STUDIA MATHEMATICA, T. XXII. (1963)

Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes

par

P. BILLARD (Montpellier)

Les principaux résultats de ce travail ont été indiqués dans [1]. L'objet principal de notre étude est constitué par les fonctions périodiques réelles aléatoires $F(x)$ définies par leurs séries de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\Phi_n) \tag{1}$$

ou leurs séries de Fourier permutées

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x+\Phi_{m_n}) \tag{1'}$$

étant entendu qu'une permutation arbitraire est fixée une fois pour toutes.

Les amplitudes a_n sont supposées réelles et fixées, les phases Φ_n sont des variables aléatoires réelles et centrées, indépendantes en bloc, équiréparties modulo 2π. $\omega \in \Omega$ sera le champ de probabilité.

Notre attention est attirée par les propriétés

P_1. appartenance de $F(x)$ à L^∞,
P_2. continuité de $F(x)$,
P_3. convergence uniforme de (1),
P_3'. convergence uniforme de (1').

Visiblement P_3' presque sûre pour chaque (1') $\Rightarrow \mathrm{P}_3$ presque sûre $\Rightarrow \mathrm{P}_2$ presque sûre $\Rightarrow \mathrm{P}_1$ presque sûre.

Rappelons ce résultat connu que P_1 presque sûre $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$ en posant

$$A_k = \Big[\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n^2\Big]^{1/2}$$

et que si nous supposons que la suite A_k décroit, alors $\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty \Rightarrow \mathrm{P}_j$ presque sûre $(j=1,2,3)$ (cf. [2]).

Le fait que ces conditions sont les mêmes pour $j = 1, 2, 3$ et que P_j apparaît toujours avec la probabilité 0 ou 1 s'explique par le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si* P_1 *est presque sûre,* P_3' *est presque sûre pour chaque* (1').

C'est une conséquence visible des propositions A et B suivantes:

PROPOSITION A. *Si* P_1 *est presque sûre,* P_2 *est presque sûre.*

PROPOSITION B. *Si* P_2 *est presque sûre,* P_3' *est presque sûre pour chaque* (1').

Parallèlement à l'étude de (1) nous nous intéresserons aux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx \tag{2}$$

(et à leurs permutées (2')) pour lesquelles nous obtiendrons les théorèmes suivants:

THÉORÈME 2. *Si* P_2 *est presque sûre pour* (2), P_3' *est presque sûre pour chaque* (2').

THÉORÈME 2'. *Si* P_1 *est presque sûre pour* (2), *chaque* (2') *a presque sûrement ses sommes partielles uniformément bornées.*

Nous avons posé la question de savoir si P_1 presque sûre pour (2) entraîne que P_2 est presque sûre pour (2) (cf. [1]). L'étude des conséquences du théorème 2' permet de répondre à cette question dans des cas particuliers. Nous avons en effet des théorèmes 2 et 2' le

COROLLAIRE. *Si* P_1 (*ou* P_2) *est presque sûre pour* (2), *pour chaque suite réelle* (λ_n) *avec* $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ P_1 (*ou* P_2) *est presque sûre pour*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \lambda_n a_n \cos nx. \tag{2''}$$

Ce corollaire donne une proposition voisine de la proposition A:

PROPOSITION A'. *Si* P_1 *est presque sûre pour* (2) *et ses conjuguées* (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin nx$, *alors* P_2 *est presque sûre pour* (2) *et* (3),

et aussi la

PROPOSITION C. *Si* P_1 *est presque sûre pour* (2) *et ses conjuguées* (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin nx$, *alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + \Phi_n)$ *du type* (1) *obtenue à partir de* (2) *vérifie* P_1 *presque sûrement.*

Exemples. a) Si (2) est telle que P_1 est presque sûre, p étant un entier, il en est de même de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n\left(x + \frac{\pi}{p}\right)$$

et par suite des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \left[a_{np+j} \cos \frac{(np+j)\pi}{p} \cos(np+j)x - a_{np+j} \sin \frac{(np+j)\pi}{p} \sin(np+j)x\right]$$

pour $j = 1, 2, \ldots, p-1$. Puisque

$$\cos \frac{(np+j)\pi}{p} = \pm \cos \frac{j\pi}{p}, \quad \sin \frac{(np+j)\pi}{p} = \pm \sin \frac{j\pi}{p}$$

et que

$$\sin\left(j\frac{\pi}{p}\right) \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p-1),$$

P_1 est presque sûre pour les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_{np+j} \sin(np+j)x \quad (j = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Donc si P_1 est presque sûre pour (2) et s'il existe un entier p tel que $a_{pn} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alors P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin nx. \tag{3}$$

b) Si P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + \Psi_n), \tag{4}$$

où les Ψ_n sont des variables aléatoires indépendantes en bloc ne prenant que les valeurs $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ avec probabilité égale $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, alors P_2 est aussi presque sûre pour (4) et pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + \Phi_n)$ de type (1) obtenue à partir de (4).

c) Si P_1 est presque sûre pour la série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n e^{inx}$ (c_n complexe), P_2 est aussi presque sûre pour cette série et pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i[nx+\Phi_n]}$ (Φ_n équiréparties).

d) Une autre façon d'exprimer le résultat c) est de dire que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n z^n$ représente presque sûrement une fonction holomorphe bornée dans le disque ouvert $|z| < 1$, elle est presque sûrement uniformément convergente dans le disque fermé $|z| \leqslant 1$.

Démonstrations des résultats

Ces démonstrations s'appuient sur les lemmes suivants dont certains sont classiques:

LEMME 1. *Si* (1) *est telle que* P_1 *(ou* P_2*) est presque sûre, il existe pour* (1′) *une suite d'indices* (n_k) *telle que les sommes partielles de rang* n_k *de* (1′) *soient presque sûrement uniformément bornées (ou uniformément convergentes) (même résultat pour* (2) *et* (2′)*).*

LEMME 2. *Si* (1) *est telle que* P_1 *(ou* P_2*) est presque sûre, pour toute suite d'indices* (n_k) *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\cos(n_k x+\Phi_{n_k})$ *vérifie presque sûrement* P_1 *(ou* P_2*) (même résultat pour* (2)*).*

LEMME 3. *Si f est une fonction périodique réelle bornée telle qu'il existe des bandes* $[n_k m_k]$, $n_k \leqslant m_k$, $n_{k+1}/m_k \geqslant \lambda > 1$ $(k=1,2,\ldots)$ *en dehors desquelles les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors la suite des sommes partielles de rang* m_k *de la série de Fourier de f est uniformément bornée.*

LEMME 4. *Si* (c_n) *est une suite réelle telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2=\infty$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty}\pm c_n$ *a presque sûrement ses sommes partielles non bornées.*

LEMME 5. *Si* (1) *(ou* (2)*) n'est pas presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue, il existe un couple* (ε,η) *de nombres positifs, tels que, quel que soit l'entier N, il existe un „bloc"*

$$U_{n_N m_N}=\sum_{p=n_N+1}^{m_N} a_p\cos(px+\Phi_p)\qquad\Big(ou=\sum_{p=n_N+1}^{m_N}\pm a_p\cos px\Big)$$

avec $N\leqslant n_N<m_N$ *tel que*

$$\operatorname{Prob}\{\sup_x|U_{n_N m_N}(x)|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\eta.$$

LEMME 6. *Si* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *sont des intervalles ouverts que nous plaçons au hasard sur le cercle trigonométrique,* $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n$ *étant les abscisses de leurs centres, il est presque sûr qu'il existe un point du cercle appartenant à une infinité d'entre eux, et même, il est presque sûr que l'ensemble des points du cercle appartenant à une infinité d'entre eux soit de deuxième catégorie.*

Démonstrations des lemmes. Lemme 1. Il suffit de considérer une suite d'indices (n_k) telle que

$$\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} m_n\leqslant 2\inf_{n_{k+2}<n\leqslant n_{k+3}} m_n$$

puis de rétablir l'ordre naturel dans les blocs $n_k<n\leqslant n_{k+1}$ après avoir décomposé la série en deux (cf. [3], p. 220).

Lemme 2 (cf. [3], p. 220).

Lemme 3 (cf. [3], p. 79).

Lemme 4 (cf. [3], p. 205, remarque d).

Lemme 5. S'il est inexact, prenant successivement $\varepsilon,\eta=1/2^{\nu}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ nous pouvons former une suite croissante d'indices $\{N_\nu\}$ telle que

$$\operatorname{Prob}_{[\Phi]}\Big\{\sup_x|U_{N_\nu N_{\nu+1}}(x)|\geqslant\frac{1}{2^\nu}\Big\}<\frac{1}{2^\nu}.$$

Il s'ensuit que la suite $\{N_\nu\}$ est une suite d'indices de convergence uniforme presque sûre de (1) ce qui est contradictoire.

Lemme 6. Nous considérons par exemple les systèmes d'intervalles

$$\begin{array}{ll}(S_1) & I_1, I_3, I_6, I_{10},\\ (S_2) & I_2, I_4, I_7, I_{11},\\ (S_3) & I_5, I_8, I_{12}, I_{17},\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Si nous fixons un intervalle I du cercle trigonométrique, de longueur $2\pi\alpha$ $(0<\alpha<1)$ la probabilité pour qu'un intervalle déterminé de (S_1) n'ait pas de point dans I est $\leqslant 1-\alpha$. Nous voyons ainsi que l'ouvert

$$O_1=\bigcup_{I_n\in(S_1)} I_n$$

a presque sûrement des points dans I. Prenant les intervalles I d'extrémités rationnelles, nous voyons que O_1 est presque sûrement partout dense. Ainsi il est presque sûr que tous les O_j soient partout denses, d'où le lemme.

Démonstration de la proposition A. Supposons que (1) soit presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée, mais non presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue. D'après le lemme 5, nous voyons la possibilité de former une suite de blocs $U_k = U_{n_k m_k}$, $n_k<m_k$, $n_{k+1}/m_k\geqslant 2$ $(k=1,2,\ldots)$ tels que

$$\operatorname{Prob}_{[\Phi]}\{\sup_x|U_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\eta\quad\text{pour tout } k.$$

Les événements $\sup_x|U_k(x)|\geqslant\varepsilon$ étant indépendants, il est presque sûr qu'une infinité d'entre eux se réalisent. Considérons la série

$$(2''')\qquad\sum_{k=1}^{\infty}U_k$$

qui est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée (lemme 2). Dans chaque bloc U_k remplaçons x par $x-\Psi_k$. Dans le champ $[\Phi]\times[\Psi]$ où $[\Psi]$ est le champ des suites $(\Psi_1,\Psi_2,\ldots)$ défini comme $[\Phi]$, il est presque sûr que (2''') est la série de Fourier d'une fonction bornée. Nous pouvons ainsi nous fixer une suite de nombres (φ_n) (et non plus de variables aléatoires) telle que

a) Pour une suite d'indices k_j, $k_{j+1} > k_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ nous avons des intervalles ouverts I_{k_j} tels que si $x \in I_{k_j}$ nous avons

$$|U_{k_j}(x)| = \Big|\sum_{p=n_{k_j}+1}^{m_{k_j}} a_p \cos(px+\varphi_p)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Il est presque sûr dans $[\Psi]$ que (2''') (où les Φ_n sont fixées égales à φ_n) est la série de Fourier d'une fonction bornée.

Cela étant, remplaçons maintenant Ψ_k par $\Psi_k + \chi_k$ où χ_k ne prend que les valeurs 0 ou π avec probabilité égale, les variables aléatoires χ_k étant indépendantes en bloc et indépendantes des Ψ_k.

Dans le champ $[\Psi]\times[\chi]$ où $[\chi]$ est le champ des suites $(\chi_1, \chi_2, \ldots)$ il est presque sûr que (2''') est la série de Fourier d'une fonction bornée. Utilisant alors le lemme 6, nous pouvons nous fixer une suite de nombres (Ψ_k) telle que

a') Un point x du cercle appartient à une infinité $I_{k_{j_l}}$ des intervalles I_{k_j} translatés de Ψ_{k_j}.

b') Presque sûrement (dans $[\chi]$) (2''') est la série de Fourier d'une fonction bornée.

Si nous supposons, ce qui est une restriction que nous leverons dans un instant, que (1) a tous ses coefficients d'indice pair nuls, les séries que nous obtenons sont les séries $\sum_{k=1}^{\infty} \pm U_k$. Or si nous nous plaçons au point x, les lemmes 3 et 4 se contredisent. Pour lever la restriction faite, il suffit (lemme 2) d'examiner le cas où tous les coefficients de (1) d'indice impair sont nuls. Nous remplaçons alors les Φ_n par $\Phi_n + \pi/2$, multiplions par $-i$, ajoutons à (1) et multiplions par e^{ix}.

Démonstration du théorème 2 dans l'ordre naturel de (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\omega_n)$, ω_n *ne prenant que les valeurs* 0 *et* π *avec probabilité égale* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Le champ de probabilité est le champ $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, Ω_n étant le champ à deux éléments 0 et π, $\omega \in \Omega$ est une suite $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ où $\omega_n = 0$ ou π. (n_k) désigne une suite d'indices de convergence uniforme presque sûre de

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\omega_n).$$

Faisons l'hypothèse (H) que (2) n'est pas presque sûrement uniformément convergente et montrons que nous aboutissons à une contradiction.

Il existe un nombre positif ε tel que l'événement probabilisable

$$E \subset \Omega, \qquad E = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \overline{\lim_{n\to\infty}}[\sup_x |s_{n_k n}(x, \omega)|] > \varepsilon\}$$

soit de probabilité positive en posant

$$s_{n_k n}(x, \omega) = \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \cos(jx+\omega_j) \qquad (n > n_k).$$

En effet, sinon pour chaque $\varepsilon > 0$, l'événement probabilisable

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists k \text{ avec } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_x |s_{n_k n}(x, \omega)| \leqslant \varepsilon\}$$

et par suite l'événement

$$\{\omega \in \Omega \mid \overline{\lim_{\substack{n,m\to\infty \\ (n<m)}}} \sup_x |s_{nm}(x, \omega)| \leqslant 2\varepsilon\}$$

est de probabilité égale à 1. Prenons alors une suite ε_j de nombres positifs décroissants avec $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ et l'événement commun aux événements,

$$\{\omega \in \Omega \mid \overline{\lim_{\substack{n,m\to\infty \\ (n<m)}}} \sup_x |s_{nm}(x, \omega)| \leqslant 2\varepsilon_j\};$$

nous obtenons un événement de probabilité égale à 1. De là il est presque sûr que (2) converge uniformément contrairement à (H).

Posons

$$\lambda_k(\omega) = \sup_{\substack{x,k' \\ (k'>k)}} |s_{n_k n_{k'}}(x, \omega)|,$$

$\lambda_k(\omega)$ est une variable aléatoire sur Ω et $\lim_{k\to\infty} \lambda_k(\omega) = 0$ presque sûrement. Fixons nous alors k arbitrairement grand tel que l'événement

$$E' = \Big\{\omega \mid \sup_{\substack{x,k' \\ (k'>k)}} |s_{n_k n_{k'}}(x, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\}$$

vérifie $\operatorname{Prob}(E') > 1 - \frac{1}{2}\operatorname{Prob}(E)$ (théorème d'Egoroff), puis formons un événement O qui est une union d'événements élémentaires disjoints (un événement élémentaire est un événement $\{\omega \in \Omega \mid \omega_1\ \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont fixés, $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots$ libres$\}$) tel que $E \subset O$ avec $\operatorname{Prob}(O) < \frac{3}{2}\operatorname{Prob}(E)$. Pour chaque $\omega' \in E$, nous pouvons trouver $x_{\omega'}$, et $m_{\omega'} > n_k$ tels que

$$|s_{n_k m_{\omega'}}(x_{\omega'}, \omega')| > \varepsilon$$

et cette inégalité se conserve lorsque $m_{\omega'}$ et $x_{\omega'}$ restant fixés ω varie dans l'événement élémentaire dont les coordonnées fixées sont celles de

ω' jusqu'au rang $m_{\omega'}$ inclus. Mais puisque $m_{\omega'}$ peut être pris arbitrairement grand, nous pouvons faire en sorte que cet événement élémentaire soit inclus dans O. Nous avons ainsi un famille $\mathcal{F}$ d'événements élémentaires inclus dans O et recouvrant E.

Disons qu'un élémentaire de $\mathcal{F}$ est *extrémal* si et seulement si il n'existe aucun autre élémentaire de $\mathcal{F}$ le contenant strictement. Tout élémentaire de $\mathcal{F}$ est contenu dans un élémentaire extrémal de $\mathcal{F}$. Puisque d'autre part deux élémentaires sont ou bien disjoints, ou bien tels que l'un d'eux est inclus dans l'autre, les différents élémentaires extrémaux de $\mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints et recouvrent E.

Nous avons ainsi une famille au plus dénombrable d'événements élémentaires E_{m_i} ($i = 1, 2, \ldots$ ou $i = 1, 2, \ldots, n$) (les coordonnées libres de E_{m_i} débutant à m_i+1 inclus) avec des points correspondants x_i tels que

$$E_{m_i} \cap E_{m_j} = \emptyset \text{ si } i \neq j, \qquad |s_{n_k m_i}(x_i, \omega)| > \varepsilon \text{ si } \omega \in E_{m_i}, \qquad E \subset \bigcup_i E_{m_i} \subset O.$$

Observons maintenant qu'il existe nécessairement un indice i tel que

$$\mathrm{Prob}(E' \cap E_{m_i}) \geqslant \tfrac{1}{4}\mathrm{Prob}(E_{m_i}).$$

Supposons en effet le contraire, les E_{m_i} étant disjoints nous avons $\mathrm{Prob}(\bigcup_i E_{m_i} \cap E') < \frac{1}{4}\mathrm{Prob}(\bigcup_i E_{m_i})$ d'où $\mathrm{Prob}(E \cap E') < \frac{1}{4}\mathrm{Prob}(O)$ et puisque $\mathrm{Prob}(E') > 1 - \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(E)$, nous avons $\frac{1}{2}\mathrm{Prob}(E) < \frac{1}{4}\mathrm{Prob}(O) < \frac{3}{8}\mathrm{Prob}(E)$ ce qui est impossible.

Plaçons nous alors sur cet événement E_{m_i} tel que

$$\mathrm{Prob}(E_{m_i} \cap E') \geqslant \tfrac{1}{4}\mathrm{Prob}(E_{m_i}),$$

puis fixons nous k' tel que $m_i < n_{k'}$. Nous avons

$$\omega \in E_{m_i} \cap E' \Rightarrow |s_{m_i n_{k'}}(x_i, \omega)| = |s_{n_k m_i}(x_i, \omega) - s_{n_k n_{k'}}(x_i, \omega)| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

puisque du fait que $\omega \in E_{m_i}$, nous avons

$$|s_{n_k m_i}(x_i, \omega)| > \varepsilon$$

et que, du fait que $\omega \in E'$ nous avons

$$|s_{n_k n_{k'}}(x_i, \omega)| \leqslant \sup_x |s_{n_k n_{k'}}(x, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\omega \in E_{m_i} \cap E' \Rightarrow s^2_{m_i n_{k'}}(x_i, \omega) \geqslant \varepsilon^2/4$ mais alors

$$\mathrm{Prob}(E_{m_i}) \sum_{j=m_i+1}^{n_{k'}} a_j^2 \cos^2 jx_i = \int_{E_{m_i}} s^2_{m_i n_{k'}}(x_i, \omega)\, d\omega$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon^2}{4} \mathrm{Prob}(E_{m_i} \cap E') \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{1}{4}\mathrm{Prob}(E_{m_i})\right],$$

d'où

$$\sum_{j=m_i+1}^{n_{k'}} a_j^2 \cos^2 jx_i \geqslant \frac{\varepsilon^2}{16}$$

puisque $\mathrm{Prob}(E_{m_i}) > 0$. Or ceci est impossible si k a été fixé assez grand ($m_i > n_k$). L'hypothèse (H) est donc à rejeter.

Si nous voulons maintenant obtenir le résultat pour

$$(2') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \omega_{m_n})$$

observons que P_2 presque sûr pour (2′) entraîne que P_2 est presque sûr pour

$$(\hat{2}') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \omega_n)$$

car la correspondance $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega \to (\omega_{m_1}, \omega_{m_2}, \ldots, \omega_{m_n}, \ldots) \in \Omega$ qui est bijective conserve les probabilités.

Le raisonnement fait se répète mot pour mot, seule la suite d'indice de convergence uniforme presque sûre est changée. Ainsi le théorème 2 est établi dans toute sa généralité.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Il suffit de démontrer la proposition B. Supposons donc que (1′) soit presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue. Nous considérons

$$(1'') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \Phi_{m_n} + \Psi_n),$$

où les variables aléatoires Ψ_n sont indépendantes en bloc, indépendantes des Φ_n, et ne prennent que les valeurs 0 et π avec probabilité égale $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Pour chaque suite (Ψ_n) fixée, P_2 est presque sûre (dans $[\Phi]$) pour (1″). Donc pour (1″), P_2 est presque sûre dans le champ produit $[\Phi]\times[\Psi]$, et par suite, pour presque toute suite (Φ_n) fixée, P_2 est presque sûre (dans $[\Psi]$) pour (1″). D'après le théorème 2, il en résulte que pour presque toute suite (Φ_n) fixée, P_3' est presque sûre (dans $[\Psi]$) pour (1″) et, par suite, pour (1″), P_3' est presque sûre dans $[\Phi]\times[\Psi]$.

Nous pouvons donc nous fixer une suite numérique (ψ_n) telle que P_3' soit presque sûre (dans $[\Phi]$) pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \Phi_{m_n} + \psi_n).$$

De là, P_3' est presque sûre pour (1′).

Démonstration du théorème 2'. Nous la ferons d'abord dans l'ordre naturel. Nous supposons donc que P_1 est presque sûr pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\omega_n). \tag{2}$$

Nous désignons par (n_k) une suite d'indices telle que les sommes partielles de rang n_k de (2) sont presque sûrement uniformément bornées.

Faisons l'hypothèse (H') qu'il n'est pas presque sûre que (2) a ses sommes partielles uniformément bornées et montrons que nous aboutissons à une contradiction. En effet d'après (H'), l'événement

$$E \subset \Omega, \quad E = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall k \ \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sup_x |s_{n_k n}(x,\omega)|] = \infty\}$$

est de probabilité positive.

Fixons nous arbitrairement l'entier k. L'expression

$$\lambda_k(\omega) = \sup_{\substack{x,k' \\ (k'>k)}} |s_{n_k n_{k'}}(x,\omega)|$$

est finie presque sûrement. Choisissons alors $M>0$ arbitrairement grand, tel que l'événement

$$E' = \{\omega \in \Omega \,|\, \sup_{\substack{x,k' \\ (k'>k)}} |s_{n_k n_{k'}}(x,\omega)| < M\}$$

vérifie $\mathrm{Prob}(E') > 1 - \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(E)$. Formons un événement O qui est une union d'événements élémentaires disjoints tel que

$$E \subset O \quad \text{avec} \quad \mathrm{Prob}(O) < \tfrac{3}{2}\mathrm{Prob}(E).$$

Pour chaque $\omega' \in E$ nous pouvons trouver $x_{\omega'}$ et $m_{\omega'} > n_k$ tels que

$$|s_{n_k m_{\omega'}}(x_{\omega'},\omega')| > 2M$$

et cette inégalité se conserve lorsque $m_{\omega'}$ et $x_{\omega'}$ restant fixés, ω varie dans l'événement élémentaire dont les coordonnées fixées sont celles de ω' jusqu'au rang $m_{\omega'}$, inclus. Mais puisque $m_{\omega'}$ peut être pris arbitrairement grand, nous pouvons faire en sorte que cet événement élémentaire soit inclus dans O.

Comme précédemment, dans la démonstration du théorème 2, nous voyons la possibilité de former une famille au plus dénombrable de ces événements élémentaires

$$E_{m_i} \quad (i = 1, 2, \ldots \text{ ou } i = 1, 2, \ldots, n)$$

(les coordonnées libres de E_{m_i} débutant à m_i+1 inclus) avec des points correspondants x_i tels que

$$E_{m_i} \cap E_{m_j} = \emptyset \text{ si } i \neq j, \quad |s_{n_k m_i}(x_i,\omega)| > 2M \text{ si } \omega \in E_{m_i}$$

et $E \subset \bigcup_i E_{m_i} \subset O$.

Comme précédemment il existe un indice i tel que

$$\mathrm{Prob}(E' \cap E_{m_i}) \geqslant \tfrac{1}{4}\mathrm{Prob}(E_{m_i}).$$

Plaçons nous sur cet événement élémentaire E_{m_i} et fixons nous k' tel que $m_i < n_{k'}$. Nous avons

$$\omega \in E_{m_i} \cap E' \Rightarrow |s_{m_i n_{k'}}(x_i,\omega)| = |s_{n_k m_i}(x_i,\omega) - s_{n_k n_{k'}}(x_i,\omega)| \geqslant 2M - M = M$$

car

$$\omega \in E_{m_i} \Rightarrow |s_{n_k m_i}(x_i,\omega)| > 2M$$

et

$$\omega \in E' \Rightarrow |s_{n_k n_{k'}}(x_i,\omega)| \leqslant \sup_{\substack{x,k'' \\ (k''>k)}} |s_{n_k n_{k''}}(x,\omega)| < M,$$

donc

$$\omega \in E_{m_i} \cap E' \Rightarrow s^2_{m_i n_{k'}}(x_i,\omega) \geqslant M^2.$$

De là

$$\mathrm{Prob}(E_{m_i})\Big[\sum_{j=m_i+1}^{n_{k'}} a_j^2 \cos^2(jx_i)\Big] = \int_{E_{m_i}} s^2_{m_i n_{k'}}(x_i,\omega)\,d\omega$$

$$\geqslant M^2 \mathrm{Prob}(E_{m_i} \cap E') \geqslant M^2[\tfrac{1}{4}\mathrm{Prob}(E_{m_i})]$$

et, puisque $\mathrm{Prob}(E_{m_i}) > 0$,

$$\sum_{j=m_i+1}^{n_{k'}} a_j^2 \cos^2(jx_i) \geqslant \frac{M^2}{4},$$

ce qui est impossible si $M>0$ a été fixé suffisamment grand.

Si nous voulons le résultat pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \omega_{m_n}) \tag{2'}$$

observons que P_1 presque sûr pour (2') entraîne P_1 presque sûr pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \omega_n) \tag{$\hat{2}'$}$$

car la correspondance $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega \to (\omega_{m_1}, \omega_{m_2}, \ldots, \omega_{m_n}, \ldots) \in \Omega$ conserve les probabilités.

Le raisonnement fait se répète mot pour mot, seule la suite d'indices (n_k) pour laquelle les sommes partielles de rang n_k de $(\hat{2}')$ sont presque sûrement uniformément bornées, est changée. Le théorème 2' est complètement établi.

Démonstration du corollaire. Observons tout d'abord que ce résultat est trivial dans le cas des séries (1) car si nous supposons par exemple que P_1 est presque sûr pour (1), si nous nous fixons arbitrairement une suite réelle (λ_n) avec $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, nous pouvons toujours trouver des angles φ_n tels que $\lambda_n = \cos\varphi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \cos(nx + \Phi_n)$$

s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tfrac{1}{2}[\cos(nx + \Phi_n + \varphi_n) + \cos(nx + \Phi_n - \varphi_n)].$$

Pour éviter des confusions dans les notations, nous écrirons (2) sous la forme

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \cos nx \quad \text{où} \quad \varepsilon_n = \pm 1.$$

Démonstration de la proposition. P_2 *presque sûre pour*

$$(2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \cos nx \Rightarrow P_2 \ \textit{presque sûre pour} \ (\bar{2}) \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n a_n \cos nx.$$

Si nous considérons un bloc

$$\sum_{p=n+1}^{m} \varepsilon_p \lambda_p a_p \cos px \qquad (n < m)$$

de $(\bar{2})$, nous choisissons l'une quelconque $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-n})$ des permutations de la suite $(n+1, n+2, \ldots, m)$ de sorte que les λ_i $(n < i \leqslant m)$ deviennent une suite monotone décroissante: $\lambda_{\nu_1} \geqslant \lambda_{\nu_2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\nu_{m-n}}$. Ceci fait, nous considérons les sommes

$$s^*_{\nu_1\nu_k}(x) = \sum_{p=1}^{k} \varepsilon_{\nu_p} a_{\nu_p} \cos \nu_p x \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-n).$$

Lemme. *Pour tout couple (ε, η) de nombres positifs, il existe un entier naturel N tel que pour tout bloc*

$$\sum_{p=n+1}^{m} \varepsilon_p \lambda_p a_p \cos px \quad \textit{avec} \quad N \leqslant n < m$$

nous ayons

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant k \leqslant m-n}} |s^*_{\nu_1\nu_k}(x)| \geqslant \varepsilon\} < \eta.$$

Démonstration. Supposons en effet le contraire. Alors il existe un couple (ε, η) de nombres positifs tels que, quel que soit N, nous ayons un bloc

$$\sum_{p=n+1}^{m} \varepsilon_p \lambda_p a_p \cos px \quad \text{avec} \quad N \leqslant n < m$$

tel que pour une permutation convenable $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-n})$ de $(n+1, n+2, \ldots, m)$ avec $\lambda_{\nu_1} \geqslant \lambda_{\nu_2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\nu_{m-n}}$ nous ayons

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant k \leqslant m-n}} |s^*_{\nu_1\nu_k}(x)| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \eta.$$

Nous voyons ainsi la possibilité de former une suite de blocs

$$\sum_{p=n_j+1}^{m_j} \varepsilon_p \lambda_p a_p \cos px \qquad (n_j < m_j, \ n_{j+1} > m_j, \ j = 1, 2, \ldots)$$

tels que, pour des permutations convenables $(\nu_1^j, \nu_2^j, \ldots, \nu_{m_j-n_j}^j)$ des bandes $(n_j+1, n_j+2, \ldots, m_j)$ satisfaisant $\lambda_{\nu_1^j} \geqslant \lambda_{\nu_2^j} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\nu_{m_j-n_j}^j}$ nous ayons

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant k \leqslant m_j-n_j}} |s^*_{\nu_1^j\nu_k^j}(x)| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \eta.$$

Les événements entre parenthèses étant indépendants, il est presque sûr qu'une infinité d'entre eux se réalisent, et par suite, il est presque sûr que la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{k=1}^{m_j-n_j} \varepsilon_{\nu_k^j} a_{\nu_k^j} \cos \nu_k^j x \Big\}$$

soit non uniformément convergente. Or cette série est une permutée de la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{n=n_j+1}^{m_j} \varepsilon_n a_n \cos nx \Big\}$$

qui est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue (lemme 2). Nous avons donc une contradiction avec le théorème 2, ce qui établit le lemme.

Démonstration de la proposition annoncée. Du lemme qui précède, nous déduisons l'existence d'une suite croissante d'indices (N_l) $(l = 1, 2, \ldots)$ telle que si $(\nu_1^l, \nu_2^l, \ldots, \nu_{N_{l+1}-N_l}^l)$ est une permutation de $(N_l+1, N_l+2, \ldots, N_{l+1})$ vérifiant $\lambda_{\nu_1^l} \geqslant \lambda_{\nu_2^l} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\nu_{N_{l+1}-N_l}^l}$ nous avons

$$\mathrm{Prob}\Big\{\sup_{\substack{x \\ 1 \leqslant k \leqslant N_{l+1}-N_l}} |s^*_{\nu_1^l\nu_k^l}(x)| \geqslant \frac{1}{2^l}\Big\} < \frac{1}{2^l}.$$

Ainsi il est presque sûr que seulement un nombre fini (dépendant du hasard) des événements entre parenthèses se réalisent. Quand l (dépendant du hasard) est assez grand pour que l'événement ne se produise plus, nous avons

$$\Big|\sum_{k=1}^{N_{l+1}-N_l} \varepsilon_{\nu_k^l}\lambda_{\nu_k^l}a_{\nu_k^l}\cos\nu_k^l x\Big|$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{N_{l+1}-N_l-1}(\lambda_{\nu_k^l}-\lambda_{\nu_{k+1}^l})s^*_{\nu_1^l\nu_k^l}(x)+\lambda_{\nu^l_{N_{l+1}-N_l}}s^*_{\nu_1^l\nu^l_{N_{l+1}-N_l}}(x)\Big|$$

$$\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{N_{l+1}-N_l-1}(\lambda_{\nu_k^l}-\lambda_{\nu_{k+1}^l})+\lambda_{\nu^l_{N_{l+1}-N_l}}\Big]\Big[\sup_{\substack{x\\ 1\leqslant k\leqslant N_{l+1}-N_l}}|s^*_{\nu_1^l\nu_k^l}(x)|\Big]\leqslant\lambda_{\nu_1^l}\frac{1}{2^l}\leqslant\frac{1}{2^l}$$

et comme

$$\Big|\sum_{k=1}^{N_{l+1}-N_l}\varepsilon_{\nu_k^l}\lambda_{\nu_k^l}a_{\nu_k^l}\cos\nu_k^l x\Big|=\Big|\sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx\Big|$$

nous voyons que la suite d'indices (N_l) est une suite d'indices de convergence uniforme presque sûre de la série

$$(\overline{2})\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx,$$

donc P_2 est presque sûre pour $(\overline{2})$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration de la proposition. P_1 *presque sûre pour* (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n\cos nx\Rightarrow \mathrm{P}_1$ *presque sûre pour* $(\overline{2})$ $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx$.

Remarques préliminaires. Observons que si une série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ a tous ses coefficients nuls en dehors de ceux d'un bloc

$$\sum_{n=N+1}^{N'}a_n\cos nx\qquad (N<N')$$

et si nous considérons la différence $\sigma_{N''}-s_{N'}$ entre la moyenne de Fejér de rang $N''>N'$ et la somme de rang N' de la série, la valeur absolue de cette différence est majorée (indépendamment de x) par une expression qui est linéaire par rapport aux $|a_n|$ et dont les coefficients, dépendant de N'', tendent vers zéro lorsque N'' tend vers l'infini. Donc, dès que N'' est assez grand, nous avons $|\sigma_{N''}-s_{N'}|<1$ uniformément en x.

Démonstration de la proposition annoncée. Choisissons une suite d'indices (n_k) croissant assez rapidement pour que, quel que soit k et A_k sous ensemble de la bande $(1,2,\ldots,n_k)$ nous ayons

$$\Big|\sigma_{A_k,n_{k+1}}-\sum_{n\in A_k}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx\Big|<1$$

quel que soit x et quel que soit la suite (ε_n), $\sigma_{A_k,n_{k+1}}$ étant la moyenne de Fejér de rang n_{k+1} de $\sum_{n\in A_k}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx$. Considérons alors les deux séries

$$(\overline{2}')\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\sum_{n=n_{2j}+1}^{n_{2j+1}}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx\Big\},$$

$$(\overline{2}'')\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\sum_{n=n_{2j+1}+1}^{n_{2j+2}}\varepsilon_n\lambda_n a_n\cos nx\Big\},$$

et faisons l'hypothèse (H″) que $(\overline{2})$ n'est pas presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée. Il en résulte qu'il en est nécessairement de même de l'une au moins de deux séries $(\overline{2}')$ et $(\overline{2}'')$. Supposons que ce soit le cas pour $(\overline{2}')$ ce qui est sans importance.

Ecrivons pour simplifier que $(\overline{2}')$ sous la forme

$$(\overline{2}')\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n a'_n\cos nx$$

où $a'_n=0$ sauf s'il existe j tel que $n_{2j}<n\leqslant n_{2j+1}$ auquel cas $a'_n=a_n$. Posons aussi $m_j=n_{2j+1}$, $m'_j=m_{2j+2}$ $(j=1,2,\ldots)$, de sorte que $a'_n=0$ pour $m_j<n\leqslant m'_j$.

Soit η la probabilité avec laquelle $(\overline{2}')$ est la série de Fourier d'une fonction non bornée. Nous avons $\eta>0$.

Quels que soient $M>0$ et l'entier j que nous nous fixons, nous avons

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x,j'\\(j'>j)}}|s_{m_jm_{j'}}(x)|>M\}\geqslant\eta$$

en posant

$$s_{m_jm_{j'}}(x)=\sum_{n=m_j+1}^{m_{j'}}\varepsilon_n\lambda_n a'_n\cos nx,$$

puisque si

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x,j'\\(j'>j)}}|s_{m_jm_{j'}}(x)|>M\}<\eta$$

nous en déduisons, par l'utilisation de la suite d'indices (m_j), que la probabilité pour laquelle $(\overline{2}')$ est la série de Fourier d'une fonction non bornée est $<\eta$. Donnons nous alors une suite croissante M_k de nombres positifs $(M_1>1)$ telle que

$$\lim_{k\to\infty}M_k=\infty$$

et, supposant que les indices $j_1<j_2<\ldots<j_k$ aient été choisis, définissons j_{k+1} de façon que

$$\mathrm{Prob}\{\sup_{\substack{x,j\\(j_k<j\leqslant j_{k+1})}}|s_{m_{j_k}m_j}(x)|>M_k\}>\eta/2.$$

Les événements entre parenthèses étant indépendants, il est presque sûr qu'une infinité d'entre eux se réalisent. Or précisément lorsque nous avons un indice j avec $j_k < j \leqslant j_{k+1}$ tel que

$$\sup_x |s_{m_{j_k} m_j}(x)| > M_k.$$

Nous avons aussi

$$\sup_x |\sigma_{m_{j_k} m_j'}(x)| > M_k - 1$$

où $\sigma_{m_{j_k} m_j'}$ est la moyenne de Fejér de rang m_j' de

$$\sum_{n=m_{j_k}+1}^{m_{j_{k+1}}} \varepsilon_n \lambda_n a_n' \cos nx$$

et il résulte d'après les propriétés connues du noyau de Fejér, que

$$\sup_x |s_{m_{j_k} m_{j_{k+1}}}(x)| > M_k - 1$$

(puisque $\sup_x |s_{m_{j_k} m_{j_{k+1}}}(x)| \leqslant M_k - 1 \Rightarrow \sup_x |\sigma_{m_{j_k} m_j'}(x)| \leqslant M_k - 1$). Donc il est presque sûr qu'une infinité des événements

$$\{\sup_x |s_{m_{j_k} m_{j_{k+1}}}(x)| > M_k - 1\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

se réalisent.

Or soit $\nu_1^k, \nu_2^k, \ldots, \nu_{m_{j_{k+1}}-m_{j_k}}^k$ une permutation de $m_{j_k}+1, m_{j_k}+2, \ldots$ $\ldots, m_{j_{k+1}}$ telle que

$$\lambda_{\nu_1^k} \geqslant \lambda_{\nu_2^k} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\nu_{m_{j_{k+1}}-m_{j_k}}^k}$$

et soit toujours

$$s^*_{\nu_1^k \nu_l^k}(x) = \sum_{p=1}^{l} \varepsilon_{\nu_p^k} a'_{\nu_p^k} \cos \nu_p^k x \qquad (l = 1, 2, \ldots, m_{j_{k+1}} - m_{j_k}).$$

Quand nous avons

$$\sup_x |s_{m_{j_k} m_{j_{k+1}}}(x)| > M_k - 1$$

nous avons nécessairement aussi

$$\sup_{\substack{x, l \\ (1 \leqslant l \leqslant m_{j_{k+1}} - m_{j_k})}} |s^*_{\nu_1^k \nu_l^k}(x)| > M_k - 1,$$

car dans le cas contraire, la transformation d'Abel donnerait

$$\sup_x |s_{m_{j_k} m_{j_{k+1}}}(x)| \leqslant M_k - 1.$$

Nous voyons donc que la série

$$\sum_k \Big\{ \sum_{l=1}^{m_{j_{k+1}}-m_{j_k}} \varepsilon_{\nu_l^k} a'_{\nu_l^k} \cos \nu_l^k x \Big\}$$

a presque sûrement ses sommes partielles non uniformément bornées. Or cette série est une permutée de la série

$$\sum_k \Big\{ \sum_{n=m_{j_k}+1}^{m_{j_{k+1}}} \varepsilon_n a_n' \cos nx \Big\}$$

qui est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée (lemme 2). Nous avons donc une contradiction avec le théorème 2'. L'hypothèse (H'') est donc à rejeter.

Démonstration de la proposition A'. Supposons que P_1 soit presque sûre pour

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + \Psi_n)$$

et

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx + \Psi_n) \qquad (\Psi_n = 0 \text{ ou } \pi).$$

Si nous supposons que (2) n'est pas presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue, nous savons qu'il existe un couple (ε, η) de nombres positifs, et des blocs

$$U_k = U_{n_k m_k} = \sum_{n=n_k+1}^{m_k} a_n \cos(nx + \Psi_n), \quad n_k < m_k, \quad n_{k+1}/m_k \geqslant 2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

tels que

$$\operatorname{Prob}_{[\Psi]} \{\sup_x |U_k(x)| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \eta.$$

La série

$$(2''') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée (lemme 2). Dans chaque bloc U_k de (2'''), remplaçons x par $x - \Phi_k$, les Φ_k étant des variables aléatoires, indépendantes en bloc, indépendantes de Ψ_n, équi-réparties modulo 2π. Ecrivant $\cos(nx - n\Phi_k + \Psi_n) = (\cos n\Phi_k)\cos(nx + \Psi_n)$ $+ (\sin n\Phi_k)\sin(nx + \Psi_n)$ nous voyons, grâce au corollaire, que pour chaque suite (Φ_k) fixée, (2''') est presque sûrement (dans $[\Psi]$) la série de Fourier d'une fonction bornée. Donc (2''') est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée dans le champ $[\Phi] \times [\Psi]$.

Nous pouvons ainsi nous fixer une suite numérique (Ψ_n) telle que

a) Pour une infinité d'indice k_j $(j=1,2,\ldots;\ k_j<k_{j+1})$, nous avons des intervalles ouverts I_{k_j} tels que

$$\Big|\sum_{n=n_{k_j}+1}^{m_{k_j}} a_n\cos(nx+\Psi_n)\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\qquad \text{si}\qquad x\in I_{k_j}.$$

b) La série

$$\sum_k\Big\{\sum_{n=n_k+1}^{m_k} a_n\cos(nx-n\Phi_k+\Psi_n)\Big\}$$

est presque sûrement (dans $[\Phi]$) la série de Fourier d'une fonction bornée.

D'après le lemme 6, il est presque sûr (dans $[\Phi]$) qu'il existe un point x appartenant à une infinité $I_{k_{j_l}}$ des intervalles I_{k_j} translatés de Φ_{k_j}. Or, remplaçant Φ_k par $\Phi_k+\chi_k$ où χ_k ne prend que les valeurs 0 et π, nous voyons immédiatement que la série

$$\sum_k\Big\{\sum_{n=n_k+1}^{m_k} a_n\cos[n(x-\Phi_k-\chi_k)+\Psi_n]\Big\}$$

est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée (dans $[\Phi]\times[\chi]$). Donc nous pouvons nous fixer une suite numérique (φ_k) telle que

a') Un point x appartient à une infinité $I_{k_{j_l}}$ des intervalles I_{k_j} translatés de φ_{k_j}.

b') $\sum\limits_k\Big\{\sum\limits_{n=n_k+1}^{m_k} a_n\cos(nx-n\varphi_k-n\chi_k+\Psi_n)\Big\}$ est presque sûrement (dans $[\chi]$) la série de Fourier d'une fonction bornée.

Or, précisément, si nous faisons la restriction que (2) a tous ses coefficients d'indice pair nuls, nous avons une contradiction exactement comme dans la démonstration de la proposition A. De plus, la restriction faite se lève exactement comme dans la démonstration de la proposition A.

Démonstration de la proposition C. Si P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Psi_n)\qquad\text{et}\qquad\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(nx+\Psi_n)\qquad(\Psi_n=0\ \text{ou}\ \pi)$$

considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Phi_n+\Psi_n)$$

où les Φ_n sont définies comme dans la démonstration de la proposition A'.

Ecrivant $\cos(nx+\Phi_n+\Psi_n)=(\cos\Phi_n)\cos(nx+\Psi_n)-(\sin\Phi_n)\sin(nx+\Psi_n)$ nous voyons que pour chaque suite (Φ_n) fixée, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Phi_n+\Psi_n)$ vérifie presque sûrement P_1 (dans $[\Psi]$). Nous en déduisons alors la possibilité de nous fixer une suite numérique (Ψ_n) telle que P_1 soit presque sûre pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Phi_n+\Psi_n)$$

donc P_1 est presque sûre pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Phi_n).$$

Etudes des examples cités

a) En dehors des cas triviaux examinés, nous ne savons pas montrer que P_1 presque sûre pour $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm a_n\cos nx\Rightarrow P_1$ presque sûre pour $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm a_n\sin nx$.

b) Si P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Psi_n)\tag{4}$$

où les Ψ_n ne prennent que les valeurs $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ avec probabilité égale, changeant Ψ_n en $\Psi_n-\pi/2$ nous voyons que P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(nx+\Psi_n).\tag{5}$$

Dans (4), remplaçant Ψ_n par $\Psi_n+\chi_n$ où χ_n ne prend que les valeurs 0 et π avec probabilité égale, nous voyons que P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Psi_n+\chi_n).\tag{4'}$$

De même P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(nx+\Psi_n+\chi_n).\tag{5'}$$

Il s'agit ici du champ produit $[\Psi]\times[\chi]$. Ainsi, pour presque toute suite Ψ_n fixée, P_1 est presque sûre (dans $[\chi]$) pour (4') et (5') et par suite P_2. Donc P_2 est presque sûre dans $[\Psi]\times[\chi]$ pour (4') et (5') et par suite, nous pouvons nous fixer une suite numérique (x_n) telle que P_2 soit presque sûre (dans $[\Psi]$) pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\Psi_n+x_n)$$

et finalement, P_2 est presque sûre pour (4).

Egalement, quand nous nous fixons une suite numérique Ψ_n telle que P_1 soit presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\Psi_n+\chi_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx+\Psi_n+\chi_n)$$

en développant et séparant nous voyons que P_1 est presque sûre pour

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Psi_n \cos(nx+\chi_n), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Psi_n \sin(nx+\chi_n), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Psi_n \sin(nx+\chi_n), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Psi_n \cos(nx+\chi_n). \end{array}\right.$$

Donc P_1 est presque sûre pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Psi_n \cos(nx+\Phi_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Psi_n \sin(nx+\Phi_n),$$

donc pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\Phi_n+\Psi_n)$$

et finalement pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\Phi_n),$$

les Φ_n étant définies comme dans la démonstration de la proposition A′.

c) Il suffit de séparer partie réelle et imaginaire.

Enfin d) n'est qu'une retraduction de c).

Quelques généralisations aux séries de Fourier de deux variables

Considérons

(6) $$\sum_{n,m} a_{n,m} \cos(nx+my+\Phi_{n,m}),$$

(7) $$\sum_{n,m} \mp a_{n,m} \cos(nx+my).$$

La proposition A pour (6) se démontre exactement comme dans le cas de (1), par considération des blocs

$$U_{NM} = \sum_{N<n,m\leqslant M}$$

et par la généralisation immédiate du lemme 6 dans le sens suivant.

Si nous plaçons au hasard des rectangles I_n $(a_n < x < b_n,\ c_n < y < d_n)$ sur la tore à deux dimensions, (Φ_n, Ψ_n) étant les coordonnées de leurs centres, il est presque sûr (au sens de $[\Phi]\times[\Psi]$) qu'il existe un point appartenant à une infinité d'entre eux. Nous pouvons de même obtenir que P_2 presque sûre pour (7) entraîne que les sommes

$$S_N = \sum_{n,m\leqslant N}$$

sont presque sûrement uniformément convergentes.

Il suffit de prouver l'existence d'une suite d'indices N_j telle que les sommes S_{N_j} soient presque sûrement uniformément convergentes. Or il suffit pour cela de décomposer (7) en les deux séries

(7′) $$\sum_j U_{N_{2j}N_{2j+1}},$$

(7″) $$\sum_j U_{N_{2j-1}N_{2j}},$$

car, considérant par example pour (7′) l'expression

$$\sigma_{N_{2j+2}} - S_{N_{2j+1}}$$

($\sigma_{N_{2j+2}}$ étant la moyenne de Fejér de rang N_{2j+2}), sa valeur absolue se majore par une expression linéaire par rapport aux $|a_{n,m}|$ dont les coefficients ne dépendent que de N_{2j+1} et N_{2j+2}, et si N_{2j+1} est fixé, ces coefficients tendent vers 0 lorsque $N_{2j+2}\to\infty$. Il est donc possible de choisir une suite $\{N_j\}$ croissant assez vite pour que, uniformément en x et y

$$|\sigma_{N_{2j+2}} - S_{N_{2j+1}}| \leqslant \frac{1}{2^j}$$

(et avec un résultat analogue pour (7″)), et cela indépendamment du hasard. Nous voyons alors que la suite $\{N_j\}$ est une suite d'indices de convergence uniforme presque sûre de (7).

Travaux cités

[1] P. Billard, Comptes Rendus 252 (1961), p. 3714-3715.

[2] J.-P. Kahane, *Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires*, Studia Mathematica 19 (1960), p. 1-25.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric series*, tome I, 1959.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1962