

Une remarque sur les solutions bornées d'une équation différodifférentielle non linéaire

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Dans la présente note nous allons montrer que dans l'étude des solutions bornées des équations différodifférentielles de la forme

$$(1.1) \quad x'(t + mh) = f(t, x(t), x(t + h), \dots, x(t + mh))$$

on peut appliquer la méthode topologique de M. T. Ważewski [1]. Nous allons démontrer les théorèmes en question dans le cas le plus simple, mais il est évident que le raisonnement peut être aussi appliqué dans le cas général. L'application immédiate du théorème de M. T. Ważewski sert dans notre note à la détermination plus précise d'une région où il n'y a pas de solutions bornées de l'équation (1.1).

§ 1. HYPOTHÈSE H. 1° $f(t, x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ est une fonction continue pour $t \geq 0$, x_1, \dots, x_{m+1} quelconques;

2° $f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, x_{m+1}) > f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, x_{m+1})$ pour $\bar{x}_j > \bar{x}_j, j = 1, 2, \dots, m$;

3° Il existe une constante $R > 0$ telle que

$$0 < f(t, -R, \dots, -R, R) < f(t, R, \dots, R, R) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < +\infty,$$

$$f(t, -R, \dots, -R, -R) < f(t, R, \dots, R, -R) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < +\infty;$$

$$4^\circ |f(t, x_1, \dots, x_m, \bar{y}) - f(t, x_1, \dots, x_m, \bar{y})| \leq L|\bar{y} - \bar{y}|.$$

THÉORÈME 1. Dans les hypothèses H il existe une infinité de solutions $x(t)$ de l'équation (1.1) telles que

$$(1.2) \quad -R < x(t) < R \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < +\infty.$$

§ 2. Avant de démontrer le théorème 1 nous introduirons quelques notions analogues à celles envisagées par M. T. Ważewski pour les solutions de l'équation différentielle

$$(2.1) \quad x' = F(t, x).$$

DÉFINITION 1. Envisageons l'espace abstrait C^0 des fonctions $\varphi(t)$ continues dans l'intervalle $[0, (m-1)h]$ et d'autre part l'espace euclidien E^2 des points (t, x) . Désignons par Σ un ensemble fermé de points de l'espace E^2 , $\Sigma \subset E^2$. Soit $x(t, P)$ une solution de l'équation (1.1) telle que pour $0 \leq t \leq (m-1)h$ on ait $x(t, P) = \varphi(t)$. Supposons que pour un certain $\tau \geq 0$ le point $Q_\tau = (\tau, x(\tau, P))$ de l'espace E^2 appartienne à l'ensemble Σ . Désignons par τ^* le plus petit $s \in [0, \tau]$ tel que le point $Q_s \in \Sigma$. Un tel point sera dit *conséquent* du point abstrait P sur l'ensemble Σ (cf. [1]).

LEMME 1. HYPOTHÈSES L. *Pour chaque fonction continue $\varphi(t)$ l'équation différentielle*

$$(2.2) \quad y' = f(t, \varphi(t), \varphi(t+h), \dots, \varphi(t+(m-1)h), y)$$

satisfait à certaines conditions d'unicité des solutions et, pour une certaine fonction $\varphi_0(t)$, la solution de l'équation (2.2) $x(t, \varphi_0(\cdot))$ satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} x(t, \varphi(\cdot)) &< R && \text{pour } 0 \leq t < t_0, \\ x(t_0, \varphi(\cdot)) &= R, \\ x(t, \varphi(\cdot)) &> R && \text{pour } t_0 < t \leq t_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans les hypothèses L le conséquent $C(\varphi(\cdot), R)$ du point abstrait P sur l'ensemble $S_R \{0 \leq t < +\infty, |x| = R\}$ est continue au point P_0 .

Démonstration. La dépendance continue d'une solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$, par rapport à la fonction $F(t, y)$ et au point initial entraîne la dépendance continue d'une solution $x(t, P)$ de l'équation (1.1) du point P et par suite la dépendance continue de la consecante $C(\varphi(\cdot), R)$ du point P au point P_0 .

§ 3. Démonstration du théorème 1. Envisageons une famille de fonctions $\varphi(t, \lambda)$ continues pour $0 \leq t \leq (m-1)h$, $|\lambda| \leq R$ telles que

$$\begin{aligned} -R &\leq \varphi(t, \lambda) \leq R && \text{pour } 0 \leq t \leq (m-1)h, |\lambda| \leq R, \\ \varphi(t, \bar{\lambda}) &< \varphi(t, \bar{\bar{\lambda}}) && \text{pour } \bar{\lambda} < \bar{\bar{\lambda}}, \\ \varphi(t, -R) &= -R, && \varphi(t, R) = R \end{aligned}$$

c'est-à-dire un arc $\Omega \subset C^0$, $\Omega \{P = P(\lambda) = \varphi(\cdot, \lambda)\}$.

Supposons que le théorème 1 ne soit pas vrai, et que chaque solution $x(t, \varphi(\cdot, \lambda))$ sorte de l'ensemble

$$\omega_R: \quad 0 \leq t < +\infty, |x| < R$$

dans un instant fini t_λ .

Remarquons que, en vertu de l'hypothèse H (cf. 2°, 3° et 4°) pour chaque fonction $\psi(t)$ telle que

$$|\psi(t)| < R \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

on a

$$\begin{aligned} f(t, -R, \dots, -R, y) &< f(t, \psi(t), \psi(t+h), \dots, \psi(t+(m-1)h), y) \\ &< f(t, R, R, \dots, R, y), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(t, \psi(t), \dots, \psi(t+(m-1)h), -R) &< 0, \\ f(t, \psi(t), \dots, \psi(t+(m-1)h), R) &> 0. \end{aligned}$$

La solution $x(t, P(\lambda))$ de l'équation (1.1) satisfait aux inégalités

$$0 < x'(t, P(\lambda)) = f(t, x(t, P(\lambda)), \dots, x(t+(m-1)h, P(\lambda), R))$$

pour chaque t tel que le point $(t, x(t, P(\lambda)))$ appartient à l'ensemble $0 \leq t < +\infty, x = R$ et

$$x'(t, P(\lambda)) < 0$$

pour les t tels que le point $(t, x(t, P(\lambda)))$ appartient à l'ensemble $0 \leq t < +\infty, x = -R$. Donc les hypothèses L du lemme 1 sont satisfaites sur l'ensemble S , d'où il vient que le conséquent $C(P(\lambda))$ par rapport à l'ensemble $S \{|X| = R, 0 \leq t < \infty\}$ est continu pour chaque $\lambda \in [-R, R]$.

Envisageons le segment $A \{t = 0, -R \leq x \leq R\}$ de l'espace E^2 et une transformation T du segment A sur l'arc abstrait $\Omega \{P = P(\lambda) = (t, \varphi(\cdot, \lambda))\}$

$$T(Q) = P(x) = (t, \varphi(\cdot, x)) \quad \text{pour} \quad Q = (0, x) \in A$$

$\varphi(\cdot, \lambda)$, étant continue par rapport à λ , $T(Q)$, est continue sur A . Envisageons maintenant la transformation composée

$$W(Q) = C(T(Q)).$$

La transformation $W(Q)$ est continue sur l'ensemble A . $W(Q) = Q$ pour les points Q tels que $|X| = R$.

Chaque point $Q^* = W(Q)$ appartient à l'ensemble S . Introduisons la transformation

$$V(Q) = \begin{cases} (0, R) & \text{dans l'ensemble } Q = (t, R), \\ (0, -R) & \text{dans l'ensemble } Q = (t, -R). \end{cases}$$

La transformation $V(Q)$ est continue sur S et telle que

$$V(Q) = Q \quad \text{pour} \quad Q \in A \cdot S$$

et par suite la transformation composée

$$W^*(Q) = V(C(T(Q)))$$

est continue sur A et on a

$$W^*(Q) = Q \quad \text{sur} \quad A \cdot S,$$

ce qui veut dire que l'ensemble $A \cdot S$ est un rétracte de l'ensemble A . La contradiction ainsi obtenue termine la démonstration de l'existence d'une solution $x(t, P(\lambda_0))$ qui reste toujours dans ω_R .

Désignons par Γ l'ensemble des points P de l'espace C^0 tels que la solution de l'équation (1.1), $x(t, P)$, parcourt toujours dans l'ensemble ω_R . L'ensemble Γ possède les propriétés suivantes.

I. Il est évident que l'ensemble Γ est borné. On a

$$\|P\| = \max_{0 \leq t \leq (m-1)h} |\varphi(t)| < R.$$

II. L'ensemble Γ est fermé.

En effet, envisageons une suite de points $P_\nu \{\varphi_\nu(t)\} \in \Gamma$, $P_\nu \rightarrow P_0 \{\varphi_0(t)\}$, c'est-à-dire $\varphi_\nu(t)$ uniformément convergente vers $\varphi_0(t)$, d'où il vient que $\varphi_0(t)$ est continue dans l'intervalle $[0, (m-\tau)h]$. Pour démontrer que $|x(t, P_0)| < R$ envisageons les équations auxiliaires

$$(3.1) \quad x'(t) = f(t-mh, -R, \dots, -R, x(t))$$

et

$$(3.2) \quad x(t) = f(t-mh, R, \dots, R, x(t)).$$

Pour ces équations les hypothèses du théorème du T. Ważewski [1] (cf. hypothèse H_1 , 3°) sont satisfaites, d'où il résulte qu'il existe deux fonctions continues $\psi(t)$ et $\gamma(t)$ telles que

$$(3.3) \quad \psi'(t) = f(t-mh, -R, \dots, -R, \psi(t)),$$

$$(3.4) \quad \sigma'(t) = f(t-mh, R, \dots, R, \sigma(t)),$$

$$(3.5) \quad |\psi(t)| < R, \quad |\sigma(t)| < R \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Soit $\psi_0(t)$ la plus grande fonction satisfaisant à (3.3) et (3.5) et soit $\gamma_0(t)$ la plus petite fonction $\sigma(t)$ satisfaisant à (3.4) et (3.5). Nous allons démontrer que chaque fonction $\varphi(t)$ telle que le point $P = \varphi(\cdot)$ appartient à l'ensemble Γ satisfait aux inégalités

$$(3.6) \quad -R < \sigma_0(t) < \varphi(t-mh) < \psi_0(t) < R \quad \text{pour} \quad mh \leq t \leq 2mh.$$

Supposons qu'il existe une fonction $\hat{\varphi}(t)$ telle que le point $\hat{P} = \hat{\varphi}(\cdot) \in \Gamma$ et que

$$x(\tau_0, P) = \sigma_0(\tau_0 - mh)$$

pour un certain $\tau_0 \in [0, mh]$.

Envisageons la fonction $y(t) = x(t + mh, \hat{P})$. On a

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & f(t - mh, -R, \dots, -R, y(t)) \\ & < y'(t) = f(t - mh, y(t - mh), \dots, y(t - h), y(t)) \\ & < f(t - mh, R, \dots, R, y(t)) \quad \text{pour} \quad mh \leq t < +\infty. \end{aligned}$$

On a donc

$$y'(\tau_0 - mh) < \sigma'(\tau_0 - mh),$$

d'où on obtient

$$y(t) < \sigma_0(t) \quad \text{pour} \quad \tau_0 - mh < t < \tau_0 - mh + \varepsilon.$$

La fonction $\sigma_0(t)$ est la plus petite solution de l'équation (3.2) telle qu'on a (3.5) et par suite la solution du (3.4) $\sigma(t)$ telle que

$$\hat{\sigma}(\tau_0 + \eta_0 - mh) = y(\tau_0 + \eta_0 - mh) < \sigma_0(\tau_0 + \eta_0 - mh)$$

sort à un instant fini \hat{t} de l'ensemble ω_R et par suite on a en vertu de (3.7)

$$x(\hat{t} + mh, \hat{P}) < \hat{\sigma}(\hat{t}) = -R$$

contrairement à la supposition que $\hat{P} \in \Gamma$. D'une façon analogue on obtient l'inégalité

$$\varphi(t - mh) < \psi_0(t).$$

De l'inégalité (3.6) on obtient

$$(3.8) \quad -R < \sigma_0(t) < \varphi_0(t - mh) < \psi_0(t) < R$$

et

$$-R < \sigma(t) \leq x(t - mh, P_0) \leq \psi(t) < R \quad \text{pour} \quad mh \leq t < +\infty,$$

d'où $P_0 \in \Gamma$.

III. Envisageons deux points $P_0\{\varphi_0(t)\} \in \Gamma$ et $P_1\{\varphi_1(t)\} \in \Gamma$ tels que

$$\varphi_0(t) < \varphi_1(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq (m-1)h.$$

On vérifie facilement que chaque point $P\{\varphi(t)\}$ tel que

$$\varphi_0(t) < \varphi(t) < \varphi_1(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq (m-1)h$$

appartient à l'ensemble Γ .

IV. Il existe un ensemble $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ de points $P(\sigma(\cdot))$, où la fonction $\sigma(t)$ constitue un paramètre abstrait. L'ensemble $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ est donc infini.

Envisageons par exemple la famille des courbes $\Omega(\sigma)$, dépendant d'un paramètre abstrait $\gamma(t)$, donnée par les formules

$$\Omega(\sigma): \quad \varphi(t, \lambda; \sigma(\cdot)) = \lambda + \frac{R^2 - \lambda^2}{2R^2} \sigma(t) \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leq R,$$

où $\sigma(t)$ est une fonction continue quelconque

$$|\sigma(t)| < R, \quad \sigma(0) = 0.$$

On a

$$|\varphi(t, \lambda; \sigma)| < 2R^2|\lambda| + (R^3 - \lambda^2 R) \frac{1}{2R^2} \leq R \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leq R.$$

Sur chaque courbe $\Omega(\sigma) \{P(\lambda, \sigma) = \varphi\}$ il existe au moins un point $P(\lambda_\sigma, \sigma(\cdot))$ appartenant à l'ensemble Γ . Nous allons démontrer que pour des σ_1, σ_2 différents on obtient des points distincts

$$P(\lambda_{\sigma_1}, \sigma_1) \neq P(\lambda_{\sigma_2}, \sigma_2).$$

Soit

$$P(\lambda_{\varphi_1}, \varphi_1(\cdot)) = P(\lambda_{\varphi_2}, \varphi_2(\cdot)).$$

On a

$$\lambda_{\varphi_1} + \frac{R^2 - \lambda_{\varphi_1}^2}{2R^2} \varphi_1(t) = \lambda_{\varphi_2} + \frac{R^2 - \lambda_{\varphi_2}^2}{2R^2} \varphi_2(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq (m-1)h,$$

d'où on tire immédiatement

$$(R^2 - \lambda_{\varphi_1}^2) \varphi_1'(t) \equiv (R^2 - \lambda_{\varphi_2}^2) \varphi_2'(t),$$

$$\varphi_1'(t) \equiv \frac{R^2 - \lambda_{\varphi_2}^2}{R^2 - \lambda_{\varphi_1}^2} \varphi_2'(t)$$

(on vérifie facilement que $\lambda_{\varphi_j}^2 \neq R^2$) et par suite

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \frac{R^2 - \lambda_{\varphi_2}^2}{R^2 - \lambda_{\varphi_1}^2}, \quad \text{d'où} \quad \lambda_{\varphi_1} = \lambda_{\varphi_2}$$

et par suite

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq (m+1)h.$$

Le paramètre $\sigma(\cdot)$ est donc essentiel.

§ 4. Remarque. Il est évident que dans le théorème 1 on peut remplacer l'hypothèse H par une hypothèse analogue:

HYPOTHÈSE H_∞: 1. $f(t, x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$ est une fonction continue pour $-\infty < t < +\infty$, (x_1, \dots, x_{m+1}) quelconques;

2. $f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, x_{m+1}) < f(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{x}_{m+1})$ pour $\bar{x}_j < \bar{x}_j, j = 1, 2, \dots, m$;

3. Il existe une constante $R > 0$ telle que

$$0 < f(t, -R, \dots, -R, R) < f(t, R, \dots, R) \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$f(t, -R, \dots, -R) < f(t, R, \dots, R, -R) < 0 \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty;$$

$$4. |f(t, x_1, \dots, x_m, \bar{y}) - f(t, x_1, \dots, x_m, \bar{y})| \leq L|\bar{y} - \bar{y}|.$$

Dans le cas de l'hypothèse H_∞ il faut remplacer la condition $x(t, P) = \varphi(t)$ pour $0 \leq t \leq (m-1)h$ par la condition analogue $x(t, P) = \tilde{\varphi}(t)$ pour $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + (m-1)h$, où $\tilde{\varphi}(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + (m-1)h$ et τ_0 est une constante quelconque fixée.

Désignons par $\omega_{\tau_0 R}$ l'ensemble

$$\omega_{\tau_0 R}: \quad -R \leq x \leq R, \quad \tau_0 \leq t < +\infty$$

et par $\Gamma_{\tau_0 R}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation (1.1) contenues dans l'ensemble $\omega_{\tau_0 R}$ pour $\tau_0 \leq t < +\infty$.

Le théorème 1 obtient dans l'hypothèse H la forme suivante

THÉORÈME 1 $_\infty$. *Dans l'hypothèse H_∞ pour chaque τ_0 l'ensemble $\Gamma_{\tau_0 R}$ contient au moins une famille dépendant d'une fonction arbitraire $\sigma(t)$ (continue dans l'intervalle $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + (m-1)h$) de solutions de l'équation (1.1), c'est-à-dire d'un paramètre abstrait γ .*

§ 5. THÉORÈME 2. *Dans l'hypothèse H_∞ il existe au moins une solution de l'équation (1.1) contenue dans l'ensemble*

$$\omega_{\infty R}: \quad |x| \leq R, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Démonstration. Il est évident que l'ensemble $\Gamma_{\tau, R}$ est fermé et borné (cf. théorème 1, démonstration de I, II) pour chaque τ . On vérifie facilement que

$$\Gamma_{\tau_1, R} \subset \Gamma_{\tau_2, R} \quad \text{pour} \quad \tau_1 \leq \tau_2.$$

Nous allons démontrer que l'ensemble $\Gamma_{\tau, R}$ envisagé pour $\tau_0 \leq t \leq T$ est compact pour chaque $\tau_0, \tau_0 \geq \tau + mh$. En effet, envisageons une fonction $x(t)$ quelconque telle que $x(t) \in \Gamma_{\tau, R}$, $\tau_0 \geq mh + \tau$ et une constante quelconque $t_0, t_0 \in [\tau_0, T)$

$$|x(t_0) - x(t_0 + \varepsilon)| = |x'(\vartheta)| |\varepsilon| = |\varepsilon| \left| f(\vartheta - mh, x(\vartheta - mh), \dots, x(\vartheta)) \right|$$

en vertu de la continuité de la fonction f il existe une constante M telle que

$$|f(t, x_1, \dots, x_{m+1})| \leq M_{\tau_0 T} \quad \text{pour} \quad \tau_0 \leq t \leq M, \quad |x_j| \leq R, \\ j = 1, 2, \dots, m+1,$$

d'où

$$|x(t_0) - x(t_0 + \varepsilon)| \leq M_{\tau_0 T} |\varepsilon|$$

pour chaque $x(t)$ appartenant à l'ensemble $\Gamma_{\tau_0 R}$ et $t_0 \in [\tau_0, T]$.

Envisageons une suite $\{x_v(t)\}$ de solutions de l'équation (1.1) telle que

$$x_v(t) \in \Gamma_{-vmh, R} \quad \text{pour} \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Il existe une suite partielle de la suite $\{x_v(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $[-mh, T]$. Désignons une telle suite par $\{x_{1v}(t)\}$

$$x_{1v}(t) \underset{[-mh, T]}{\Rightarrow} x(t)$$

($T > 0$ fixé arbitrairement). On a

$$x_{1v}(t) \in \Gamma_{-mh, R} \subset \Gamma_{0, R}.$$

D'une façon analogue désignons par $\{x_{2v}(t)\}$ une suite partielle de la suite $\{x_{1v}(t)\}$ telle que

$$x_{2v}(t) \underset{[-2mh, 2T]}{\Rightarrow} x(t)$$

et la suite partielle de la suite $\{x_{s-1, v}(t)\}$ par $\{x_{s, v}(t)\}$

$$x_{sv}(t) \underset{[-smh, sT]}{\Rightarrow} x(t),$$

$$x_{sv}(t) \subset \Gamma_{-smh, R} \subset \Gamma^{-(s-1)mh, R} \subset \dots \subset R_{0, R}.$$

On vérifie facilement que la suite $y_v(t) = x_{rv}(t)$ satisfait aux conditions

$$y_v(t) \underset{[\alpha, \beta]}{\Rightarrow} x(t)$$

dans chaque intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, d'où $x(t)$ est la solution de l'équation (1.1) telle que

$$|x(t)| \leq R \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty.$$

En vertu de 3 on obtient l'inégalité forte

$$|x(t)| < R \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty.$$

§ 6. THÉORÈME 3. *Chaque solution $x(t)$ de l'équation (1.1) telle que*

$$|x(t)| < R \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty$$

parcourt toujours dans l'ensemble

$$\omega_\infty: \quad \sigma(t - mh) \leq x \leq \gamma(t - mh), \quad -\infty < t < +\infty,$$

où $\sigma(t)$ et $\gamma(t)$ sont les limites suivantes

$$\sigma(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} \varphi_v(t), \quad \gamma(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} \psi_v(t)$$

et $\varphi_0(t)$ est la plus petite solution de l'équation

$$(6.1) \quad x' = f(t - mh, R, \dots, R, x)$$

telle que

$$|\varphi_0(t)| < R \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty,$$

$\psi_0(t)$ est la plus grande solution de l'équation

$$(6.2) \quad x' = f(t - mh, -R, \dots, -R, x)$$

telle que

$$|\psi_0(t)| < R \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty,$$

$\varphi_v(t)$ est la plus petite solution de l'équation

$$(6.3_v) \quad x' = f(t - mh, \varphi_{v-1}(t - mh), \dots, \varphi_{v-1}(t - h), x)$$

telle que

$$(6.4_v) \quad \varphi_{v-1}(t) < \varphi_v(t) < \psi_{v-1}(t).$$

D'une façon analogue on définit $\psi_v(t)$

$$(6.5_v) \quad \psi'_v(t) = f(t - mh, \varphi_{v-1}(t - mh), \dots, \varphi_{v-1}(t - h), x).$$

Démonstration. Nous avons démontré au § 3 l'existence d'une $\varphi_0(t), \psi_0(t)$ telle qu'on a les inégalités

$$(6.6_v) \quad -R < \varphi_0(t) < \psi_0(t) < R \quad \text{dans l'intervalle } 0 \leq t < +\infty.$$

Les fonctions $\varphi_0(t)$ et $\psi_0(t)$, comme solutions bornées (par R) dans l'intervalle saturé d'existence peuvent être prolongées jusqu'à $-\infty$ et elles satisfont dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ à l'inégalité $-R < \varphi_0(t) < \psi_0(t) < R$ (sur la frontière de l'ensemble $\omega_{\infty R}$ des intégrales des équations (6.1) et (6.2) sortent de l'ensemble $\omega_{\infty R}$).

Supposons que des solutions $\varphi_v(t)$ et $\psi_v(t)$ existent et satisfont aux inégalités (6.4_v) et (6.6_v) dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. On a donc

$$(6.7) \quad \begin{aligned} f(t - mh, \varphi_{v-1}(t - mh), \dots, \varphi_{v-1}(t - h), x) \\ < f(t - mh, \varphi_v(t - mh), \dots, \varphi_v(t - h), x) \\ < f(t - mh, \psi_v(t - mh), \dots, \psi_v(t - h), x), \\ < f(t - mh, \psi_{v-1}(t - mh), \dots, \psi_{v-1}(t - h), x) \end{aligned}$$

et par suite

$$(6.8) \quad \psi'_v(t) < f(t - mh, \varphi_{v-1}(t - mh), \dots, \varphi_{v-1}(t - h), \psi_v(t)),$$

$$(6.9) \quad \varphi'_v(t) > f(t - mh, \varphi_{v-1}(t - mh), \dots, \varphi_{v-1}(t - h), \varphi_v(t))$$

d'où en vertu de (6.7) il vient que sur l'ensemble

$$S_{v+1}: \quad \begin{cases} 0 \leq t < +\infty, \\ x = \varphi_v(t) \quad \text{ou} \quad x_v = \psi(t) \end{cases}$$

des solutions de l'équation (6.3_{v+1}) sortent de l'ensemble

$$\omega_{v+1}: \quad \varphi_v(t) < x < \psi_v(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

En vertu d'un théorème de M. T. Ważewski [1] il existe au moins une solution de l'équation (6.3_{v+1}) satisfaisant à (6.4_v); d'une façon analogue on établit l'existence de la fonction $\varphi_{v+1}(t)$. L'inégalité

$$\varphi_{v+1}(t) < \psi_{v+1}(t)$$

s'obtient tout à fait analogiquement que l'inégalité

$$\varphi_0(t) < \psi_0(t) \quad (\text{cf. } \S 3).$$

Il reste à prouver que le diagramme de la fonction $y(t) = x(t, P)$ parcourt toujours dans l'ensemble

$$\bar{\omega}: \quad \sigma(t) \leq y \leq \gamma(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

pour chaque P appartenant à l'ensemble Γ .

Supposons que les valeurs de $y(t)$ appartiennent à l'ensemble

$$\bar{\omega}_v: \quad \varphi_v(t) < y < \psi_v(t) \quad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f(t-mh, \varphi_0(t-mh), \dots, \varphi_v(t-h), x) &< f(t-mh, y(t-mh), \dots, y(t-h), x) \\ &< f(t-mh, \psi_v(t-mh), \dots, \psi_v(t-h), x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y'(t) &> \psi'_{v+1}(t) \quad \text{pour tout } t \text{ pour lequel } y(t) = \psi_{v+1}(t), \\ y'(t) &< \varphi'_{v+1}(t) \quad \text{pour tout } t \text{ pour lequel } y(t) = \varphi_{v+1}(t) \end{aligned}$$

et par suite en vertu de la définition des fonctions ψ_{v+1} et φ_{v+1} on a

$$\varphi_v(t) < \varphi_{v+1}(t) < y(t) < \psi_{v+1}(t) < \psi_v(t) \quad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty,$$

d'où en vertu de la définition des fonctions $\sigma(t)$ et $\gamma(t)$ il vient que $y(t)$ appartient à la partie commune des ensembles $\bar{\omega}_v$ et le théorème est ainsi démontré.

Travail cité

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Pol. Math. 2 (1947), p. 279-313.

Reçu par la Rédaction le 17. 1. 1962