ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur une équation fonctionnelle (I)

par D. BRYDAK (Kraków)

Introduction. Le sujet de ce travail est l'équation fonctionnelle

$$\varphi\{F[x, \varphi(x)]\} = \varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue et $F(x, y)$ est une fonction donnée. L'équation (1) est un cas particulier de l'équation

$$\varphi\{F[x, \varphi(x)]\} = G[x, \varphi(x)], \tag{2}$$

où $G(x, y)$ est aussi une fonction donnée. Nous obtenons l'équation (2) en étudiant des courbes invariantes sous la transformation $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$. L'équation (2) a été étudiée en rapport avec le problème des courbes invariantes par S. Lattès [7] et P. Montel [10]. Des cas particuliers de cette équation ont été étudiés par de nombreux auteurs: M. Kuczma [3], [4], [5] et M. K. Fort [2] ont traité le cas où $F(x, y) \equiv y$, K. Kuratowski [6], R. Wagner [11] et W. Lüssy [9] se sont occupés de l'équation

$$\varphi[x+\varphi(x)] = \varphi(x) \tag{3}$$

dite *équation d'Euler*, qu'on obtient d'un problème géométrique [1]. Le résultat essentiel du travail [11] dit que toutes les solutions de l'équation (3), possédant la propriété de Darboux, sont constantes.

Dans le présent travail nous allons présenter quelques théorèmes sur les solutions continues de l'équation (1).

Nous admettrons dans la suite, sons toujours le rappeler que la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses (H) suivantes:

1° $F(x, y)$ est définie et continue dans un rectangle

$$K = \langle a, \beta\rangle \times (\gamma, \delta),$$

2° $F(x, y) \in \langle a, \beta\rangle$ pour $(x, y) \in K$,

3° $F(x, y)$ est une fonction strictement croissante par rapport à la première variable et strictement monotone par rapport à la deuxième.

[1] C'est le problème de Gergonne: quelles sont les courbes telles que la longueur de la normale contenue entre la courbe et l'axe x soit égale à la valeur de la fonction au point d'intersection de cette normale avec l'axe des x? (Annales de Gergonne, v. XII).

Remarque. Chacun des nombres a, β, γ, δ peut être infini et quand $\lim_{x\to\infty} F(x, y) = \infty$ pour un $y \in (\gamma, \delta)$, nous admettons $F(\infty, y) = \infty$ pour cette valeur de y. De façon analogue nous admettons $F(-\infty, y) = -\infty$, si $\lim_{x\to\infty} F(x, y) = -\infty$.

Nous dirons qu'une fonction est *continue à l'infini* si elle possède une limite, finie ou non, à l'infini.

Introduisons la

DEFINITION 1. Pour une fonction $F(x, y)$ *satisfaisant aux hypothèses* (H) désignons

$F_0(x, y) = x$,

$F_{n+1}(x, y) = F[F_n(x, y), y]$, $n = 0, 1, \ldots$

On peut facilement démontrer par induction que

$$F_n[F_k(x, y)] = F_{n+k}(x, y) \quad \text{pour} \quad n, k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

et que toute fonction satisfaisant à l'équation (1), satisfait aussi à l'équation

$$\varphi\{F_n[x, \varphi(x)]\} = \varphi(x), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Maintenant nous allons démontrer le

LEMME 1. *Si $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H) *et si une fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation* (1) *dans $\langle a, \beta\rangle$ et possède la propriété de Darboux dans $\langle a, \beta\rangle$, alors, pour tout a tel que*

$$F[a, \varphi(a)] > a \tag{6}$$

et tout b tel que $a \leqslant b \leqslant F[a, \varphi(a)]$, on a les inégalités

$$F_n[a, \varphi(a)] \leqslant F_n[b, \varphi(b)] \leqslant F_{n+1}[a, \varphi(a)], \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Démonstration. Pour $n = 0$ la conclusion de ce lemme se confond avec l'hypothèse. D'abord nous allons démontrer l'inégalité (7) pour $n = 1$, c'est-à-dire l'inégalité

$$F_1[a, \varphi(a)] \leqslant F_1[b, \varphi(b)] \leqslant F_2[a, \varphi(a)]. \tag{8}$$

Comme $F(x, y)$ est une fonction strictement croissante par rapport à x, la suite $\{F_n[a, \varphi(a)]\}$ est strictement croissante en vertu de (6), c'est-à-dire

$$F_{n+1}[a, \varphi(a)] > F_n[a, \varphi(a)], \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Supposons que l'inégalité (8) ne soit pas remplie. Alors deux cas sont possibles:

$$F_1[a, \varphi(a)] < F_2[a, \varphi(a)] < F_1[b, \varphi(b)], \tag{I}$$

où

$$F_1[b, \varphi(b)] < F_1[a, \varphi(a)] < F_2[a, \varphi(a)]. \tag{II}$$

Considérons ces cas successivement.

(I) Posons $\Phi(x) \overset{\mathrm{df}}{=} F[x, \varphi(x)]$. Comme $F(x, y)$ est continue et $\varphi(x)$ possède la propriété de Darboux, $\Phi(x)$ la possède aussi. Alors, en vertu de l'hypothèse que $\Phi(a) < F_2[a, \varphi(a)] < \Phi(b)$, il existe un c tel que $a < c < b$ et $\Phi(c) = F_2[a, \varphi(a)]$. Nous avons donc

$$\Phi(c) = F_1[c, \varphi(c)] = F_2[a, \varphi(a)]$$

et il en résulte, en vertu de (1) et (5), que

$$\varphi(c) = \varphi(a) .$$

Alors

$$F[c, \varphi(c)] = F_1[c, \varphi(c)] = F_2[a, \varphi(a)] = F\{F_1[a, \varphi(a)], \varphi(a)\}$$

et comme $F(x, y)$ est une fonction biunivoque par rapport à x, il en résulte que $c = F_1[a, \varphi(a)]$, contrairement à ce que $c < b < F_1[a, \varphi(a)]$.

(II) En conservant pour $\Phi(x)$, le même sens que dans le cas (I), nous avons, en vertu de (5) et de la définition 1:

$$\Phi\{F_1[x, \varphi(x)]\} = F_2[x, \varphi(x)] .$$

De façon analogue au cas (I) il existe un c' tel que $b < c' < F_1[a, \varphi(a)]$ et

$$\Phi(c') = F_1[a, \varphi(a)]$$

d'où il résulte, en vertu de (1), que

$$\varphi(c') = \varphi(a) ,$$

et de même façon que dans le cas (I), nous obtenons $c' = a$, contrairement à la condition $a < b < c'$.

Nous avons démontré l'inégalité (8). Supposons maintenant que l'inégalité (7) soit vraie pour un nombre entier $n \geqslant 0$. Mettant dans l'inégalité (8) $F_n[a, \varphi(a)]$ pour a et $F_n[b, \varphi(b)]$ pour b, nous voyons que pour $n+1$ l'inégalité (7) résulte de (7), (8) et (9). Le principe de l'induction mathématique entraîne donc que l'inégalité (7) est vraie pour tout n entier et positif.

De façon analogue on peut démontrer:

LEMME 2. *Si $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H), *et si une fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation* (1) *dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et possède la propriété de Darboux dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, alors, pour tout a tel que $F[a, \varphi(a)] < a$ et tout b tel que $F[a, \varphi(a)] \leqslant b \leqslant a$, on a les inégalités*:

$$F_{n+1}[a, \varphi(a)] \leqslant F_n[b, \varphi(b)] \leqslant F_n[a, \varphi(a)], \quad n = 0, 1, \ldots$$

Pour $F(x, y)$ et $K = \langle \alpha, \beta \rangle \times (\gamma, \delta)$ fixé nous introduisons les définitions suivantes:

DÉFINITION 2.

$$Z_y \overset{\mathrm{df}}{=} \{x\colon\ F(x, y) = x\} .$$

DÉFINITION 3.

$$\underline{d}(x,y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \sup\big[\big(a, F(x,y)\big) \cap Z_y\big], & \text{lorsque} \quad \big(a, F(x,y)\big) \cap Z_y \neq \emptyset, \\ a, & \text{lorsque} \quad \big(a, F(x,y)\big) \cap Z_y = \emptyset. \end{cases}$$

$$\bar{d}(x,y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \inf\big[\big(F(x,y), \beta\big) \cap Z_y\big], & \text{lorsque} \quad \big(F(x,y), \beta\big) \cap Z_y \neq \emptyset, \\ \beta, & \text{lorsque} \quad \big(F(x,y), \beta\big) \cap Z_y = \emptyset. \end{cases}$$

Si $-\infty < a < \beta < \infty$, il peut arriver que $\big(F(x,y), \beta\big) \cap Z_y = \emptyset$ ou bien $\big(a, F(x,y)\big) \cap Z_y = \emptyset$, mais pour tout y nous avons $Z_y \neq \emptyset$, car dans le cas contraire nous aurions ou bien $F(\beta, y) > \beta$, ou bien $F(a, y) < a$, contrairement au point 2° des hypothèses (H).

LEMME 3. *Si la fonction $F(x,y)$ satisfait aux hypothèses* (H) *et pour un point $(x,y) \in K$ l'inégalité*

$$F(x,y) > x \tag{10}$$

est remplie, alors

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = \bar{d}(x,y).$$

Démonstration. En vertu de (10) la suite $\{F_n(x,y)\}$ est strictement croissante. Comme $F(x,y)$ est une fonction strictement croissante de x, nous avons

$$F_1(x,y) = F[F_0(x,y), y] < F[\bar{d}(x,y), y] \leqslant \bar{d}(x,y),$$

en vertu de la définition 3 et des hypothèses (H). Alors nous obtenons par induction l'inégalité

$$F_n(x,y) < \bar{d}(x,y), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Soit g un point quelconque de l'intervalle ouvert $\big(F(x,y), \bar{d}(x,y)\big)$. Nous allons démontrer que l'inégalité

$$F_n(x,y) > g \tag{12}$$

est remplie pour tous les indices n suffisamment grands.

Supposons, au contraire, qu'il existe des indices n, aussi grands que l'on veut, tels que (12) n'ait pas lieu. Mais dans ce cas l'inégalité $F_n(x,y) \leqslant g$ est remplie pour tous les n suffisamment grands, car la suite $\{F_n(x,y)\}$ est croissante. Il en résulte que

$$F(x,y) < \lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = g' \leqslant g < \bar{d}(x,y). \tag{13}$$

Comme il résulte de la définition 1 que $F_{n+1}(x,y) = F[F_n(x,y), y]$, nous obtenons, en vertu de la continuité de la fonction $F(x,y)$, que $g' = F(g', y)$, d'où $g' \in Z_y$. Ensuite, il résulte de (13) que $g' \in \big(F(x,y), \beta\big)$ donc $g' \in \big(F(x,y), \beta\big) \cap Z_y \neq \emptyset$. Nous en obtenons $g' \geqslant \bar{d}(x,y)$, contrairement à l'inégalité (13).

Ayant démontré que l'inégalité (12) est remplie pour tous les n suffisamment grands, nous concluons que pour tous les n suffisamment grands les termes de la suite $\{F_n(x, y)\}$ se trouvent dans l'intervalle $(g, \bar{d}(x, y))$, en vertu de (11). Le nombre g étant arbitraire, la formule $\bar{d}(x, y) = \lim_{n\to\infty} (F_n(x, y))$ est démontrée.

De même façon on peut démontrer:

LEMME 4. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H) *et pour un point $(x, y) \in K$ l'inégalité*

$$F(x, y) < x$$

est remplie, alors

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x, y) = \underline{d}(x, y) .$$

THÉORÈME 1. *Soit $F(x, y)$ une fonction satisfaisant aux hypothèses* (H) *et $\varphi(x)$ une solution continue de l'équation* (1) *dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. S'il existe un a tel que $a \in \langle \alpha, \beta \rangle$ et $a \notin Z_{\varphi(a)}$, alors $\varphi(x)$ est constante dans l'intervalle*

$$\langle \underline{d}[a, \varphi(a)], \bar{d}[a, \varphi(a)] \rangle .$$

Démonstration. La condition $a \notin Z_{\varphi(a)}$ dit que $F[a, \varphi(a)] \neq a$ (voir la définition 2).

1) Considérons d'abord le cas où $F[a, \varphi(a)] > a$. Il résulte du lemme 3 que, pour $x \in \langle a, \bar{d}[a, \varphi(a)] \rangle$, nous pouvons trouver un $k \geqslant 0$ tel que

$$F_k[a, \varphi(a)] \leqslant x \leqslant F_{k+1}[a, \varphi(a)] .$$

Il en résulte, en vertu du lemme 1 et de (5), que

$$F_n\{F_k[a, \varphi(a)], \varphi(a)\} \leqslant F_n[x, \varphi(x)] \leqslant F_{n+1}\{F_k[a, \varphi(a)], \varphi(a)\} \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots$$

En ayant égard à la définition 1 nous obtenons les inégalités suivantes:

$$F_{n+k}[a, \varphi(a)] \leqslant F_n[x, \varphi(x)] \leqslant F_{n+k+1}[a, \varphi(a)] .$$

De ces inégalités et du lemme 3 nous déduisons, en vertu du théorème des trois suites, que

$$\lim_{n\to\infty} F_n[x, \varphi(x)] = \lim_{n\to\infty} F_{n+k}[a, \varphi(a)] = \lim_{n\to\infty} F_n[a, \varphi(a)] = \bar{d}[a, \varphi(a)] .$$

Comme la fonction $F(x, y)$ est continue, nous en déduisons que

$$F\{\bar{d}[a, \varphi(a)], \varphi(x)\} = \lim_{n\to\infty} F\{F_{n-1}[x, \varphi(x)], \varphi(x)\} = \lim_{n\to\infty} F_n[x, \varphi(x)]$$
$$= \bar{d}[a, \varphi(a)] = F\{\bar{d}[a, \varphi(a)], \varphi(a)\} ,$$

d'où $\varphi(a) \equiv \varphi(x)$ dans $\langle a, \bar{d}[a, \varphi(a)] \rangle$, puisque la fonction $F(x, y)$ est biunivoque par rapport à y.

2) Dans le cas où $F[a, \varphi(a)] < a$, nous obtenons de même façon que $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle \underline{d}[a, \varphi(a)], a\rangle$.

3) Revenons au cas où $F[a, \varphi(a)] > a$. Désignons par l la borne inférieure des nombres l' tels que $l' \epsilon \langle a, a\rangle$ et $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle l', a\rangle$. Si $l = a$, nous avons $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle \underline{d}[a, \varphi(a)], a\rangle$, car $\underline{d}[a, \varphi(a)] < a$, en vertu de la définition 3. Supposons que $l > a$. Il résulte de la continuité de la fonction $\varphi(x)$ que $\varphi(l) = \varphi(a)$. Nous allons démontrer que $F[l, \varphi(l)] = l$. En effet, si l'inégalité

$$(14) \qquad F[l, \varphi(l)] < l$$

est remplie, nous avons, en vertu du point 2), que $\varphi(x) \equiv \varphi(l) = \varphi(a)$ dans $\langle \underline{d}[l, \varphi(l)], l\rangle$. Mais la suite $\{F_n[l, \varphi(l)]\}$ étant strictement décroissante, en vertu de (14), il résulte du lemme 4 que $\underline{d}[l, \varphi(l)] < l$. Alors $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle \underline{d}[l, \varphi(l)], \bar{d}[a, \varphi(a)]\rangle$, car en vertu du point 1) de cette démonstration on a $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle a, \bar{d}[a, \varphi(a)]\rangle$.

Supposons ensuite que

$$(15) \qquad F[l, \varphi(l)] > l\,.$$

Il résulte de la continuité des fonctions $F(x, y)$ et $\varphi(x)$ qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\bar{x}$ satisfaisant à

$$(16) \qquad l - \varepsilon < \bar{x} < l$$

on a

$$(17) \qquad F[\bar{x}, \varphi(\bar{x})] > l\,.$$

Il existe, en vertu de la définition de l, un $\bar{x}$ satisfaisant à (16) (donc $\bar{x}$ satisfait aussi à (17)) tel que

$$(18) \qquad \varphi(\bar{x}) \neq \varphi(a) = \varphi(l)\,.$$

Il résulte de (16) et (17) que

$$(19) \qquad \bar{x} < l < F[\bar{x}, \varphi(\bar{x})]\,.$$

Comme $F(x, y) \leqslant \bar{d}(x, y)$, nous avons $F[\bar{x}, \varphi(\bar{x})] \leqslant \bar{d}[\bar{x}, \varphi(\bar{x})]$. De cette inégalité, de (19) et du point 1) de cette démonstration nous obtenons $\varphi(l) = \varphi(\bar{x})$, contrairement à (18).

Alors l'inégalité $F[l, \varphi(l)] \leqslant l$ doit être remplie d'où $F[l, \varphi(l)] - l \leqslant 0$, et il en résulte, en vertu de l'inégalité $F[a, \varphi(a)] - a > 0$, qu'il existe un c tel que

$$(20) \qquad l < c < a \quad \text{et} \quad F[c, \varphi(c)] - c = 0\,.$$

De la définition de l et de (20) nous obtenons $\varphi(c) = \varphi(a)$, donc $F[c, \varphi(a)] = c$, d'où $c \epsilon Z_{\varphi(a)}$. Alors $l \leqslant c \leqslant \underline{d}[a, \varphi(a)]$ et $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans $\langle \underline{d}[a, \varphi(a)], \bar{d}[a, \varphi(a)]\rangle$.

4) Dans le cas où $F[a, \varphi(a)] < a$, nous obtenons de même façon (prenant pour l la borne supérieure des points l tels que $l' < \beta$ et $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ dans), que $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ *dans* $\langle \underline{d}[a, \varphi(a)], \bar{d}[a, \varphi(a)\rangle$.

On déduit aussi du théorème 1 le

COROLLAIRE 1. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H) *et la fonction $\varphi(x)$ est une solution continue de l'équation* (1) *dans* $\langle a, \beta\rangle$, *prenant une valeur constante c dans un intervalle I, alors $\varphi(x) \equiv c$ dans l'intervalle $\langle a', \beta'\rangle$ tel que $I \subset \langle a', \beta'\rangle$, $a', \beta' \in Z_c \cup \{a\} \cup \{\beta\}$ et qu'il n'existe aucun intervalle $\langle a'', \beta''\rangle$ tel que $I \subset \langle a'', \beta''\rangle \subset \langle a', \beta'\rangle$ et $a'', \beta'' \in Z_c \cup \cup \{a\} \cup \{\beta\}$.*

Il suffit de remarquer que la condition $\varphi(x) \equiv c$ dans $I = \langle a', b'\rangle$ entraîne $\varphi(x) \equiv c$ dans $\langle \underline{d}(a', c), \bar{d}(b', c)\rangle$ et que pour tout $(x, y) \in K$ nous avons $\underline{d}(x, y) \leqslant x \leqslant \bar{d}(x, y)$.

Avant d'établir les autres théorèmes concernant les solutions continues de l'équation (1) nous introduisons les définitions suivantes:

DÉFINITION 4. Pour une fonction $F(x, y)$ donnée, nous désignons par E l'ensemble de tous les x pour lesquels il existe un y tel que $F(x, y) = x$. Nous avons donc

$$E \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{y} Z_y$$

(voir la définition 2).

DÉFINITION 5. Pour une fonction $F(x, y)$ donnée nous désignons par $\varphi_0(x)$ la fonction, définie sur E, telle que

$$F[x, \varphi_0(x)] = x .$$

LEMME 5. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H), *alors l'ensemble $Z \overset{\mathrm{df}}{=} E - (\{a\} \cup \{\beta\})$ est ouvert.*

Démonstration. Cette démonstration est analogue à celle de l'existence d'une fonction implicite (voir, p. ex., [8]). Soit ε un nombre positif et $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \in Z$. Il résulte des hypothèses (H) que la fonction

$$f(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} F(x, y) - x$$

est continue et strictement monotone par rapport à y. Supposons qu'elle soit strictement croissante par rapport à y (si elle est strictement décroissante la démonstration est analogue). Soient y_1 et y_2 deux nombres tels que

$$\gamma \leqslant y_1 < \bar{y} < y_2 \leqslant \delta .$$

Alors nous avons $f(\bar{x}, y_1) < f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 < f(\bar{x}, y_2)$, car la fonction $f(x, y)$ est strictement croissante par rapport à y et $(\bar{x}, \bar{y}) \in E$. En vertu de la continuité de la fonction $f(x, y)$ il existe deux nombres positifs. ε_1 et ε_2, tels que $f(x, y_1) < 0$ pour $x \in (\bar{x}-\varepsilon_1, \bar{x}+\varepsilon_1)$ et $f(x, y_2) > 0$ pour $x \in (\bar{x}-\varepsilon_2, \bar{x}+\varepsilon_2)$. Alors nous avons

$$(21) \qquad f(x, y_1) < 0 \quad \text{et} \quad f(x, y_2) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon),$$

où $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Il résulte de la continuité de la fonction $f(x, y)$ et de (21), que pour tout $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ il existe un y tel que $\gamma < y_1 < y < y_2 < \delta$ et $f(x, y) = 0$. Nous avons donc $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon) \subset Z$, ce qui démontre que l'ensemble Z est ouvert.

LEMME 6. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H), *alors la fonction $\varphi_0(x)$, définie par la définition* 5, *possède les propriétés suivantes:*

1° *elle est définie d'une manière univoque sur E,*

2° *si elle est définie en un point de $E-(\{a\} \cup \{\beta\})$, alors elle est définie dans un voisinage de ce point,*

3° *elle satisfait à l'équation* (1) *sur E,*

4° *elle est continue sur E.*

Démonstration. 1° est une conséquence immédiate du fait que la fonction $F(x, y)$ est monotone par rapport à y.

2° résulte du lemme 5.

3° résulte de la définition 5.

4° Soit $x_0, x_1, \ldots \in E$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Posons $y_n = \varphi_0(x_n)$, pour $n = 0, 1, \ldots$ Supposons que la suite $\{y_n\}$ ne converge pas vers y_0. Alors il existe une suite $\{k_n\}$ d'indices telle que $k_1 < k_2 < \ldots$ et $\lim y_{k_n} = y \neq y_0$. Nous avons, en vertu de la continuité de la fonction $F(x, y)$,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} F(x_{k_n}, y_{k_n}) = F(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}, \lim_{n\to\infty} y_{k_n}) = F(x_0, y),$$

car $x_{k_n} \in E$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $x_0 \in E$. Il en résulte que $F(x_0, y) = x_0$ et, comme la fonction $F(x, y)$ est strictement monotone par rapport à y, que $y = y_0$, contrairement à notre hypothèse que $y \neq y_0$.

Le lemme 6 et le corollaire 1 entraînent

COROLLAIRE 2. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèses* (H), *et la fonction $\varphi(x)$ est une solution continue de l'équation* (1) *dans $\langle a, \beta\rangle$, prenant une valeur constante c dans un intervalle $\langle a', \beta'\rangle$ tel que $a', \beta' \in Z_c \cup \{a\} \cup \{\beta\}$ et qu'il n'existe aucun intervalle J contenant $\langle a', \beta'\rangle$, différent de $\langle a', \beta'\rangle$ tel que la fonction $\varphi(x)$ soit constante dans tout l'intervalle J, alors l'inégalité $a' \neq a$ ($\beta' \neq \beta$) entraîne que la fonction $\varphi_0(x)$ est définie au point a' (β'). Si $a < a' < \beta' < \beta$, alors $\varphi_0(a') = \varphi_0(\beta') = \varphi(a') = \varphi(\beta') = c$.*

Pour démontrer que $\varphi_0(a') = \varphi_0(\beta') = c$ il suffit de remarquer que $a' = l$, où l est le nombre défini au point 3) de la démonstration du théorème 1 et $\beta' = l$, où l est le nombre défini au point 4) de cette démonstration.

Pour donner toutes les solutions continues de l'équation (1) nous allons introduire les définitions suivantes:

DÉFINITION 6. Si la fonction $F(x, y)$ est une fonction donnée, nous désignons par $\underline{R}$ l'ensemble de toutes les familles d'intervalles $I_n = \langle a_n, \beta_n \rangle$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $I_n \cap I_m = \emptyset$ pour $n \neq m$.

2° $I_n \subset \langle a, \beta \rangle$ et $I_n \neq \langle a, \beta \rangle$.

3° La fonction $\varphi_0(x)$ est définie pour tout $a_n \neq a$ et tout $\beta_n \neq \beta$.

4° Si $a_n \neq a$ et $\beta_n \neq \beta$, alors $\varphi_0(a_n) = \varphi_0(\beta_n)$.

5° $\langle a, \beta \rangle - E \subset \bigcup\limits_n I_n$.

En vertu des points 2°, 3° et 4° de la définition 6, la fonction $\varphi_0(x)$ est définie en l'une au moins des extrémités de tout intervalle I_n et si elle est définie aux deux extrémités d'un intervalle, elle y prend la même valeur. En profitant de ce fait, nous désignons par φ_n la valeur de la fonction $\varphi_0(x)$ aux extrémités de l'intervalle I_n.

DÉFINITION 7. Pour une fonction $F(x, y)$ donnée et $R \in \underline{R}$ nous désignons

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} \varphi_n & \text{pour } x \in I_n, \\ \varphi_0(x) & \text{pour } x \notin \bigcup\limits_n I_n. \end{cases} \tag{22}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉORÈME 2. *Si la fonction $F(x, y)$ satisfait aux hypothèse* (H), *alors toute solution continue de l'équation* (1) *dans $\langle a, \beta \rangle$ est constante ou elle est donnée par la formule*

$$\varphi(x) \equiv \varphi_R(x) \quad \textit{dans} \quad \langle a, \beta \rangle,$$

où $\varphi_R(x)$ est définie par la formule (22) *et R parcourt $\underline{R}$.*

Démonstration. D'abord nous allons démontrer que toutes les fonctions $\varphi_R(x)$ satisfont à l'équation (1). Soit $\varphi(x) = \varphi_R(x)$, où $R \in \underline{R}$. Soit ensuite $x \in \langle a, \beta \rangle - \bigcup\limits_n I_n$. Alors $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ et $\varphi(x)$ satisfait à l'équation (1), en vertu du point 3° du lemme 6.

Supposons qu'il existe un indice k tel que $x \in I_k = \langle a_k, \beta_k \rangle$. Alors il résulte des hypothèses (H) et de (22) que

$$F[x, \varphi(x)] = F(x, \varphi_k) \geqslant F(a_k, \varphi_k) = a_k \geqslant a$$

et

$$F[x, \varphi(x)] = F(x, \varphi_k) \leqslant F(\beta_k, \varphi_k) = \beta_k \leqslant \beta,$$

alors $F[x, \varphi(x)] \in I_k$, d'où

$$\varphi\{F[x, \varphi(x)]\} = \varphi_k = \varphi(x) .$$

Alors $\varphi_R(x)$ satisfait à l'équation (1). Il est évident que la fonction constante dans $\langle a, \beta\rangle$, prenant sa valeur dans l'intervalle (γ, δ) satisfait aussi à cette équation.

La continuité de la fonction constante est évidente. Nous allons démontrer la continuité de la fonction $\varphi_R(x)$. Soit $x \in \langle a, \beta\rangle$. Si $x \in (a_n, \beta_n)$ pour un indice n, alors la fonction $\varphi_R(x)$ est continue dans x, car elle est constante dans I_n. Si $x \notin \bigcup\limits_n (a_n, \beta_n)$, nous avons $\varphi_R(x) = \varphi_0(x)$, en vertu de (22). Comme $x \in E$, en vertu du point 5° de la définition 6, la fonction $\varphi_0(x)$ est continue dans x, donc pour un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \in (x-\eta, x+\eta) \cap E . \tag{23}$$

Soit $t \in (x-\eta, x+\eta)$. Si $t \notin \bigcup\limits_n I_n$, nous posons $\bar{t} = t$. Si $t \in \bigcup\limits_n I_n$, alors il existe un indice m tel que $t \in I_m$. Dans ce cas nous posons $\bar{t} = \beta_m$, si $\beta_m < x$ et $\bar{t} = a_m$, si $a_m > x$. Remarquons que si $a_m > x$, alors $\beta_m > x$, car $x \notin (a_m, \beta_m)$. Il résulte de (22) que dans tous ces cas nous avons $\bar{t} \in E$ et

$$\varphi_R(t) = \varphi_0(\bar{t}) \quad \text{et} \quad |\bar{t} - x| \leqslant |t - x| . \tag{24}$$

Alors pour $t \in (x-\eta, x+\eta)$, nous avons $\bar{t} \in (x-\eta, x+\eta) \cap E$, en vertu de (24) et il en résulte, en vertu de (23), (24) et de l'égalité $\varphi_R(x) = \varphi_0(x)$, que

$$|\varphi_R(x) - \varphi_R(t)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(\bar{t})| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \in (x-\eta, x+\eta) .$$

Quand $a = a_k$ ou $\beta = \beta_k$ pour un indice k, alors la fonction $\varphi_R(x)$ est continue dans a ou β, car elle est constante dans I_k, en vertu de (22). La continuité de la fonction $\varphi_R(x)$ est ainsi démontrée pour tout $x \in \langle a, \beta\rangle$.

Nous allons démontrer que pour toute solution continue $\psi(x)$ de l'équation (1), qui n'est pas constante dans $\langle a, \beta\rangle$, il existe une famille $R_0 \in \underline{R}$ telle que $\psi(x) = \varphi_{R_0}(x)$.

Si $\psi(x) \equiv \varphi_0(x)$ dans $\langle a, \beta\rangle, \psi(x)$ est évidemment de la forme (22) pour $R_0 = \emptyset$. Si $\psi(x) \not\equiv \varphi_0(x)$, alors il existe dans $\langle a, \beta\rangle$ un point a tel que $\psi(a) \neq \varphi_0(a)$, c'est-à-dire $F[a, \psi(a)] \neq a$ (voir la définition 5). Il résulte du théorème 1 que $\psi(x)$ est constante dans $\langle \underline{d}[a, \psi(a)], \bar{d}[a, \psi(a)]\rangle$. Soit R_0 la famille de tous les intervalles fermés I_n tels que la fonction $\psi(x)$ est constante dans I_n et, si $\psi(x)$ est constante dans un intervalle fermé J tel que $I_k \subset J$ pour un indice k, alors $I_k = J$. De la définition de la famille R_0 nous obtenons que $I_n \cap I_m = \emptyset$ pour $n \neq m$. En vertu du corollaire 2, nous savons que la fonction $\varphi_0(x)$ est définie dans toutes les extrémités des intervalles I_n différentes de α et β. Désignons $I = \langle \alpha', \beta' \rangle \in R_0$. Il résulte encore du corollaire 2, que $\psi(\alpha') = \varphi_0(\alpha')$, si $\alpha' \neq \alpha$ et $\psi(\beta') = \varphi_0(\beta')$, si $\beta' \neq \beta$. Soit $x \notin \bigcup_n I_n$. Comme l'inégalité $F[x, \psi(x)] \neq x$ entraîne, en vertu du théorème 1, que $x \in I_k$ pour un indice k, alors nous avons $F[x, \psi(x)] = x$, c'est-à-dire la fonction $\varphi_0(x)$ est définie dans le point x et $\psi(x) = \varphi_0(x)$. La famille R_0 appartient donc à $\underline{R}$ et en construisant, pour cette famille, la fonction $\varphi_{R_0}(x)$, selon la formule (22), nous obtenons que $\psi(x) \equiv \varphi_{R_0}(x)$ dans $\langle \alpha, \beta \rangle$.

On déduit du théorème 2 le

COROLLAIRE 3. *Soit $\varphi_0(x)$ une fonction monotone. Si l'équation* (1) *possède une famille (non vide) de solutions continues, c'est une famille à deux paramètres, c'est-à-dire toute solution de l'équation* (1) *est définie par ses valeurs aux extrémités de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$.*

Démonstration. Soient deux fonctions, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, coïncidant aux extrémités de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Désignons $A = \varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$, $B = \varphi(\beta) = \psi(\beta)$. Nous allons démontrer que $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. Supposons, au contraire, qu'il existe dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ un point x_0 tel que $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$. Alors nous avons $A \neq B$, car dans le cas où $A = B$ nous aurions $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv A = B$ dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, en vertu du fait que la fonction $\varphi_0(x)$ est monotone et à cause du théorème 2. En outre nous avons évidemment $\alpha < x_0 < \beta$. L'un, au moins, des nombres $\varphi(x_0)$ et $\psi(x_0)$ n'est pas la valeur de la fonction $\varphi_0(x)$ au point x_0. Nous pouvons admettre que $\varphi(x_0)$ n'est pas la valeur de $\varphi_0(x)$ en x_0. Alors il existe, en vertu du théorème 2, un intervalle $\langle a, b \rangle$ tel que $\alpha \leqslant a < x_0 < b \leqslant \beta$ et $\varphi(x)$ est constante dans $\langle a, b \rangle$ et $\varphi(x)$ n'est constante dans aucun intervalle J tel que $\langle a, b \rangle \subset J$ et $\langle a, b \rangle \neq J$. Il résulte de l'inégalité $A \neq B$ que $a \neq \alpha$, ou $b \neq \beta$. Supposons que $a \neq \alpha$ (en supposant que $b \neq \beta$, nous procéderions de façon analogue). Considérons deux cas: 1) $b = \beta$, et 2) $b < \beta$.

1) Dans ce cas la fonction $\varphi_0(x)$ est définie dans a et $\varphi_0(a) = \varphi(x_0) = B$, en vertu du théorème 2. Mais $B \neq \psi(x_0)$, donc il résulte du théorème 2 qu'il existe un point x_1 tel que $x_0 \leqslant x_1 < \beta$ et $\psi(x_0) = \varphi_0(x_1)$. De même façon il existe un point x_2 tel que $x_1 < x_2 \leqslant \beta$ et $B = \psi(\beta) = \varphi_0(x_2)$. Donc $\varphi_0(a) = \varphi_0(x_2) \neq \varphi_0(x_1)$ et $a < x_1 < x_2$, mais c'est impossible, car la fonction $\varphi_0(x)$ est monotone.

2) Dans ce cas la fonction $\varphi_0(x)$ est définie en b, en vertu du théorème 2, et $\varphi_0(a) = \varphi(x_0) = \varphi_0(b)$. On voit que la fonction $\varphi_0(x)$ ne peut prendre aucune valeur différente de $\varphi(x_0)$ dans $\langle a, b \rangle$. Nous pouvons démontrer, comme au point 1) de cette démonstration, qu'il existe des points x_1 et x_2 tels que $x_1 < a < b < x_2$, en lesquels la fonction $\varphi_0(x)$ est définie et $\varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = \psi(x_0) \neq \varphi_0(a) = \varphi_0(b)$. Mais c'est impossible, car la fonction $\varphi_0(x)$ est monotone dans $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Pour illustrer le théorème 2 et le corollaire 3 considérons l'exemple suivant:

Soit $\gamma = \alpha = -\infty$, $\delta = \beta = \infty$ et

$$F(x, y) = \begin{cases} x + e^y & \text{pour} \quad x \in \langle 0, \infty \rangle, \\ e^y - x^2 + x & \text{pour} \quad x \in \langle -\infty, 0 \rangle. \end{cases}$$

La fonction $\varphi_0(x)$ est définie, en ce cas, dans le seul intervalle $E = (-\infty, 0)$ par la formule

$$\varphi_0(x) \equiv \ln x^2,$$

donc elle est décroissante. La famille $\underline{R}$ se compose des ensembles suivants:

1. Tout ensemble contenant un seul intervalle $\langle a, \infty \rangle$, où $a < 0$,

2. Tout ensemble contenant deux intervalles $\langle -\infty, a \rangle$ et $\langle b, \infty \rangle$, où $-\infty < a < b < 0$.

La famille des fonctions $\varphi_R(x)$ $(R \in \underline{R})$ est, selon (22), la famille de toutes les fonctions de la forme:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln a^2 & \text{pour} \quad x \geqslant a, \\ \ln x^2 & \text{pour} \quad x \leqslant a, \end{cases} \qquad a \in (-\infty, 0)$$

et de toutes les fonctions de la forme:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln a^2 & \text{pour} \quad x \leqslant a, \\ \ln x^2 & \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ \ln b^2 & \text{pour} \quad x \geqslant b. \end{cases} \qquad a, b \in (-\infty, 0) \text{ et } b > a,$$

Pour établir les conditions sous lesquelles les solutions continues de l'équation (1) sont monotones nous allons démontrer le

THÉORÈME 3. *Soit $F(x, y)$ une fonction satisfaisant aux hypothèses* (H). *Pour que toutes les solutions continues de l'équation* (1) *soient croissantes* (*décroissantes*), *il faut et il suffit que la fonction $\varphi_0(x)$ soit croissante* (*décroissante*) *dans chaque intervalle dans lequel elle est définie.*

Démonstration. Nous allons présenter la démonstration du théorème 3 pour les fonctions croissantes — pour les fonctions décroissantes elle serait analogue.

Soit $\varphi_0(x)$ une fonction croissante dans chaque intervalle, dans lequel elle est définie. Supposons qu'il existe une solution $\varphi(x)$ de l'équation (1), qui n'est pas croissante dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. Alors il existe des points x_1 et x tels que $x_1, x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ et

$$(25) \qquad \alpha < x_1 < x, \quad \varphi(x_1) > \varphi(x).$$

Soit x_2 la borne inférieure des x qui satisfont aux conditions (25) pour un x_1 fixé. Dans chaque voisinage à droite de x_2 il existe en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(x)$, des points x tels que $\varphi(x) < \varphi(x_2) = \varphi(x_1)$, donc $\varphi(x)$ n'est constante dans aucun de ces voisinages. Alors il résulte du théorème 2 que la fonction $\varphi_0(x)$ est définie au point x_2 et que $\varphi_0(x_2) = \varphi(x_2)$. Comme la fonction $\varphi(x)$ est continue, nous avons, en vertu de (25), $a < x_2 < \beta$. Alors il résulte du lemme 6 que $\varphi_0(x)$, étant définie au point x_2, est définie dans un voisinage de ce point. Il existe donc un nombre positif η, tel que la fonction $\varphi_0(x)$ est définie dans l'intervalle $(x_2, x_2+\eta)$. La fonction $\varphi_0(x)$ est croissante dans cet intervalle, en vertu de l'hypothèse. Selon la définition du point x_2, qui est la borne inférieure des x satisfaisant à (25), il existe un point x_0 tel que $x_0 \in (x_2, x_2+\eta)$ et $\varphi(x_0) < \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi_0(x_2)$. Ensuite nous savons, en vertu du théorème 2, qu'il existe une famille $R \in \underline{R}$ telle que $\varphi(x) \equiv \varphi_R(x)$. S'il existe un intervalle $I_n \in R$ tel que $I_n = \langle a_n, \beta_n\rangle$ et $x_0 \in I_n$, alors nous posons $t = a_n$. S'il n'existe pas, nous posons $t = x_0$. Dans tous les deux cas nous avons $t \in (x_2, x_2+\eta)$, et $\varphi_0(t)$ est définie en t et $\varphi_0(t) = \varphi(x_0)$. Alors $\varphi_0(x_2) > \varphi(x_0) = \varphi_0(t)$ et $x_2 \leqslant t \leqslant x_0$, contrairement à l'hypothèse que la fonction $\varphi_0(x)$ est croissante dans $(x_2, x_2+\eta)$.

Soit ensuite la fonction $\varphi_0(x)$ définie dans un intervalle $\langle a, b\rangle$ contenu dans $\langle a, \beta\rangle$ et supposons qu'elle ne soit pas croissante dans $\langle a, \beta\rangle$. Alors la fonction $\varphi_R(x)$ définie d'après (22), où

$$R = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad a = a \text{ et } b = \beta, \\ \{\langle a, a\rangle\} & \text{si} \quad a < a < b = \beta, \\ \{\langle b, \beta\rangle\} & \text{si} \quad a = a < b < \beta, \\ \{\langle a, a\rangle, \langle b, \beta\rangle\} & \text{si} \quad a < a < b < \beta, \end{cases}$$

est une solution continue de l'équation (1), qui n'est pas croissante dans $\langle a, \beta\rangle$.

Nous obtenons, comme conséquence immédiate du théorème 3, le

COROLLAIRE 4. *Pour que toutes les solutions continues de l'équation* (1) *soient constantes, il faut et il suffit que la fonction $\varphi_0(x)$ soit constante dans chaque intervalle dans lequel elle est définie.*

Il résulte du corollaire 4 que l'équation (3) ne possède que des solutions continues constantes dans $(-\infty, \infty)$ puisque $\varphi_0(x) \equiv 0$ dans cet intervalle.

On réussit parfois à réduire l'équation (2) à la forme plus simple (1) de manière que les hypothèses (H) soient remplies. Dans ce cas nous pouvons obtenir toutes les solutions continues de (2) à l'aide des résultats présentés dans ce travail. Par exemple, soit $\gamma = a = -\infty$, $\beta = \delta = \infty$ et considérons l'équation

$$\psi\left[\frac{\ln\psi(x)-x}{2}\right] = [\psi(x)]^2 e^{-3x}. \tag{26}$$

En mettant $\ln\psi(x)-2x = \varphi(x)$, nous obtenons l'équation

$$\exp\left\{\varphi\left[\frac{\varphi(x)+x}{2}\right]+\varphi(x)+x\right\} = \exp[2\varphi(x)+x]$$

d'où

$$\varphi\left[\frac{\varphi(x)+x}{2}\right] = \varphi(x)\,. \tag{27}$$

L'équation (27) ainsi obtenue est de la forme (1), où $F(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)$ satisfait aux hypothèses (H). Comme $\varphi_0(x) = x$, c'est une fonction définie et croissante dans $\langle a, \beta\rangle$, il résulte du théorème 2 que l'ensemble des solutions continues de l'équation (27) est composé 1° de toutes les fonctions constantes dans $\langle -\infty, \infty\rangle$, 2° de toutes les fonctions définies par la formule

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & \text{pour} \quad x \leqslant a\,, \\ x & \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b\,, \\ b & \text{pour} \quad x \geqslant b\,, \end{cases} \tag{28}$$

où a et b sont deux nombres arbitraires, tels que $a < b$ et 3° de la fonction $\varphi(x) \equiv x$ dans $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Alors l'équation (26) possède les solutions continues suivantes:

1° $\psi_1(x) = ce^{2x}$, où c est un nombre positif quelconque,

2° $\psi_2(x) = e^{2x+\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ est une quelconque des fonctions définies par la formule (28) ou bien $\varphi(x) \equiv x$. Ces deux familles de solutions comprennent toutes les solutions continues de l'équation (26).

De façon analogue nous pouvons ramener l'équation

$$\psi[\psi(x)]+x = 2\psi(x)\,,$$

qui joue un rôle dans l'étude des fonctions semi-convexes $\{\psi\}$, à l'équation (3) à l'aide de la transformation $\psi(x)-x = \varphi(x)$ ([1]).

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à M. L. Dubikajtis, dont les remarques m'ont aidé à éliminer quelques erreurs dans ce travail.

Travaux cités

[1] D. Brydak, *O funkcjach półwypukłych {f} (Sur les fonctions semi-convexes {f})*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie „Matematyka" 13 (1962), pp. 67-77.

[2] M. K. Fort, Jr, *Continuous solutions of functional equation*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), pp. 205-211.

[3] M. Kuczma, *On some functional equations containing iterations of unknown function*, ibidem 11 (1961), pp. 1-5.

[4] — *On monotonic solutions of a functional equation* (I), ibidem 9 (1961), pp. 295-297.

[5] — *On monotonic solutions of a functional equation* (II), ibidem 10 (1961), pp. 161-166.

[6] K. Kuratowski, *Sur une équation fonctionnelle*, Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warszawskiego 22 (1929), Dział III, pp. 160-161.

[7] S. Lattès, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante*, Ann. Math. 13 (1906).

[8] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1959.

[9] W. Lüssy, *Elemente der Mathematik* (Aufgaben), 9 (1954).

[10] P. Montel, *Leçons sur les récurrences*, Paris 1957.

[11] R. Wagner, *Eindeutige Lösungen der Funktionalgleichung* $f[x+f(x)] = f(x)$, Elemente der Mathematik 4 (1959), pp. 73-78.

Reçu par la Rédaction le 25. 10. 1962