,\lambda^2) = \overline{\tilde{H}(y,x,\bar{\lambda}^2)}.$$

IV. Задача рассеивания. Квантовая задача упругого рассеивания на атоме сводится к нахождению во всём эклидовом пространстве решения уравнения (1) вида $u=e^{i\lambda(\omega,x)}+v(x)$, где ω заданный единичный вектор, $J(\lambda)=0$, $\lambda^2\in C(\Lambda)$, функция $v(x)$ удовлетворяет на бесконечности условиям излучения (2). В окрестности особых точек потенциала $q(x)$ требуется, чтобы функция $v(x)$ являлась непрерывной. После подстановки $u=e^{i\lambda(\omega,x)}+v(x)$ в уравнение (1) получаем

$$(27)\qquad -\Delta v+q(x)v-\lambda^2\cdot v = -q(x)e^{i\lambda(\omega,x)}.$$

Тем самым задача сводится к решению уравнения (27).

Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям (I), (II), (III), (IV) и $\mathcal{T}_q$ обозначает множество функций $v(x)$ удовлетворяющих следующим условиям:

1. $v(x)$ дважды непрерывно дифференцируема для $x\in E-N$.
2. $v(x)$ удовлетворяет условиям излучения:

$$rv(x)=O(1)\quad (r\to\infty),\quad r\left(\frac{\partial v}{\partial r}-i\lambda v\right)=o(1),\quad r\to\infty\quad (r=|x|).$$

3. Имеетя

$$(28)\qquad \lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\sigma_n} v(x)\left(\int\limits_E \frac{|q(s)|}{|s-x|^2}\,ds\right)dx = 0,$$

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\sigma_n}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,dx = 0,$$

где $\sigma_n=\{x\colon \inf\limits_{y\in N}|x-y|=1/n\}$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 5. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям (I), (II), (III), (IV) и $\lambda^2\in C(\Lambda)$, тогда в классе $\mathcal{T}_q$ существует единственное решение $v(x)$ уравнения (27), причём*

$$v(x) = -\int\limits_E \tilde{H}(x,y,\lambda^2)e^{i\lambda(\omega,y)}q(y)\,dy;$$

$v(x)$ является непрерывной во всём пространстве E.

Доказательство. Пусть $v(x)\in\mathcal{T}_q$ и удовлетворяет уравнению (27). Применяя формулу Грина получаем (r достаточно большое):

$$\int\limits_{\Omega_r}\big(\Delta\tilde{H}(x,y,\lambda^2)v(y)-\Delta v(y)\tilde{H}(x,y,\lambda^2)\big)\,dy =$$

$$= \oint\limits_{\Sigma_r}\left(\frac{\partial\tilde{H}}{\partial r}v-\frac{\partial v}{\partial r}\tilde{H}\right)dy+$$

$$+\oint\limits_{\sigma_{r,x}}\left(\frac{\partial\tilde{H}}{\partial n}v-\frac{\partial v}{\partial n}\tilde{H}\right)dy+\oint\limits_{\sigma_r}\left(\frac{\partial\tilde{H}}{\partial n}v-\frac{\partial v}{\partial n}\tilde{H}\right)dy,$$

где

$$\Omega_r = K_r - K_{r,x} - S_r, \quad K_r = \{x\colon |x| \leqslant r\},$$

$$K_{r,x_0} = \left\{x\colon |x-x_0| \leqslant \frac{1}{r}\right\}, \quad S_r = \left\{x\colon \inf_{y\in N} |x-y| \leqslant \frac{1}{r}\right\}.$$

Σ_r, $\sigma_{r,x}$, σ_r обозначают соответсвенно поверхности ограничивающие множества $K_r, K_{r,x}$ и S_r. Первый интеграл правой части стремится для $r \to \infty$ к нулю, ибо $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ и $v(x)$ удовлетворяют на бесконечности условию излучения. Третий интеграл стремится к нулю на основании (28), (29), теоремы 3 и оценки (19). Второй интеграл правой части стремится к $v(x)$, ибо $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ для $x = y \neq P$ имеет особенность типа функции Грина. Окончательно, на основании (23) и свойств симметрии ядра $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$, получаем

$$v(x) = -\int_E \tilde{H}(x, y, \lambda^2) q(y) e^{i\lambda(\omega,y)} dy. \tag{30}$$

Таким образом, если решение существует, тогда оно единственно и имеет вид (30). Наоборот, функция $v(x)$, определённая равенством (30), дважды непрерывно дифференцируемая в $E-N$.

Действительно, $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ имеет для $x = y$ особенность типа функции Грина, и (оценки (19) и (22)) после двукратного дифференцирования по x, её поведение для $y \to N$ не ухудшается. Дальше, поскольку $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ удовлетворяет уравнению (23), $v(x)$ удовлетворяет уравнению (27). Докажем, что $v(x)$ выполняет условия излучения. Подставив в (30) выражение на $\tilde{H}(x, y, \lambda^2)$ из (20) получаем

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s) e^{i\lambda(\omega,s)} ds + \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s)\left[\int_E \tilde{H}(s, y, \lambda^2) q(y) e^{i\lambda(\omega,y)} dy\right] ds,$$

но, на основании теоремы 3, функция

$$\varphi(s) = \int_E \tilde{H}(s, y, \lambda^2) q(y) e^{i\lambda(\omega,y)} dy$$

является ограниченной на бесконечности и из лемм 1 и 2 следуют условия излучения для функции $v(x)$.

Докажем, что $v(x)$ непрерывна тоже для $x \in N$:

$$v(x) = -\int_{E-S_r} \tilde{H}(x, y, \lambda^2) q(y) e^{i\lambda(\omega,y)} dy - \int_{S_r} \tilde{H}(x, y, \lambda^2) q(y) e^{i\lambda(\omega,y)} dy. \tag{31}$$

Первый интеграл является непрерывной функцией для $x \in N$. Второй интеграл, на основании теоремы 3, меньше по абсолютной величине, чем

$$\int_{S_r} \frac{|q(y)|}{|x-y|} dy + M \int_{S_r} |q(y)| dy \int_E \frac{|q(s)|}{|s-y|^2} ds,$$

откуда из факта, что $q(y) \in L^2(S_r)$, следует, что второй интеграл равенства (31) сходится равномерно для $y \in N$ и тем самым является непрерывной функцией.

На основании свойства (III) потенциала получаем, что $v(x)$ удовлетворяет условию (28).

Осталось доказать, что $v(x)$ удовлетворяет равенству (29). Для доказательства продифференцируем по x равенство (30). В полученное равенство подставим вместо $\partial\tilde{H}/\partial x$ выражение (21). Тогда, используя теорему 3, получим очевидное неравенство

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant M_1 \int_E \frac{|q(y)|}{|x-y|^2} dy + M_2 \int_E \frac{|q(x)|}{|x-s|^2} ds \int_E \frac{|q(y)|}{|s-y|} dy + M_3 \int_E \frac{|q(s)|}{|x-s|^2} ds \left[\int_E |q(y)| \left(\int_E \frac{|q(t)|}{|t-y|^2} dt\right) dy\right],$$

где M_i $(i = 1, 2, 3)$ постоянные. Поскольку, на основании свойств $q(x)$ функция $\int_E |q(y)|/|s-y| dy$ является функцией непрерывной для $s \in E$, получаем, что $v(x)$ удовлетворяет свойству (29). Теорема 5 полностью доказана.

Литература

[1] M. Burnat, *Über partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus mit singulären Koeffizienten*, Studia Math. 18 (1959), стр. 137-159.

[2] М. Бурнат, *О решении одной задачи для уравнения Шредингера в бесконечном трехмерном пространстве*, ДАН СССР 112, No 2 (1957), стр. 224-227.

[3] Kato, *On the eigenfunctions of many-particle systems in quantum mechanics*, Comm. Pure and Appl. Math. 10 (1957), стр. 151-177.

[4] Костюченко, *О поведении собственных функций самосопряженных операторов*, ДАН СССР 114, No 2 (1957), стр. 249-252.

[5] K. Maurin, *Eine Abschätzung für Eigenfunktionen. Beschränkheit der Eigenfunktionen der verschiebungsinvarianten Operatoren auf homogenen Räumen*, Bull. Acad. Pol. Sci. 7, No 6 (1959), стр. 337-341.

[6] Повзнер, *О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора* $-\Delta u + cu$, Мат. Сборник 132 (74), No 1 (1953), стр. 109-156.

[7] Stummel, *Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen*, Math. Annalen 132 (1956), стр. 150-176.

[8] Шноль, *О поведении собственных функций уравнения Шредингера*, Мат. сборник 48 (84), No 3 (1957).

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1961