Sous-structures et catégories ordonnées

par

Ch. Ehresmann (Paris)

Introduction. Dans [1], nous avons défini la notion de sous-structure d'une structure dans une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ lorsque $\mathcal{C}$ est munie d'une structure de catégorie inductive. Ici, nous allons généraliser cette notion, en définissant les $(\mathcal{C}', p)$-injections, où $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ est un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. En particulier, nous verrons que les résultats de [1a], § I, sont valables en remplaçant la catégorie inductive $(\mathcal{C}, <)$ par une catégorie ordonnée. Ensuite, nous définissons les catégories sous-préinductives et sous-inductives et étudions les propriétés du pseudo-produit.

Pour les définitions de catégories d'homomorphismes et d'espèces de structures, nous renvoyons à [1] et à [2]; pour la définition et les propriétés des catégories structurées, à [1a], § II.

Une structure de catégorie sur une classe $\mathcal{C}$ sera encore désignée par $\mathcal{C}^{\cdot}$ (ou simplement par $\mathcal{C}$). Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie. Le composé de deux éléments g et f de $\mathcal{C}$, s'il est défini, est désigné par $g \cdot f$. Les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ sont notées α et β. La classe des unités de $\mathcal{C}^{\cdot}$ (ou une classe d'objets) est représentée par le symbole $\mathcal{C}^{\cdot}_0$; le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}^{\cdot}$ est noté $\mathcal{C}_\gamma$.

1. Rappel sur les quatuors. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $\square\,\mathcal{C}$ la classe des quatuors de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire [1] des quadruplets (g', f', f, g), où $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$, $f' \in \mathcal{C}$ et $g' \in \mathcal{C}$, tels que les composés $f' \cdot g$ et $g' \cdot f$ soient définis et égaux.

Rappelons [1] que $\square\,\mathcal{C}$ est une catégorie double $(\boxbar\,\mathcal{C}, \boxminus\,\mathcal{C})$ pour les multiplications longitudinale et latérale suivantes:

$$(\bar{g}', \bar{f}', \bar{f}, \bar{g}) \boxbar (g', f', f, g) = (\bar{g}', \bar{f}' \cdot f', \bar{f} \cdot f, g) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{g} = g';$$

$$(\bar{g}', \bar{f}', \bar{f}, \bar{g}) \boxminus (g', f', f, g) = (\bar{g}' \cdot g', \bar{f}', f, \bar{g} \cdot g) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{f} = f'.$$

Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$; nous désignerons par $\square(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$ la sous-classe de $\square\,\mathcal{C}$ formée des quatuors (g', f', f, g) tels que $f \in \mathcal{C}'$ et $f' \in \mathcal{C}'$; c'est une sous-catégorie double $\big(\boxbar(\mathcal{C}; \mathcal{C}'), \boxminus(\mathcal{C}; \mathcal{C}')\big)$ de $(\boxbar\,\mathcal{C}, \boxminus\,\mathcal{C})$. Soit $\square(\mathcal{C}'; \mathcal{C})$ la classe des quatuors tels que $g \in \mathcal{C}'$, $g' \in \mathcal{C}'$.

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Alors $(\boxplus\mathcal{C}, \Box p, \boxplus\mathcal{H}, \boxplus(\mathcal{H}; \mathcal{S}_\gamma))$ et $(\boxminus\mathcal{C}, \Box p, \boxminus\mathcal{H}, \boxminus(\mathcal{S}_\gamma; \mathcal{H}))$ sont des catégories d'homomorphismes, où $\Box p$ désigne le foncteur (double)

$$(g', f', f, g) \to (p(g'), p(f'), p(f), p(g)).$$

Pour qu'un quadruplet G d'éléments de $\mathcal{H}$, (k', h', h, k), appartienne à $\Box\mathcal{H}$, il faut et il suffit que:

$$\alpha(h) = \alpha(k), \quad \beta(h) = \alpha(k'); \quad \alpha(h') = \beta(k), \quad \beta(h') = \beta(k')$$

et que l'on ait $(p(k'), p(h'), p(h), p(k)) \in \Box\mathcal{C}$. Par suite le quatuor G pourra aussi être écrit sous l'une des formes suivantes:

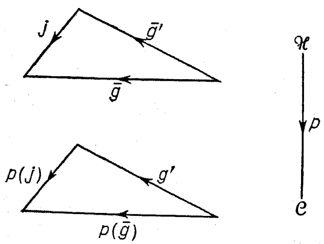
$$(k', \Box p(G), k) \quad \text{ou} \quad (k', p(h'), p(h), k).$$

2. $(\mathcal{C}', p)$-injections. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ deux catégories et $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ un foncteur. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 1. On appellera $(\mathcal{C}', p)$-*injection* un élément j de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) $p(j) \in \mathcal{C}'$.

(ii) Pour tout $\bar g \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(j)$ et $p(\bar g) = p(j)\cdot g'$, où $g' \in \mathcal{C}$, il existe $\bar g' \in \mathcal{H}$ tel que $\bar g = j \cdot \bar g'$ et $p(\bar g') = g'$.



Remarquons que l'élément $\bar g'$ dont la condition (ii) assure l'existence peut ne pas être unique.

EXEMPLES. 1. Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ est la catégorie des couples (s', s), où $s \in \mathcal{H}_0$ et $s' \in \mathcal{H}_0$, et si p est le foncteur $[\beta, \alpha]$, alors j est une $(\mathcal{C}, [\beta, \alpha])$-injection si, et seulement si, j admet un inverse à droite dans $\mathcal{H}$.

2. Si $\mathcal{C}'$ est la catégorie des monomorphismes stricts de $\mathcal{C}$ [3], les $(\mathcal{C}', p)$-injections sont les monomorphismes stricts de $\mathcal{H}$ dont l'image par p est un monomorphisme strict de $\mathcal{C}$, si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ est une catégorie d'homomorphismes.

PROPOSITION 1. *La classe $\mathcal{H}_{\precsim(\mathcal{C}', p)}$ (notée aussi $\mathcal{H}_{\precsim}$) des $(\mathcal{C}', p)$-injections est une sous-catégorie de la catégorie $p^{-1}(\mathcal{C}')$.*

Démonstration. Si $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$, on a évidemment $\alpha(j) \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $\beta(j) \in \mathcal{H}_{\precsim}$. Soient $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tels que $j'' = j' \cdot j$ soit défini. Alors $p(j'')$ appartient à $\mathcal{C}'$. Soit $\bar g \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(j'')$ et $p(\bar g) = p(j'')\cdot g''$. Comme $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $p(\bar g) = p(j')\cdot(p(j)\cdot g'')$, il existe $\bar g' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar g = j' \cdot \bar g' \quad \text{et} \quad p(\bar g') = p(j)\cdot g''.$$

Puisque $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$, il existe $\bar g'' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar g' = j \cdot \bar g'' \quad \text{et} \quad p(\bar g'') = g''.$$

Par suite:

$$\bar g = j' \cdot j \cdot \bar g'' = j'' \cdot \bar g'' \quad \text{et} \quad j' \in \mathcal{H}_{\precsim}.$$

Dans la fin de ce paragraphe, nous poserons:

$$\mathcal{U} = \boxplus(\mathcal{C}; \mathcal{C}') \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{U}} = \boxplus(\mathcal{H}; \mathcal{H}_{\precsim}).$$

DÉFINITION 2: On dira que $\bar h' \in \mathcal{H}$ est un $(\mathcal{C}', p)$-*sous-homomorphisme* de $\bar h \in \mathcal{H}$, et on écrira $\bar h' \precsim_{(\mathcal{C}', p)} \bar h$, ou $\bar h' \precsim \bar h$, s'il existe

$$(\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}}.$$

En particulier si $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$, on a:

$s \precsim S$ si, et seulement si, il existe $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tel que $\alpha(j) = s$, $\beta(j) = S$.

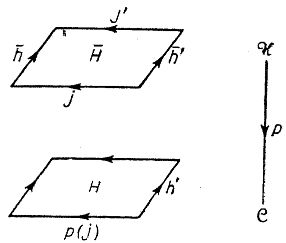
Si $\bar h' \precsim \bar h$, on a aussi $\alpha(\bar h') \precsim \alpha(\bar h)$ et $\beta(\bar h') \precsim \beta(\bar h)$.

PROPOSITION 2. *Soient $\bar h \in \mathcal{H}$, $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tels que:*

$$\alpha(\bar h) = \beta(j) \quad \textit{et} \quad \beta(\bar h) = \beta(j').$$

S'il existe $H = (p(\bar h), p(j'), p(j), h') \in \mathcal{U}$, alors il existe

$$\bar H = (\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}} \quad \textit{tel que} \quad \Box p(\bar H) = H.$$



En effet les conditions: $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et

$$p(\bar h \cdot j) = p(\bar h)\cdot p(j) = p(j')\cdot h'$$

assurent l'existence de $\bar h' \in \mathcal{H}$ tel que $p(\bar h') = h'$ et $j' \cdot \bar h' = \bar h \cdot j$.

PROPOSITION 3. *Soient $\bar h \in \mathcal{H}_\gamma$ et $\bar h' \in \mathcal{H}_\gamma$. S'il existe $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tel que $\alpha(j) = \alpha(\bar h')$, $\beta(j) = \alpha(\bar h)$ et $(p(\bar h), f', p(j), p(\bar h')) \in \mathcal{U}$, alors on a: $\bar h \cdot j \cdot \bar h'^{-1} \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $\bar h' \precsim_{(\mathcal{C}', p)} \bar h$.*

Démonstration. Posons $j' = \bar h \cdot j \cdot \bar h'^{-1}$. On a $p(j') = f' \in \mathcal{C}'$. Soit $\bar g \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(j')$ et $p(\bar g) = p(j')\cdot g'$. Comme

$$p(\bar h^{-1}\cdot \bar g) = p(\bar h)^{-1}\cdot p(j')\cdot g' = p(j)\cdot p((\bar h'^{-1})\cdot g')$$

et que $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$, il existe $\bar g_1' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar h^{-1}\cdot \bar g = j \cdot \bar g_1' \quad \text{et} \quad p(\bar g_1') = p(\bar h'^{-1})\cdot g'.$$

Posons $\bar g' = \bar h' \cdot \bar g_1'$. On trouve: $p(\bar g') = g'$ et:

$$\bar g = (\bar h \cdot j)\cdot \bar g_1' = (j' \cdot \bar h')\cdot(\bar h'^{-1}\cdot \bar g') = j' \cdot \bar g'.$$

Donc $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$; par suite $(\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}}$ et $\bar h' \precsim \bar h$.

Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons que $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes. Un élément h de $\mathcal{H}$ sera représenté par le triplet $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$.

Pour que $j \in \mathcal{H}$ soit une $(\mathcal{C}', p)$-injection, il faut et il suffit que

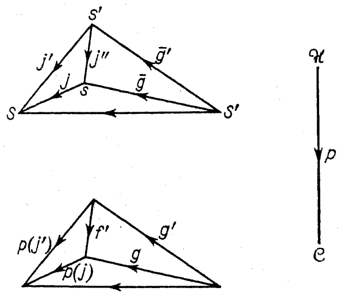
(i) $p(j) \in \mathcal{C}'$.

(ii) La condition:

$$\bar g = (\beta(j), p(j)\cdot g', S') \in \mathcal{H} \quad \text{entraîne:} \quad \bar g' = (\alpha(j), g', S') \in \mathcal{H}.$$

Remarque. Les conditions: $j \in \mathcal{H}_\precsim$ et $p(j) \in \mathcal{C}_\gamma$ entraînent $j \in \mathcal{H}_\gamma$. En effet, de la relation: $\beta(j) = (\beta(j), p(j)\cdot p(j)^{-1}, \beta(j)) \in \mathcal{H}$, il résulte: $j' = (\alpha(j), p(j)^{-1}, \beta(j)) \in \mathcal{H}$. Comme $j'\cdot j = \alpha(j)$ et $j \cdot j' = \beta(j)$, on en déduit $j' = j^{-1}$ et $j \in \mathcal{H}_\gamma$.

Proposition 4. *Soient j et j' deux $(\mathcal{C}', p)$-injections telles que $\beta(j) = \beta(j') = S$. S'il existe $f' \in \mathcal{C}'$ avec $p(j)\cdot f' = p(j')$, alors $j'' = (\alpha(j), f', \alpha(j'))$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection et $j \cdot j'' = j'$.*



Démonstration. Posons $s = \alpha(j)$ et $s' = \alpha(j')$. La relation:

$$j' = (S, p(j)\cdot f', s') \in \mathcal{H} \quad \text{entraîne} \quad j'' = (s, f', s') \in \mathcal{H}$$

puisque $j \in \mathcal{H}_\precsim$. Supposons $\bar g = (s, p(j'')\cdot g', S') \in \mathcal{H}$. On a:

$$j \cdot \bar g = (S, p(j)\cdot f' \cdot g', S') = (S, p(j')\cdot g', S') \in \mathcal{H}$$

et, comme $j' \in \mathcal{H}_\precsim$, on obtient:

$$(s', g', S') \in \mathcal{H}, \quad \text{donc} \quad j \in \mathcal{H}_\precsim .$$

Corollaire. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, les conditions:*

$$j \in \mathcal{H}_\precsim, \quad j' \in \mathcal{H}_\precsim, \quad \beta(j) = \beta(j') \quad \text{et} \quad p(j) = p(j')$$

entraînent: $j = j'$.

Démonstration. Ces conditions entraînent, d'après la proposition 4: $(s, p(s), s') \in \mathcal{H}_\precsim$ et, de la remarque précédant la proposition 4, on déduit $(s, p(s), s') \in \mathcal{H}_\gamma$, donc $s = (s, p(s), s') = s'$, puisque $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}_\gamma)$ est une espèce de structures.

Remarque. Si $\mathcal{C}'$ contient des éléments f tels que $\alpha(f) = \beta(f)$, il peut exister des $(\mathcal{C}', p)$-injections j telles que $\alpha(j) = \beta(j)$.

Proposition 5: *Les conditions:*

$$j \in \mathcal{H}_\precsim, \quad j' \in \mathcal{H}_\precsim, \quad \bar h = (\beta(j'), h, \beta(j)) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (h, p(j'), p(j), h') \in \mathcal{H}$$

entraînent: $\bar h' = (\alpha(j'), h', \alpha(j)) \in \mathcal{H}$ *et* $\bar h' \precsim \bar h$. *Si de plus on a* $\bar h \in \mathcal{H}_\gamma$ *et* $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, *alors* $\bar h' \in \mathcal{H}_\gamma$.

En effet, d'après la proposition 2, on a $\bar h' \in \mathcal{H}$. Si de plus $\bar h \in \mathcal{H}_\gamma$ et $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, on a aussi:

$$(h^{-1}, p(j), p(j'), h'^{-1}) \in \mathcal{H}, \quad \text{donc:} \quad \bar h_1' = (\alpha(j), h'^{-1}, \alpha(j')) \in \mathcal{H}.$$

Comme $\bar h_1' \cdot \bar h' = \alpha(j)$ et $\bar h' \cdot \bar h_1' = \alpha(j')$, on obtient $\bar h' \in \mathcal{H}_\gamma$.

Dans le théorème suivant, nous posons:

$$[\bar h] = (\bar h, \beta(\bar h), \alpha(\bar h), \bar h) \in (\boxplus\mathcal{H})_0, \quad \text{où} \quad \bar h \in \mathcal{H}.$$
$$[h] = (h, \beta(h), \alpha(h), h) \in (\boxplus\mathcal{C})_0, \quad \text{où} \quad h \in \mathcal{C}.$$

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes, où* $\bar h \in \mathcal{H}$ *et* $\bar h' \in \mathcal{H}$:

(i) $\bar h' \precsim_{(\mathcal{C}', p)} \bar h$.

(ii) *Il existe* $(\bar h, j', j, \bar h') \in (\boxplus\mathcal{H})_{\precsim(\mathcal{H}, \square p)}$ *tel que l'on ait*

$$(\beta(\bar h), j', j', \beta(\bar h')) \in (\boxplus\mathcal{H})_{\precsim(\mathcal{H}, \square p)} .$$

Démonstration. Soient $\bar h = (S_1, h, S)$ et $\bar h' = (s_1, h', s)$. Supposons $\bar h' \precsim \bar h$. Par définition, il existe $j \in \mathcal{H}_\precsim$ et $j' \in \mathcal{H}_\precsim$ tels que

$$J = (\bar h, j', j, \bar h') \in \square\mathcal{H} \quad \text{et} \quad \square p(J) \in \mathcal{H}.$$

Soit $\bar G = (\bar h, \square p(J)\cdot G', \bar k) \in \square\mathcal{H}$, où $G' = (h', g_1', g', p(\bar k)) \in \square\mathcal{C}$. Comme

$$\bar G = (\bar h, p(j')\cdot g_1', p(j)\cdot g', \bar k),$$

on a $(S, p(j)\cdot g', \alpha(\bar k)) \in \mathcal{H}$ et $(S_1, p(j')\cdot g_1', \beta(\bar k)) \in \mathcal{H}$. Les conditions: $j \in \mathcal{H}_\precsim$ et $j' \in \mathcal{H}_\precsim$ entraînent:

$$\bar g' = (s, g', \alpha(k)) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \bar g_1' = (s_1, g_1', \beta(\bar k)) \in \mathcal{H}.$$

Puisque $G' \in \square\mathcal{C}$, on en déduit:

$$\bar G' = (\bar h', \bar g_1', \bar g', \bar k) \in \square\mathcal{H}, \quad \text{d'où} \quad [\bar h'] \precsim [\bar h].$$

Inversement supposons $[\bar h'] \prec [\bar h]$; c'est-à-dire il existe une $(\mathcal{H}, \Box p)$-injection $J = (\bar h, j', j, \bar h')$. Alors $p(j) \in \mathcal{C}'$ et $p(j') \in \mathcal{C}'$. Supposons:

$$\bar g = \big(\alpha(\bar h), p(j)\cdot g', S'\big) \in \mathcal{H}.$$

Des relations:

$$\bar G = (\bar h, \bar h\cdot \bar g, \bar g, S') \in \Box\mathcal{H}$$

et

$$\Box p(\bar G) = \big(h, h\cdot p(j)\cdot g', p(j)\cdot g', p(S')\big) = \big(\Box p(J)\big) \boxplus \big(h', h'\cdot g', g', p(S')\big),$$

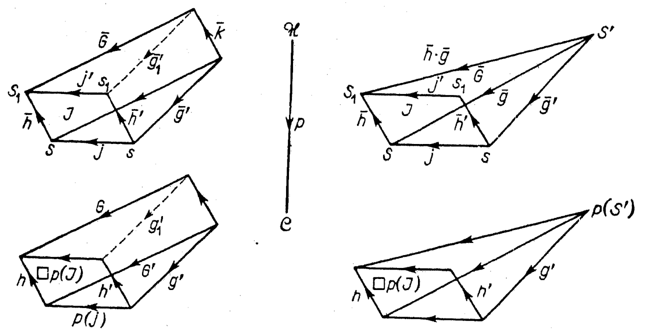
il résulte:

$$(\bar h', h'\cdot g', g', S') \in \Box\mathcal{H}.$$

Par suite:

$$(s, g', S') \in \mathcal{H} \quad\text{et}\quad j \in \mathcal{H}_\prec .$$

Si de plus $\big(\beta(\bar h), j', j', \beta(\bar h)\big) \in (\boxplus\mathcal{H})_{\prec(\mathcal{H},\Box p)}$, on a de même $j' \in \mathcal{H}_\prec$ et par conséquent $\bar h' \prec_{(\mathcal{C}', p)} \bar h$.



COROLLAIRE. *$s \prec_{(\mathcal{C}',p)} S$ est équivalent à $[s] \prec_{(\mathcal{H},\Box p)} [S]$, où $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$.*

3. Transitivité. Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}, \bar p, \bar{\mathcal{H}})$ deux foncteurs. Soient $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 6. *Si $\bar j \in \bar{\mathcal{H}}$ est une $(\mathcal{H}', \bar p)$-injection et si $\bar p(\bar j)$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection, alors $\bar j$ est une $(\mathcal{C}', p\bar p)$-injection.*

Démonstration. Soit $\bar g \in \bar{\mathcal{H}}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(\bar j)$ et $p\bar p(\bar g) = p\bar p(\bar j)\cdot g'$. Comme $\beta\big(\bar p(\bar g)\big) = \beta\big(\bar p(\bar j)\big)$ et $\bar p(\bar j) \in \mathcal{H}_{\prec(\mathcal{C}',p)}$, il existe $g_1' \in \mathcal{H}$ tel que $\bar p(\bar g) = \bar p(\bar j)\cdot g_1'$ et $p(g_1') = g'$. Puisque $\bar j$ est une $(\mathcal{H}', \bar p)$-injection, il existe $\bar g' \in \bar{\mathcal{H}}$ tel que:

$$\bar g = \bar j\cdot\bar g' \quad\text{et}\quad \bar p(\bar g) = g_1', \quad\text{d'où}\quad p\bar p(\bar g') = g'.$$

Donc $\bar j$ est une $(\mathcal{C}', p\bar p)$-injection.

PROPOSITION 7. *Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes et si $\bar j \in \bar{\mathcal{H}}$ est une $(\mathcal{C}', p\bar p)$-injection telle que $\bar p(\bar j) \in \mathcal{H}'$, alors $\bar j$ est une $(\mathcal{H}', \bar p)$-injection.*

Démonstration. Soit $\bar g \in \bar{\mathcal{H}}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(\bar j)$ et $\bar p(\bar g) = \bar p(\bar j)\cdot g'$. Puisque $p\bar p(\bar g) = p\bar p(\bar j)\cdot p(g')$ et $\bar j \in \mathcal{H}_{\prec(\mathcal{C}',p\bar p)}$, il existe $\bar g' \in \bar{\mathcal{H}}$ tel que:

$$\bar g = \bar j\cdot\bar g' \quad\text{et}\quad p\bar p(\bar g') = p(g').$$

Comme $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes, les relations:

$$p\big(\bar p(\bar g')\big) = p(g'), \quad \alpha(g') = \alpha\big(\bar p(\bar g')\big) \quad\text{et}\quad \beta(g') = \alpha\big(\bar p(\bar j)\big) = \beta\big(\bar p(\bar g')\big)$$

entraînent: $\bar p(\bar g') = g'$. Par suite $\bar j$ est une $(\mathcal{H}', \bar p)$-injection.

Remarquons que les conditions de la proposition 7 n'entraînent pas forcément que $\bar p(\bar j)$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection.

4. Catégories ordonnées. Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant, avec une classe, toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications (M', F, M), où $M \in \mathcal{M}_0$ et $M' \in \mathcal{M}_0$.

Soit $\tilde\Omega_0$ la classe de toutes les classes ordonnées $(M, <)$, où $M \in \mathcal{M}_0$, et soit $\tilde\Omega$ la catégorie de tous les homomorphismes entre classes ordonnées appartenant à $\tilde\Omega_0$. Soit Ω le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde\Omega$. Soit ω l'application:

$$\big((M', <), F, (M, <)\big) \to (M', F, M)$$

de $\tilde\Omega$ dans $\mathcal{M}$. On sait [1] que $(\mathcal{M}, \omega, \tilde\Omega, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis [1], résolvante à droite [1].

Soit $\tilde\Omega'$ la sous-catégorie de $\tilde\Omega$ formée des homomorphismes stricts, c'est-à-dire [1] des homomorphismes $\big((M', <), F, (M, <)\big)$ tels que: Si $F(x) = F(x')$ et $x' < x$, où $x \in M$ et $x' \in M$, alors on a $x = x'$.

Soit $\tilde\Omega_1'$ la sous-catégorie de $\tilde\Omega'$ formée des homomorphismes stricts $\big((M', <), F, (M, <)\big)$ tels que, pour tout $x \in M$, la restriction de F à la classe des éléments $x' < x$ soit une application biunivoque.

Rappelons qu'une catégorie $\tilde\Omega(\tilde\Omega', \tilde\Omega)$-structurée est appelée [1] une *catégorie ordonnée*. En remplaçant $\tilde\Omega'$ par $\tilde\Omega_1'$, nous poserons:

DÉFINITION 3. Une catégorie $\tilde\Omega(\tilde\Omega_1', \tilde\Omega)$-structurée sera appelée *catégorie s-ordonnée.*

Pour que $(\mathcal{C}, <)$ soit une catégorie ordonnée (resp. s-ordonnée), il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes $(O_1), (O_2), (O_3)$ et (O_0) (resp. $(O_1), (O_2), (O_3')$ et (O_0) [1]:)

(O_0) *$\mathcal{C}^\cdot$ est une catégorie et $(\mathcal{C}, <) \in \tilde\Omega_0$.*

(O_1) *$f' < f$ entraîne $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.*

(O_2) *Si* $f_2' \cdot f_1'$ *et* $f_2 \cdot f_1$ *sont définis et si* $f_1' < f_1$ *et* $f_2' < f_2$, *alors*:

$$f_2' \cdot f_1' < f_2 \cdot f_1 .$$

(O_3) *Si on a*: $f' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f)$ *et* $\beta(f') = \beta(f)$, *alors* $f' = f$.

(O_3') *Si on a*: $f' < f$, $f'' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f'')$ *et* $\beta(f') = \beta(f'')$, *alors* $f' = f''$.

THÉORÈME 2. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée. La classe des* $j \in \mathcal{C}$ *tels que* $\alpha(j) < j < \beta(j)$ *est une sous-catégorie* $\mathcal{C}_{\prec}$ *de* $\mathcal{C}$ *qui définit un ordre sur* $\mathcal{C}_0$. *Si* $j \in \mathcal{C}_{\prec}$, *nous écrirons*: $j = \beta(j) \succ \alpha(j)$. *On a*: $\big(h, \beta(h) \succ \beta(h'), \alpha(h) \succ \alpha(h'), h'\big) \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$ *si, et seulement si*, $h' < h$, $\alpha(h) \succ \alpha(h') \in \mathcal{C}_{\prec}$ *et* $\beta(h) \succ \beta(h') \in \mathcal{C}_{\prec}$.

Démonstration. Soient j et j' deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que:

$$\alpha(j) < j < \beta(j) \quad \text{et} \quad \alpha(j') < j' < \beta(j') .$$

Si $\alpha(j) = \alpha(j') = e$ et $\beta(j) = \beta(j') = E$, on a, d'après (O_2):

$$j' = j' \cdot e < E \cdot j = j \quad \text{et} \quad j = j \cdot e < E \cdot j' = j' .$$

d'où $j = j'$. Nous poserons: $j = E \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$. Pour tout $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, on a $e \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$. Les conditions:

$$(E \succ e) \in \mathcal{C}_{\prec} \quad \text{et} \quad (e \succ e') \in \mathcal{C}_{\prec}$$

entraînent, en vertu de (O_2):

$$e' = e' \cdot e' < e \cdot (e \succ e') < (E \succ e) \cdot (e \succ e') < E \cdot E = E .$$

Par suite on trouve:

$$(E \succ e) \cdot (e \succ e') = (E \succ e') \in \mathcal{C}_{\prec} .$$

Soit $k = (h, e_1 \succ e_1', e \succ e', h') \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$. En utilisant (O_2), on a:

$$h' = e_1' \cdot h' < (e_1 \succ e_1') \cdot h' = h \cdot (e \succ e') < h \cdot e = h .$$

Inversement les conditions:

$$h' < h, \quad j = \alpha(h) \succ \alpha(h') \quad \text{et} \quad j' = \beta(h) \succ \beta(h')$$

entraînent, d'après (O_2):

$$j' \cdot h' < \beta(h) \cdot h \quad \text{et} \quad j' \cdot h' = (j' \cdot h') \alpha(h') < h \cdot j .$$

Il résulte alors de (O_3) que $j' \cdot h' = h \cdot j$, c'est-à-dire: $(h, j', j, h') \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$.

COROLLAIRE 1. *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est* s*-ordonnée*, $\mathcal{H} = \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$ *vérifie l'axiome*:

(u) *Si* $k = (h, e_1 \succ e_1', e \succ e', h') \in \mathcal{H}$ *et* $k' = (h, e_1 \succ e_1', e \succ e', h'') \in \mathcal{H}$, *on a*: $h' = h''$, *et par suite* $k = k'$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée. Si* $\boxbar\mathcal{C}$ *est munie de sa structure de catégorie ordonnée* [1], *pour l'ordre induit par la classe ordonnée produit* $(\mathcal{C}^4, <)$, *on a*: $\boxbar(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec}) = \boxbar(\mathcal{C})_{\prec}$.

DÉFINITION 4. Nous dirons qu'une catégorie ordonnée $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est *complètement régulière à droite* si, pour tout couple (E, e), où $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $E \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < E$, il existe $E \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ qui définit un ordre sur $\mathcal{C}_0$. Désignons par $<$ la relation sur $\mathcal{C}$ définie par: $f' < f$ si, et seulement si, il existe $(f', j', j, f) \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$.

PROPOSITION 8. *Avec les notations précédentes*, $(\mathcal{C}, <)$ *est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite: pour que* $(\mathcal{C}, <)$ *soit* s*-ordonnée, il faut et il suffit que* $\mathcal{H} = \boxbar(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$ *vérifie l'axiome* (u).

DÉFINITION 5. Nous dirons que $(\mathcal{H}^{\cdot}, <)$ est *une catégorie ordonnées au-dessus de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *relativement à* p si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $(\mathcal{H}^{\cdot}, <)$ *et* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *sont des catégories ordonnées.*

(ii) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ *est une catégorie d'homomorphismes, où* $\mathcal{H}_\gamma$ *est le groupoïde des éléments inversibles de* $\mathcal{H}$.

(iii) *On a*: $\big((\mathcal{C}, <), p, (\mathcal{H}, <)\big) \in \widetilde{\Omega}'$.

5. Catégorie d'homomorphismes au-dessus d'une catégorie ordonnée. Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Supposons que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie ordonnée et soit $\mathcal{C}_{\prec}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ construite ci-dessus. Nous poserons: $\mathcal{U} = \boxbar(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$.

Soit j une $(\mathcal{C}_{\prec}, p)$-injection, $s = \alpha(j)$ et $S = \beta(j)$. On a:

$$p(j) = \big(p(S) \succ p(s)\big) \in \mathcal{C}_{\prec} .$$

Par suite j est entièrement déterminé par la donnée du couple (S, s). Nous poserons: $j = S \succ_p s$. En particulier si $s = S$, alors $S \succ_p s = s$.

DÉFINITION 6. Avec les notations précédentes, nous dirons que $S \succ_p s$ est *une* p*-injection*, ou que s est *une sous-structure de* S *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Nous écrirons aussi dans ce cas: $s \precsim S$. Si $\bar{h}'$ est un $(\mathcal{C}_{\prec}, p)$-sous-homomorphisme de $\bar{h}$, nous dirons aussi que $\bar{h}'$ est *un sous-homomorphisme de* $\bar{h}$ et nous poserons: $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, ou $\bar{h}' \precsim \bar{h}$.

EXEMPLE. Dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, on a: $e \precsim E$ si, et seulement si, il existe $E \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$. Ainsi les catégories $\mathcal{C}_{\prec}$ et $\mathcal{C}_{\prec(\mathcal{C}_{\prec}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})}$ sont identiques. On a: $f' \precsim f$ si, et seulement si,

$$\alpha(f') \precsim \alpha(f), \quad \beta(f') \precsim \beta(f) \quad \text{et} \quad f' < f .$$

Les relations $f' < f$ et $f' \precsim f$ sont donc les mêmes si, et seulement si, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est complètement régulière à droite.

PROPOSITION 9. *La condition*: $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$ *entraîne* $p(\bar{h}') \precsim p(\bar{h})$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. *Les conditions*:

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h}, \quad \bar{h}'' \precsim_p \bar{h} \quad \text{et} \quad p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}') \quad \textit{dans} \quad (\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

entraînent:

$$\bar{h}'' \precsim_p \bar{h}' .$$

Démonstration. Soient $\bar{h} = (S_1, h, S) \in \mathcal{H}$ et $\bar{h}' = (s_1', h', s') \in \mathcal{H}$ tels que $\bar{h}' \precsim \bar{h}$. Comme on a:

$$\Box p(\bar{h}, S_1 \succcurlyeq s_1', S \succcurlyeq s', \bar{h}') \in \mathcal{H},$$

on obtient $p(\bar{h}') \precsim p(\bar{h})$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. Soit $\bar{h}'' = (s_1'', h'', s'') \in \mathcal{H}$ tel que: $\bar{h}'' \precsim \bar{h}$ et $p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}')$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. Les relations: $p(S \succcurlyeq s') \in \mathcal{C}_{\prec}$, $p(S \succcurlyeq s'') \in \mathcal{C}_{\prec}$ et $p(s') \succcurlyeq p(s'') \in \mathcal{C}_{\prec}$ entraînent:

$$p(S \succcurlyeq s') \cdot \big(p(s') \succcurlyeq p(s'')\big) = p(S \succcurlyeq s''),$$

car $\mathcal{C}_{\prec}$ est une catégorie définissant un ordre sur la classe de ses unités. En utilisant la proposition 4, on en déduit:

$$s'' \precsim s' \quad \text{et, de même} \quad s_1'' \precsim s_1'.$$

Enfin, puisque $p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}')$, on a:

$$\Box p(\bar{h}', s_1' \succcurlyeq s_1'', s' \succcurlyeq s'', \bar{h}'') \in \mathcal{H};$$

par suite $(\bar{h}', s_1' \succcurlyeq s_1'', s' \succcurlyeq s'', \bar{h}'') \in \Box\mathcal{H}$ et $\bar{h}'' \precsim \bar{h}'$.

Corollaire. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, les conditions:*

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h}, \quad \bar{h}'' \precsim_p \bar{h} \quad \text{et} \quad p(\bar{h}') = p(\bar{h}'')$$

entraînent:

$$\bar{h}' = \bar{h}''.$$

En effet, ces conditions entraînent:

$$j' = \alpha(\bar{h}) \succcurlyeq \alpha(\bar{h}') \in \mathcal{H}_{\prec}, \quad j'' = \alpha(\bar{h}) \succcurlyeq \alpha(\bar{h}'') \in \mathcal{H}_{\prec} \quad \text{et} \quad p(j') = p(j'').$$

Donc $j' = j''$, en vertu du corollaire de la proposition 4, c'est-à-dire $\alpha(\bar{h}') = \alpha(\bar{h}'')$. De même, $\beta(\bar{h}') = \beta(\bar{h}'')$. Par suite $\bar{h}' = \bar{h}''$.

Théorème 3. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, $(\mathcal{H}, \precsim_p)$ est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite, au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ relativement à p; de plus on a:*

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h} \ \textit{si, et seulement si,} \ \alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}), \beta(\bar{h}') \precsim_p \beta(\bar{h}) \ \textit{et} \ p(\bar{h}') < p(\bar{h}).$$

Démonstration. Supposons $s \precsim S$ et $S \precsim s$, où $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$. On a:

$$p(S) \succcurlyeq p(s) \in \mathcal{C}_{\prec} \quad \text{et} \quad p(s) \succcurlyeq p(S) \in \mathcal{C}_{\prec},$$

d'où $p(s) = p(S)$ et, d'après le corollaire de la proposition 9, $s = S$. Il en résulte que la relation: $s \precsim S$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$ et, d'après la proposition 8, $(\mathcal{H}, \precsim_p)$ est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite. Le corollaire de la proposition 9 signifie:

$$\big((\mathcal{C}, <), p, (\mathcal{H}, \precsim_p)\big) \in \tilde{\Omega}_1'.$$

Enfin, pour que l'on ait $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}), \quad \beta(\bar{h}') \precsim_p \beta(\bar{h}),$$

et

$$\Box p(\bar{h}, \alpha(\bar{h}) \succcurlyeq \alpha(\bar{h}'), \beta(\bar{h}) \succcurlyeq \beta(\bar{h}'), \bar{h}') \in \mathcal{H}.$$

On déduit du théorème 2 que ces conditions sont équivalentes à:

$$\alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}), \quad \beta(\bar{h}') \precsim_p \beta(\bar{h}) \quad \text{et} \quad p(\bar{h}') < p(\bar{h}).$$

Corollaire. *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie s-ordonnée et si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, alors $(\mathcal{H}, \precsim_p)$ est une catégorie s-ordonnée.*

Les propositions 3 et 5 et le théorème 1 s'énoncent maintenant:

Proposition 3′. *Les conditions:*

$$\bar{h} \in \mathcal{H}_\gamma, \quad \bar{h}' \in \mathcal{H}_\gamma, \quad \alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}) \quad \textit{et} \quad p(\bar{h}') < p(\bar{h})$$

entraînent

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h},$$

Proposition 5′. *Soient $\bar{h} = (S_1, h, S) \in \mathcal{H}$, $s \precsim S$ et $s_1 \precsim S_1$. S'il existe $h' < h$ tel que $\alpha(h') = p(s)$ et $\beta(h') = p(s_1)$, on a: $\bar{h}' = (s_1, h', s) \in \mathcal{H}$. Si de plus $\bar{h} \in \mathcal{H}_\gamma$ et $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, alors $\bar{h}' \in \mathcal{H}_\gamma$.*

Théorème 1′. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\bar{h}' \precsim \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.*

(ii) *$[\bar{h}'] \precsim [\bar{h}]$ et $[\beta(\bar{h}')] \precsim [\beta(\bar{h})]$ dans $\big(\boxplus\mathcal{C}, \Box p, \boxplus\mathcal{H}, \boxplus(\mathcal{H}; \mathcal{S}_\gamma)\big)$, la catégorie $\boxplus\mathcal{C}$ étant munie de sa structure de catégorie ordonnée.*

Soit de plus $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ une catégorie d'homomorphismes. Nous supposons $\mathcal{H}$ muni de sa structure de catégorie ordonnée $(\mathcal{H}, \precsim)$. Des propositions 6 et 7, il résulte:

Corollaire. *Soient $\bar{s} \in \overline{\mathcal{H}}_0$ et $\bar{S} \in \overline{\mathcal{H}}_0$. On a $\bar{s} \precsim_{\bar{p}} \bar{S}$ si, et seulement si, $\bar{s} \precsim_{p\bar{p}} \bar{S}$ et $\bar{p}(\bar{s}) \precsim_p \bar{p}(\bar{S})$.*

6. Catégories sous-préinductives et sous-inductives. Soit $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ la catégorie d'homomorphismes construite au n° 3.

Soit $\mathcal{J}_0^{ps}$ la sous-classe de $\tilde{\Omega}_0$ formée des classes *sous-préinductives*, c'est-à-dire [2] des classes ordonnées $(A, <) \in \tilde{\Omega}_0$ dans lesquelles est vérifié l'axiome:

Soient $x \in A$, $x' \in A$ et $x'' \in A$ tels que $x' < x$ et $x'' < x$. Alors les éléments x' et x'' admettent une borne inférieure $x' \cap x''$, appelée leur *intersection*.

Soit $\mathcal{J}^{ps}$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des applications *sous-inductives* entre classes sous-préinductives, dont les éléments sont donc [2] les triplets $\big((A', <), F, (A, <)\big)$ tels que

$$(A, <) \in \mathcal{J}_0^{ps}, \quad (A', <) \in \mathcal{J}_0^{ps} \quad \text{et } F \text{ vérifie l'axiome:}$$

Soient $x \in A$, $x' \in A$, $x'' \in A$ tels que $x' < x$ et $x'' < x$. Alors on a:

$$F(x' \cap x'') = F(x') \cap F(x'') .$$

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}^{ps}, \mathcal{J}^{ps} \cap \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite [1]. $\mathcal{M}$ étant munie de sa structure usuelle de catégorie ordonnée (et même inductive), une sous-structure de $(A, <)$ dans cette catégorie d'homomorphismes est une sous-classe sous-pré-inductive de A, c'est-à-dire une sous-classe A' de A, munie de l'ordre induit par $<$, et telle que les conditions:

$$x' \in A', \quad x'' \in A', \quad x \in A', \quad x' < x \quad \text{et} \quad x'' < x$$

entraînent:

$$x' \cap x'' \in A' .$$

Nous poserons: $\mathcal{J}'^{ps} = \mathcal{J}^{ps} \cap \widetilde{\Omega}'$; on a aussi $\mathcal{J}'^{ps} = \mathcal{J}^{ps} \cap \widetilde{\Omega}'_1$; en effet, si $((A', <), F, (A, <)) \in \mathcal{J}'^{ps}$ et si on a: $x' < x$, $x'' < x$ et $F(x') = F(x'')$, alors $F(x' \cap x'') = F(x') = F(x'')$, d'où $x' \cap x'' = x' = x''$ [2].

DÉFINITION 7. Une catégorie $\mathcal{J}^{ps}(\mathcal{J}'^{ps}, \mathcal{J}^{ps})$-structurée sera appelée *catégorie sous-préinductive*.

Une catégorie sous-préinductive est aussi s-ordonnée.

THÉORÈME 4. *Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie sous-préinductive, il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes suivants:*

(1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ *est une catégorie, $(\mathcal{C}, <)$ est une classe sous-préinductive et les axiomes (O_2) et (O_3) sont vérifiés.*

(I^{ps}) *Les conditions: $f' < f$ et $f'' < f$ entraînent:*

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'') .$$

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e'' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ tels que $e' < e$ et $e'' < e$. En vertu de (I^{ps}), on a:

$$\alpha(e' \cap e'') = \alpha(e') \cap \alpha(e'') = e' \cap e'' \in \mathcal{C}_0^{\cdot} .$$

Donc $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ est une sous-classe sous-préinductive de $(\mathcal{C}, <)$. Soit $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ la classe des couples (g, f) composables. Les conditions:

$$(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, \quad (g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, \quad (g'', f'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot},$$
$$(g', f') < (g, f) \quad \text{et} \quad (g'', f'') < (g, f)$$

dans la classe sous-préinductive produit $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$ entraînent:

$$g' < g, \quad g'' < g, \quad f' < f \quad \text{et} \quad f'' < f .$$

Par suite de (I^{ps}), il en résulte:

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f''); \quad \beta(g' \cap g'') = \beta(g') \cap \beta(g'');$$
$$\alpha(g' \cap g'') = \alpha(g') \cap \alpha(g'') = \beta(f') \cap \beta(f'') = \beta(f' \cap f''),$$

d'où $(g' \cap g'', f' \cap f'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$. Ainsi $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-classe sous-préinductive de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$. En vertu de (O_2), on a:

$$k = (g' \cap g'') \cdot (f' \cap f'') < g' \cdot f' \cap g'' \cdot f'' = k' ;$$
$$g' \cdot f' < g \cdot f \quad \text{et} \quad g'' \cdot f'' < g \cdot f ,$$

d'où

$$\alpha(k') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(k') = \beta(g') \cap \beta(g'') .$$

Puisque $\alpha(k) = \alpha(k')$ et $\beta(k) = \beta(k')$, on trouve $k = k'$, on utilisant l'axiome (O_3). Ceci prouve que l'application:

$$\varkappa\colon (g, f) \to g \cdot f$$

est une application sous-inductive de $(\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, <)$ dans $(\mathcal{C}, <)$. Par conséquent, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-préinductive.

PROPOSITION 10. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive; soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$. Si e et e' admettent une intersection $e \cap e'$ dans $\mathcal{C}$, alors on a $e \cap e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$.*

Démonstration. Posons $h = e \cap e'$. On a $\alpha(h) < e \cap e' = h$ et $\beta(h) < h$. Les conditions:

$$u \in \mathcal{C}_0^{\cdot}, \quad u < e \quad \text{et} \quad u < e'$$

entraînent:

$$u < \alpha(h) \quad \text{et} \quad u < \beta(h) .$$

Par suite e et e' admettent $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ pour intersection dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$; il en résulte: $\alpha(h) = \beta(h)$ et, en utilisant l'axiome (O_3):

$$h = \alpha(h) \in \mathcal{C}_0 .$$

DÉFINITION 8. Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. Soit $\langle g, f \rangle$ la classe des couples (g', f') tels que $g' < g$, $f' < f$, et que $g' \cdot f'$ soit défini. Si la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$ des composés $g' \cdot f'$, où $(g', f') \in \langle g, f \rangle$, admet un plus grand élément, nous le noterons gf et l'appellerons *pseudo-produit de g et f*.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Le pseudo-produit a les propriétés suivantes:

(i) Soient $g_1 < g$ et $f_1 < f$. Si $g_1 f_1$ et gf sont définis, on a $g_1 f_1 < gf$.

(ii) Si gf est défini, on a $\alpha(gf) < \alpha(f)$ et $\beta(gf) < \beta(g)$.

(iii) Soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $E \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < E$. Si Ee (resp. eE) est défini, on a:

$$\alpha(Ee) = e \quad (\text{resp. } \beta(eE) = e) .$$

PROPOSITION 11. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. Si la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$ est majorée dans $\mathcal{C}$ et s'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$ tel que $\beta(g') = \beta(g)$ et $\alpha(f') = \alpha(f)$, alors $g' \cdot f' = gf$.*

Démonstration. Soit $(g'', f'') \in \langle g, f \rangle$. Comme $g' \cdot f'$ et $g'' \cdot f''$ sont majorés dans $\mathcal{C}$, l'intersection:

$$k = g' \cdot f' \frown g'' \cdot f''$$

est définie et, en vertu de l'axiome (I^{ps}), on a:

$$\alpha(k) = \alpha(f') \frown \alpha(f'') = \alpha(f'') < \alpha(f)$$

et

$$\beta(k) = \beta(g') \frown \beta(g'') = \beta(g'') < \beta(g) .$$

Par suite

$$g'' \cdot f'' = k < g' \cdot f' ,$$

d'où $g' \cdot f' = gf$.

COROLLAIRE 1. *Soit $f \in \mathcal{C}$; si $e \lesssim \alpha(f)$ (dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$), alors fe est défini et on a $\alpha(fe) = e$ et $\beta(fe) = \beta(f)$. Si $f' \lesssim f$ on a:*

$$f' = \beta(f')\big(f\alpha(f')\big) .$$

Démonstration. La classe $\varkappa(\langle f, e \rangle)$ est majorée par f et $\langle f, e \rangle$ contient $\big(f, \alpha(f) \gtrsim e\big)$. Donc $f \cdot \big(\alpha(f) \gtrsim e\big) = fe$. Supposons $f' \lesssim f$; alors on a

$$f\alpha(f') = f \cdot \big(\alpha(f) \gtrsim \alpha(f')\big) .$$

Comme la classe $\varkappa\big(\langle \beta(f'), f\alpha(f') \rangle\big)$ est majorée par f et que $\langle \beta(f'), f\alpha(f') \rangle$ contient $\big(\beta(f'), f'\big)$, on trouve: $f' = \beta(f')\big(f\alpha(f')\big)$.

COROLLAIRE 2. *Soient $e \in \mathcal{C}_0$ et $E \in \mathcal{C}_0$. On a: $e \lesssim E$ si, et seulement si, $e < E$, Ee est défini et $\beta(Ee) = E$. La relation $e \lesssim E$ entraîne $Ee = E \gtrsim e$.*

En effet, si $e < E$, si Ee est défini et si $\beta(Ee) = E$, on a: $Ee = E \gtrsim e$ puisque $e = \alpha(Ee)$. Inversement si $E \gtrsim e \in \mathcal{C}_{\lesssim}$, on a $E \gtrsim e = Ee$ en vertu du corollaire 1.

COROLLAIRE 3. *Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes, la condition $s \lesssim_p S$ entraîne: $p(S \gtrsim_p s) = p(S)p'(s)$; la condition $h' \lesssim_p h$ entraîne: $p(h') = p\big(\beta(h')\big)p(h)p\big(\alpha(h')\big)$.*

Soit $\mathcal{J}_0^s$ la sous-classe de $\mathcal{J}_0^{ps}$ formée des classes sous-inductives, c'est-à-dire [2] des classes ordonnées $(A, <) \in \widetilde{\Omega}_0$ dans lesquelles est vérifié l'axiome suivant:

Toute sous-classe A' de A majorée dans $(A, <)$ admet une borne inférieure $\bigcap A'$, appelée son *intersection*.

Si $(A, <)$ est une classe sous-inductive et si A' est une sous-classe de A majorée par $x \in A$, la classe des majorants x' de A' tels que $x' < x$ admet un plus grand élément, appelé sous -agrégat[2] de A' et noté $\overset{x}{\bigcup} A'$.

Soit $\mathcal{J}^s$ la sous-catégorie de $\mathcal{J}^{ps}$ formée des applications inductives entre classes sous-inductives, dont les éléments sont [2] les triplets $\big((B, <), F, (A, <)\big) \in \mathcal{J}^{ps}$ tels que:

$(A, <) \in \mathcal{J}_0^s$, $\quad (B, <) \in \mathcal{J}_0^s$ $\quad$ et que F vérifie l'axiome:

Les conditions: $A' \subset A$ et A' majoré par x dans $(A, <)$ entraînent:

$$F(\overset{x}{\bigcup} A') = \overset{y}{\bigcup} F(A'), \quad \text{où} \quad y = F(x) .$$

$\mathcal{J}^s$ contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{J}$ (voir [1a]) des applications inductives entre classes inductives. Pour que $(A, <)$ appartienne à $\mathcal{J}_0$, il faut et il suffit que $(A, <) \in \mathcal{J}^{ps}$ et que, pour toute sous-classe A' de A majorée dans $(A, <)$, tous les sous-agrégats de A' soient égaux; le sous-agrégat unique de A' est noté $\bigcup A'$ et appelé agrégat de A'.

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}^s, \mathcal{J}^s \frown \Omega)$ et $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}, \mathcal{J} \frown \Omega)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis, résolvantes à droite.

Soit $(A', <) \in \mathcal{J}^s$; une sous-structure de $(A, <)$ dans $(\mathfrak{M}, \omega, \mathcal{J}^s, \mathcal{J}^s \frown \Omega)$ est une sous-classe sous-inductive faible de $(A, <)$, c'est-à-dire une sous-classe A' de A, munie de l'ordre induit par $<$ et telle que: Si A'' est une sous-classe de A' majorée par $x' \in A'$, on a: $\overset{x'}{\bigcup} A'' \in A'$.

Nous poserons: $\mathcal{J}'^s = \mathcal{J}^s \frown \widetilde{\Omega}'$ $\quad$ et $\quad$ $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \frown \widetilde{\Omega}'$.

DÉFINITION 9. Une catégorie $\mathcal{J}^s(\mathcal{J}'^s, \mathcal{J}^s)$-structurée sera appelée *catégorie sous-inductive.*

Rappelons [1a] qu'une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$-structurée est une catégorie inductive. Une catégorie inductive est aussi une catégorie sous-inductive. Une catégorie sous-inductive est aussi une catégorie sous-préinductive et par suite une catégorie ordonnée.

THÉORÈME 5. *Pour qu'une catégorie sous-préinductive $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ soit sous-inductive, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}, <)$ soit une classe sous-inductive et que l'axiome suivant soit vérifié:*

(I^s) *Les conditions $f_i < f$, où $f_i \in \mathcal{C}$, $i \in I$, $f \in \mathcal{C}$, entraînent:*

$$\alpha(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(f_i) \quad \text{et} \quad \beta(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\beta(f)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(f_i) .$$

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. En effet, soient:

$(g_i, f_i) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$, $\quad (g, f) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$ $\quad$ et $\quad (g_i, f_i) < (g, f)$ $\quad$ dans $\quad (\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$,

où $i \in I$. Puisque $g_i < g$ et $f_i < f$ pour tout $i \in I$, on a:

$$\alpha(\overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i) = \overset{\alpha(g)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(g_i) = \overset{\beta(f)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(f_i) = \beta(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) ,$$

$$\alpha(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(f_i) \quad \text{et} \quad \beta(\overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i) = \overset{\beta(g)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(g_i).$$

Par suite $\Big(\overset{g}{\bigcup\limits_{i\in I}} g_i, \overset{f}{\bigcup\limits_{i\in I}} f_i\Big) \in \mathcal{C}^{\cdot} \ast \mathcal{C}^{\cdot}$. De plus:

$$g_i \cdot f_i < \overset{g}{\bigcup_{i\in I}} g_i \cdot \overset{f}{\bigcup_{i\in I}} f_i = k, \qquad \text{d'où} \qquad k_i = \overset{g\cdot f}{\bigcup_{i\in I}} g_i \cdot f_i < k .$$

Il en résulte: $\alpha(k') = \alpha(k)$ et $\beta(k') = \beta(k)$, donc $k' = k$. Ceci prouve que $\big((\mathcal{C}, <), \varkappa(\mathcal{C}^{\cdot} \ast \mathcal{C}^{\cdot}, <)\big) \in \mathcal{J}^s$.

Proposition 12. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-inductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. S'il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que: $\alpha(g) < h$ et $\beta(f) < h$, alors le pseudo-produit gf est défini.*

Démonstration. Soit G' (resp. F') la classe des éléments g' (resp. f') tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f\rangle$. Soit $\bar{g}' = \overset{g}{\bigcup} G'$ et $\bar{f}' = \overset{f}{\bigcup} F'$. En utilisant l'axiome (I^s), on obtient:

$$\alpha(\bar{g}') = \overset{\alpha(g)}{\bigcup} \alpha(G') = \overset{h}{\bigcup} \alpha(G') = \overset{\beta(f)}{\bigcup} \beta(F') = \beta(\bar{f}') ;$$

comme $\bar{g}' < g$ et $\bar{f}' < f$, il en résulte:

$$(\bar{g}', \bar{f}') \in \langle g, f\rangle, \qquad \text{donc} \qquad \bar{g}' \cdot \bar{f}' = gf .$$

Corollaire. *Les conditions $f \in \mathcal{C}$, $e < \alpha(f)$ et $e' < \beta(f)$ entraînent que les pseudo-produits $e'f$ et fe sont définis.*

Proposition 13. *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-inductive complètement régulière à droite, les conditions:*

$$f \in \mathcal{C}, \quad e \in \mathcal{C}_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}, \quad e < \alpha(f) \quad \textit{et} \quad e' < \beta(f)$$

entraînent:

$$\alpha(fe) = e \quad \textit{et} \quad \beta(e'f) = e' .$$

Démonstration. D'après le corollaire 1 de la proposition 11, on a:

$$\alpha(fe) = e \quad \text{et} \quad \beta(fe) = \beta(f) .$$

Soit $e'' = \beta(e'f)$; comme $e'' < e'$, on a:

$$e'e'' < e' \quad \text{et} \quad e'f < f, \quad \text{d'où} \quad (e'e'', e'f) \in \langle e', f\rangle .$$

Par suite: $(e'e'') \cdot (e'f) < e'f$. Puisque $e'' \precsim e'$, on obtient: $\beta(e'e'') = e'$. Il en résulte $e' < e''$, donc $e' = e'' = \beta(e'f)$.

En particulier, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive au sens de [4] et complètement régulière à droite, la proposition 13 signifie que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est aussi une catégorie inductive régulière (au sens de [4]).

Appliqués au cas où $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive, les résultats du § 5 redonnent les résultats de [1a], § I.

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{H}, <)$ deux catégories sous-inductives. Soient $\mathcal{H}_{\precsim}$ et $\mathcal{C}_{\precsim}$ les sous-catégories de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ resp. associées aux relations d'ordre (théorème 2). Nous supposerons que $(\mathcal{H}, <)$ est une catégorie ordonnée au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ relativement à p et que l'axiome suivant est vérifié:

Soient $\bar{h} \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathcal{H}_0$ tels que $s < \beta(\bar{h})$. On a: $p(s\bar{h}) = p(s)p(\bar{h})$.

Proposition 14. *Si $\bar{h}' \precsim \bar{h}$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$, on a: $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$.*

Démonstration. Supposons $s \precsim S$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$. On a:

$$p(S \succsim s) \in \mathcal{C}_{\precsim} .$$

Soit $\bar{g} \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar{g}) = S$ et $p(\bar{g}) = p(S \succsim s) \cdot g'$, où $g' \in \mathcal{C}$. Comme $\big(\beta(g'), g'\big) \in \langle p(s), p(\bar{g})\rangle$, il résulte de la proposition 11 que $g' = p(s)p(\bar{g})$. Par suite $p(s\bar{g}) = g'$. Les relations:

$$\beta(s\bar{g}) < s, \qquad \alpha(s\bar{g}) < \alpha(\bar{g}) ,$$

$$p\big(\beta(s\bar{g})\big) = \beta(g') = p(s) \qquad \text{et} \qquad p\big(\alpha(s\bar{g})\big) = \alpha(g') = p\big(\alpha(\bar{g})\big)$$

entraînent $\beta(s\bar{g}) = s$ et $\alpha(s\bar{g}) = \alpha(\bar{g})$, d'où $\bar{g} = (S \succsim s) \cdot s\bar{g}$. On en déduit $s \precsim_p S$. Si $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$, on obtient, d'après ce qui précède:

$$\alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}), \qquad \beta(\bar{h}') \precsim_p \beta(\bar{h}) .$$

Par conséquent $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, puisque $p(\bar{h}') < p(\bar{h})$.

Corollaire. *Soit $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}})$ un foncteur. Si $\bar{j}$ est une $(\mathcal{H}_{\precsim}, \overline{p})$-injection, alors $\bar{j}$ est une $(\mathcal{C}_{\precsim}, p\overline{p})$-injection.*

En effet, on a $\overline{p}(\bar{j}) \in \mathcal{H}_{\precsim}$, d'où $\overline{p}\big(\alpha(\bar{j})\big) \precsim_p \overline{p}\big(\beta(\bar{j})\big)$, d'après la proposition 14. Le corollaire résulte alors de la proposition 6.

Remarque. Si $(\mathcal{H}, <)$ est complètement régulière à droite, la condition $\bar{h}' < \bar{h}$ entraîne $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, d'après la proposition 14. Toutefois il existe généralement des sous-homomorphismes $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$ qui ne sont pas majorés par $\bar{h}$ dans $(\mathcal{H}, <)$. Il en est ainsi dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ des applications continues entre espaces topologiques, considérée comme catégorie d'homomorphismes au-dessus de la catégorie des applications de classe dans classe, lorsque $\widetilde{\mathcal{T}}$ est munie de sa structure usuelle de catégorie inductive ($T' < T$ si, et seulement si, T' est la topologie induite par T sur un ouvert de T). Pour une discussion de cette question, voir [1a], théorèmes 3 et 4, § I.

Bibliographie

[1] a) *Catégories structurées*, Ann. Ecole Normale Supérieure (à l'impression).

b) *Catégories doubles et catégories structurées*. Comptes-Rendus 256 (1963), p. 1198.

c) *Catégorie double des quintettes; applications covariantes*, Comptes-Rendus 256 (1963), p. 1891.

d) *Catégories structurées d'opérateurs*, Comptes-Rendus 256 (1963), p. 2080.

e) *Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes*, Comptes-Rendus 256 (1963), p. 2280.

[2] *Espèces de structures locales, Elargissements de catégories, Séminaire Topologie et Géo. Différentielle* (Ehresmann), Paris, III, 1961.

[3] Grothendieck, *Notes polycopiées.*

[4] *Catégories inductives et pseudo-groupes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. X (1960), p. 307.

Reçu par la Rédaction le 13. 5. 1963