ACTA ARITHMETICA
X(1964)

Über die Darstellbarkeit quadratfreier Zahlen als Summe einer Primzahl und des Quadrates einer quadratfreien Zahl

von

G. J. RIEGER (München)*

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit q quadratfreie Zahlen, mit p Primzahlen, mit μ die Moebiussche Funktion, mit $\nu(a,k)$ die Anzahl der Restklassen $n \pmod k$ mit $n^2 \equiv a \pmod k$, mit $A\{*: \ldots\}$ die Anzahl der $*$ mit den Eigenschaften ... und mit C bzw. $C(*)$ absolute positive bzw. nur von $*$ abhängige positive Konstante. Die Konstanten in $O(\ )$ bzw. $O_*(\ )$ is absolut bzw. hängt höchstens von $*$ ab.

Kürzlich hat Prachar (vgl. [2], S. 311) bewiesen, daß für quadratfreies q und noch geeignet zu wählendes D mit $1 \leqslant D \leqslant q+x^2$ gilt

$$A\{a:\ a \leqslant x,\ \mu(q+a^2) \neq 0\}$$
$$= \prod_p \left(1 - \frac{\nu(-q,p^2)}{p^2}\right) x + O_\varepsilon\left(D^{1+\varepsilon} + xD^{\varepsilon-1} + q^\varepsilon \frac{q+x^2}{D^2}\log x\right);$$

mit $D := (q+x^2)^{1/3}$ folgt

$$(1)\qquad A\{a:\ a \leqslant x,\ \mu(q+a^2) \neq 0\}$$
$$= \prod_p \left(1 - \frac{\nu(-q,p^2)}{p^2}\right) x + O_\varepsilon(q^{1/3+\varepsilon} + x^{2/3+\varepsilon}) \qquad (\mu(q) \neq 0).$$

Aus (1) folgt sofort, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $C_1(\delta)$ gibt derart, daß in

$$(2)\qquad \{q+a^2:\ a = 1, 2, \ldots, [C_1(\delta)q^{1/3+\delta}]\} \qquad (\mu(q) \neq 0)$$

mindestens eine quadratfreie Zahl vorkommt (vgl. [2], Satz 2). Wegen (1) gibt es auch noch Konstanten $C_2 \geqslant 1$ und C_3 mit

$$(3)\qquad A\{a:\ a \leqslant x,\ \mu(p+a^2) \neq 0,\ p \text{ prim}\} > C_3 x \qquad (x \geqslant C_2\sqrt{p}).$$

Wir leiten zunächst aus (3) eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Romanov (vgl. [1], Satz 103) ab:

---

* Mein Dank gilt der National Science Foundation und der Purdue Research Foundation für finanzielle Unterstützung (grant G-16305).

Satz 1. *Die Folge der quadratfreien Zahlen, die sich als Summe einer Primzahl und des Quadrates einer natürlichen Zahl schreiben lassen, hat positive Dichte.*

Beweis. Mit

$$f(n) := A\{p, a:\ p+a^2 = n\}$$

muß

$$(4) \qquad A\{n:\ n \leqslant x,\ f(n) > 0,\ \mu(n) \neq 0\} > C_5 x \qquad (x > C_4)$$

bewiesen werden. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$(5) \qquad \Big(\sum_{\substack{n \leqslant x \\ \mu(n) \neq 0}} f(n)\Big)^2 \leqslant A\{n:\ n \leqslant x,\ f(n) > 0,\ \mu(n) \neq 0\} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \mu(n) \neq 0}} f^2(n).$$

Einerseits ist (vgl. [1], S. 66)

$$(6) \qquad \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \mu(n) \neq 0}} f^2(n) \leqslant \sum_{n \leqslant x} f^2(n) = O\Big(\frac{x^2}{\log^2 x}\Big).$$

Anderseits ist

$$(7) \qquad \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \mu(n) \neq 0}} f(n) = A\{p, a:\ p+a^2 \leqslant x,\ \mu(p+a^2) \neq 0\}$$

$$\geqslant \sum_{p \leqslant x/2} A\{a:\ a \leqslant \sqrt{x/2},\ \mu(p+a^2) \neq 0\}$$

$$\geqslant \sum_{p \leqslant x/2C_2^2} A\{a:\ a \leqslant \sqrt{x/2},\ \mu(p+a^2) \neq 0\}$$

$$\geqslant \sum_{p \leqslant x/2C_2^2} C_3 \sqrt{x/2} \qquad \text{wegen (3)}$$

$$\geqslant C_7 x^{3/2}/\log x \qquad (x > C_6).$$

Aus (5), (6) und (7) folgt (4), was zu zeigen war.

Roth hat ohne Beweis folgenden Satz angegeben (vgl. [4], Satz 2): Es ist

$$(8) \qquad A\{m:\ m \leqslant y,\ m = l+a^2,\ \mu(m) \neq 0,\ \mu(a) \neq 0\}$$

$$= \frac{6\sqrt{y}}{\pi^2} \prod_{p^2 \mid l} \Big(1 - \frac{1}{p+1}\Big) \prod_{p \nmid l} \Big(1 - \frac{\nu(-l, p^2)}{p^2-1}\Big) + O_{l,\varepsilon}(y^{3/8+\varepsilon}).$$

Es ist nicht schwer, nach den Gedanken von Roth (1) einen Beweis für (8) zu geben und noch die Abhängigkeit des Restgliedes von l explizit zu bestimmen:

(1) Vgl. [4], Beweis von Satz 1.

Satz 2. *Es ist*

$$A\{z:\ z \leqslant w,\ \mu(z) \neq 0,\ \mu(l+z^2) \neq 0\}$$

$$= \frac{6w}{\pi^2} \prod_{p^2 \mid l} \Big(1 - \frac{1}{p+1}\Big) \prod_{p \nmid l} \Big(1 - \frac{\nu(-l, p^2)}{p^2-1}\Big) + O_\varepsilon(l^{1/3+\varepsilon} + w^{3/4+\varepsilon}).$$

Beweis. Es ist

$$(9) \qquad K(w, l) := A\{z:\ z \leqslant w,\ \mu(z) \neq 0,\ \mu(l+z^2) \neq 0\}$$

$$= \sum_{\substack{x, y, z \\ x^2 y - z^2 = l \\ z \leqslant w, \mu(z) \neq 0}} \mu(x).$$

Für ein später noch festzulegendes ξ_1 mit $0 < \xi_1 \leqslant \sqrt{l+w^2}$ sei

$$K_1(w, l) := \sum_{\substack{x, y, z \\ x^2 y - z^2 = l, x \leqslant \xi_1 \\ z \leqslant w, \mu(z) \neq 0}} \mu(x).$$

Nach einem Satz von Estermann-Oppenheim-Rademacher (vgl. [2], S. 311) ist die Anzahl der Lösungen x, z von $x^2 y - z^2 = l$, $z \leqslant w$ bei festem y höchstens $O_\varepsilon(l^\varepsilon \log w)$; aus $x > \xi_1$, $x^2 y - z^2 = l$, $z \leqslant w$ folgt $y < (l+w^2)\xi_1^{-2}$. Daher ist

$$(10) \qquad K(w, l) - K_1(w, l) = O_\varepsilon(l^\varepsilon (l+w^2)\xi_1^{-2} \log w).$$

Für

$$V_1(w, l;\ m) := \sum_{\substack{x, y, z \\ x^2 y - z^2 = l \\ z \leqslant w, \mu(z) \neq 0 \\ x \leqslant \xi_1, (x, l) = m}} \mu(x)$$

ist

$$(11) \qquad K_1(w, l) = \sum_{m \mid l} V_1(w, l;\ m) = \sum_{\substack{m^2 \mid l \\ \mu(m) \neq 0}} V_1(w, l;\ m) \ (^2).$$

Für $m^2 \mid l$ ist

$$V_1(w, l;\ m) = \mu(m) \sum_{\substack{s, t, y \\ s^2 y - t^2 = l m^{-2} \\ t \leqslant w/m, \mu(t) \neq 0, (t, m) = 1 \\ s \leqslant \xi_1/m, (s, l) = 1}} \mu(s) = \mu(m) \sum_{\substack{s \\ (s, l) = 1 \\ s \leqslant \xi_1/m}} \mu(s) \sum_{\substack{y, t \\ s^2 y - t^2 = l m^{-2} \\ t \leqslant w/m, \mu(t) \neq 0, (t, m) = 1}} 1$$

$$= \mu(m) \sum_{\substack{s \\ (s, l) = 1 \\ s \leqslant \xi_1/m}} \mu(s) N(w/m;\ s^2, -l/m^2;\ m)$$

(2) Das folgt leicht aus den Summationsbedingungen der Definition von $V_1(w, l;\ m)$.

mit

(13) $N(v; k, r; m) := A\{t : t \leqslant v, (t, m) = 1, \mu(t) \neq 0, t^2 \equiv r \pmod{k}\}$

$$= \begin{cases} O_\varepsilon(v k^{\varepsilon-1} + k^\varepsilon), \\ \dfrac{6v}{\pi^2 k} \nu(r, k) \prod\limits_{p|m} \left(1+\dfrac{1}{p}\right)^{-1} \prod\limits_{p|k} \left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)^{-1} + O_\varepsilon(m k^\varepsilon \sqrt{v}) \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ (k, mr) = 1 \end{matrix}\right)[3].$$

Für ein noch zu wählendes ξ_2 mit $0 < \xi_2 \leqslant \xi_1$ ist mit

$$(14) \qquad V_2(w, l; m) := \mu(m) \sum_{\substack{s \\ (s,l)=1 \\ s \leqslant \xi_2/m}} \mu(s) N(w/m; s^2, -l/m^2; m)$$

und

$$(15) \qquad K_2(w, l) := \sum_{\substack{m^2|l \\ \mu(m) \neq 0}} V_2(w, l; m)$$

ist wegen (12) und (13)

$$V_1(w, l; m) - V_2(w, l; m) = \frac{w}{m} \sum_{s > \xi_2/m} O_\varepsilon(s^{2\varepsilon-2}) + \sum_{s \leqslant \xi_1/m} O_\varepsilon(s^{2\varepsilon})$$
$$= O_\varepsilon(w \xi_2^{2\varepsilon-1} + \xi_1^{1+2\varepsilon})$$

und daher wegen (11) und (15)

$$(16) \qquad K_1(w, l) - K_2(w, l) = O_\varepsilon(l^\varepsilon w \xi_2^{2\varepsilon-1} + l^\varepsilon \xi_1^{1+2\varepsilon}).$$

Für $m^2|l$ und $(s, l) = 1$ ist $\nu(-l/m^2, s^2) = \nu(-l, s^2)$; aus (15), (14) und (13) folgt daher

(17) $K_2(w, l)$

$$= \frac{6w}{\pi^2} \sum_{m^2|l} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{p|m} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \sum_{\substack{(s,l)=1 \\ s \leqslant \xi_2/m}} \frac{\mu(s)}{s^2} \nu(-l, s^2) \prod_{p|s} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} +$$
$$+ O_\varepsilon(l^\varepsilon \xi_2^{1+2\varepsilon} \sqrt{w}).$$

Mit der sicherlich definierten Größe

(18) $K_3(w, l):$

$$= \frac{6w}{\pi^2} \sum_{m^2|l} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{p|m} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \sum_{(s,l)=1} \frac{\mu(s)}{s^2} \nu(-l, s^2) \prod_{p|s} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$
$$= \frac{6w}{\pi^2} \prod_{p^2|l} \left(1-\frac{1}{p+1}\right) \prod_{p \nmid l} \left(1-\frac{\nu(-l, p^2)}{p^2-1}\right)$$

[3] Vgl. [4], (2), (3) und (4).

gilt wegen (17)

$$(19) \qquad K_3(w, l) - K_2(w, l) = O_\varepsilon\Big(w \sum_{m^2|l} \frac{1}{m} \sum_{s > \xi_2/m} s^{2\varepsilon-2}\Big) + O_\varepsilon(l^\varepsilon \xi_2^{1+2\varepsilon} \sqrt{w})$$
$$= O_\varepsilon(w l^\varepsilon \xi_2^{2\varepsilon-1}) + O_\varepsilon(l^\varepsilon \xi_2^{1+2\varepsilon} \sqrt{w}).$$

Mit

$$\xi_1 := (l+w^2)^{1/3}, \qquad \xi_2 := w^{1/4}$$

folgt aus (19), (16) und (10)

$$(20) \qquad K(w, l) - K_3(w, l) = O_\varepsilon\big(l^\varepsilon (l+w^2)^{1/3+\varepsilon}\big) + O_\varepsilon(l^\varepsilon w^{3/4+\varepsilon})$$
$$= O_\varepsilon\big(l^\varepsilon (l^{1/3+\varepsilon} + w^{2/3+2\varepsilon}) + l^\varepsilon w^{3/4+\varepsilon}\big)$$
$$= O_\varepsilon(l^{1/3+2\varepsilon} + l^\varepsilon w^{3/4+2\varepsilon})$$
$$= O_\varepsilon(l^{1/3+2\varepsilon} + w^{3/4+5\varepsilon}),$$

wobei der letzte Übergang durch Fallunterscheidung $l^{1/3} \geqslant w^{3/4}$ und $l^{1/3} < w^{3/4}$ erfolgt. Aus (9), (20) und (18) folgt die Behauptung.

Satz 2 umfaßt (8). Für $w > C_8(\varepsilon) l^{1/3+\varepsilon}$ überwiegt in Satz 2 das Hauptglied, und daher gilt:

Satz 3. *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $C_9(\delta)$ derart, daß die Folge*

$$\{l+z^2 : z < C_9(\delta) l^{1/3+\delta}, \mu(z) \neq 0\}$$

mindestens eine quadratfreie Zahl enthält.

Satz 3 verschärft die im Zusammenhang mit (2) gemachte Aussage von Prachar. Mit Hilfe des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression und der Brunschen Siebmethode habe ich früher Satz 3 sogar mit „z prim" statt „$\mu(z) \neq 0$" bewiesen [4]. Eine unmittelbare Folge aus Satz 2 ist

Satz 4. *Es gibt Konstanten $C_{10} \geqslant 1$ und C_{11} derart, daß für $w \geqslant C_{11}\sqrt{p}$ gilt*

$$A\{z : z \leqslant w, \mu(p+z^2) \neq 0, \mu(z) \neq 0, p \text{ prim}\} > C_{11} w.$$

Ersetzen wir im Beweis von Satz 1 die Funktion $f(n)$ durch

$$F(n) := A\{p, a : p+a^2 = n, \mu(a) \neq 0\}$$

und benutzen wir statt (3) jetzt Satz 4, so folgt als Verschärfung des eingangszitierten Satzes von Romanov und des Satzes 1 direkt der

Hauptsatz. *Die Folge der quadratfreien Zahlen, die sich als Summe einer Primzahl und des Quadrates einer quadratfreien Zahl schreiben lassen, hat positive Dichte.*

[4] Vgl. [3], Satz 5; offensichtlich muß man noch $l \neq -1 \pmod 4$ voraussetzen.

Man sieht sofort, daß man die Primzahlen im Hauptsatz noch auf eine prime Restklasse mod k beschränken kann. Das Analogon zu (6) bleibt bestehen, während man im Analogon zu (7) unten einen Faktor $1/\varphi(k)$ erhält. Insgesamt haben wir

SATZ 5. *Die Dichte der Folge derjenigen quadratfreien Zahlen, die sich als Summe einer Primzahl aus einer festen primen Restklasse* mod k *und des Quadrates einer quadratfreien Zahl schreiben lassen, ist größer als* $C_{12}\left(\varphi(k)\right)^{-2}$.

Für ein noch festzulegendes ξ_1 mit $0 < \xi_1 \leqslant \sqrt{l+w^2}$ gilt nach den Definitionen von $K(w,l)$ und $K_1(w,l)$ im Beweis von Satz 2

$$\sum_{l\leqslant v}\left(K(w,l)-K_1(w,l)\right)^2 = \sum_{l\leqslant v} O\Big(\Big(\sum_{\substack{x,y,z\\ x^2y-z^2=l\\ z\leqslant w,\, x>\xi_1}} 1\Big)^2\Big) = O_\varepsilon(w^2 v\xi_1^{\varepsilon-1}) \text{ (}^5\text{)}. \tag{21}$$

Wegen

$$(K-K_3)^2 = O\left((K-K_1)^2+(K_1-K_2)^2+(K_2-K_3)^2\right)$$

folgt für ein noch festzulegendes ξ_2 mit $0 < \xi_2 \leqslant \xi_1$ aus (21), (16) und (19)

$$\sum_{l\leqslant v}\left(K(w,l)-K_3(w,l)\right)^2 = vO_\varepsilon(w^2\xi_1^{\varepsilon-1}+v^{2\varepsilon}w^2\xi_2^{4\varepsilon-2}+v^{2\varepsilon}\xi_1^{2+4\varepsilon}+v^{2\varepsilon}w\xi_2^{2+4\varepsilon}). \tag{22}$$

Aus (18) folgt

$$K_3(w,l) > \frac{6w}{\pi^2}\cdot\frac{\varphi(l)}{l}C_{13} > C_{14}(\varepsilon)wl^{-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0). \tag{23}$$

Mit

$$B(w,v) := A\{l:\ l\leqslant v,\ K(w,l)=0\}$$

folgt aus (23)

$$\left(C_{14}(\varepsilon)\right)^2 w^2 v^{-2\varepsilon} B(w,v) \leqslant \sum_{l\leqslant v}\left(K(w,l)-K_3(w,l)\right)^2. \tag{24}$$

Mit

$$\xi_1 := w^{1/4}, \qquad \xi_2 := w^{2/3}$$

ergibt sich aus (24) und (22) zunächst

$$B(v,w) = O_\varepsilon(v^{1+4\varepsilon}w^{3\varepsilon-1/2})$$

und daraus

SATZ 6. *Für jedes* $\eta > 0$ *und jedes* $\delta > 0$ *gibt es ein* $C_{15}(\delta)$ *derart, daß für mindestens* $(1-\eta)v$ *natürliche Zahlen* $l \leqslant v$ *die Folge*

$$\{l+z^2:\ z < C_{15}(\delta)v^\delta\eta^{-3},\ \mu(z)\neq 0\} \tag{25}$$

mindestens eine quadratfreie Zahl enthält.

(5) Vgl. [2], 314; in den dortigen Bezeichnungen heißt es $\lambda^2ND^{-1+\varepsilon}$.

Beschränkt man sich auf quadratfreie l und läßt man die Nebenbedingung $\mu(z)\neq 0$ weg, so kann man nach Prachar (vgl. [2], Satz 3) in (25) sogar $C_{15}(\delta)v^\delta$ durch C_{16} ersetzen.

Literaturverzeichnis

[1] E. Landau, *Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie*, Cambridge 1937.

[2] K. Prachar, *Sätze über quadratfreie Zahlen*, Monatshefte f. Math. 66 (1962), S. 306-312.

[3] G. J. Rieger, *Über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe einer quadratfreien Zahl und eines Primzahlquadrates*, Math. Ann. 152 (1963), S. 342-350.

[4] K. F. Roth, *A theorem involving squarefree numbers*, J. London Math. Soc. 22 (1947), S. 231-237.

Reçu par la Rédaction le 7. 12. 1962